УДК 539.12:530.145

***М.Л. Гугнюк*[1], *В.А. Плетюхов*[2]**
*[1]магистрант каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[2]д-р физ.-мат. наук, проф. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина*
e-mail: otf@brsu.brest.by

ОПИСАНИЕ ПОКОЛЕНИЙ НЕЙТРИНО В ПОДХОДЕ ТЕОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Твердо установленный в настоящее время факт наличия массы у всех трех известных сортов нейтрино указывает на ограниченный характер Стандартной модели, в рамках которой нейтрино – безмассовая частица. Очевидно, что и описание нейтрино посредствам безмассового уравнения Дирака также не является правильным. В настоящей работе предлагается релятивистское волновое уравнение для микрообъекта со спином 1/2 и тремя различными значениями массы. Данное уравнение может рассматриваться как основа для описания поколений нейтрино в рамках классической теории поля.

Введение

В настоящее время установлено существование трех различных сортов (флейворов) нейтрино: электронное, мюонное и τ-лептонное. Удивительным свойством флейворных нейтрино является их способность смешиваться и осциллировать, то есть самопроизвольно превращаться друг в друга. Для данного явления принципиально важно, чтобы нейтрино обладали массой, так как осцилляции невозможны для строго безмассовых частиц. Открытие осцилляций нейтрино и наличие трех различных массовых состояний указывает на ограниченный характер Стандартной модели, в рамках которой нейтрино – безмассовая частица и осцилляции между различными типами нейтрино отсутствуют. Очевидно, что и описание нейтрино в классической теории поля посредством безмассового уравнения Дирака также не является правомерным.

Как известно, одним из основных направлений в классической теории поля является теория релятивистских волновых уравнений (РВУ) первого порядка. Последняя базируется на стандартной матричной форме уравнений

$$\left(\Gamma_\mu \partial_\mu + m\right)\psi\left(x\right) = 0, \tag{1}$$

описывающих элементарные частицы с ненулевой массой. В (1) $\psi\left(x\right)$ – многокомпонентная волновая функция, Γ_μ – квадратные числовые матрицы, m – массовый параметр. С точки зрения теории РВУ все три типа нейтрино в свободном состоянии могут рассматриваться как единый микрообъект, который способен находиться в трех различных массовых состояниях. Другими словами, масса нейтрино, как и спин, выступает в роли внутреннего квантового числа.

Возможность построения РВУ для микрообъектов с переменной массой была известна давно (см., напр., [1]), однако до открытия явления осцилляций нейтрино физический смысл таких уравнений был неясен. Теперь же ситуация изменилась. Из вышеуказанного вытекает, что в подходе теории РВУ свободное нейтрино должно описываться уравнением (1) для частицы со спином $1/2$ и тремя различными значениями массы. Построение и исследование такого уравнения и является целью настоящей работы.

Некоторые сведения из теории РВУ

Основные положения теории РВУ подробно изложены в классической работе [2] (см. также [3]). Поэтому мы ограничимся лишь кратким напоминанием некоторых из них. Основную роль в уравнении (1) играет матрица Γ_4, которая в каноническом базисе имеет структуру

$$\Gamma_4 = \oplus\sum_s C^s \otimes I_{2s+1}. \tag{2}$$

Здесь C^s – спиновый блок, соответствующий спину s в том смысле, что если собственные значения (хотя бы одно) блока C^s отличны от нуля, то частица обладает спином s. Возможные значения массы частицы $m_k^{(s)}$ выражаются через параметр m и корни $\pm\lambda_k^{(s)}$ блока C^s по формуле

$$m_k^{(s)} = \frac{m}{\left|\lambda_k^{(s)}\right|}. \tag{3}$$

Многокомпонентная волновая функция $\psi\left(x\right)$ в (1) преобразуется по некоторому приводимому представлению T группы Лоренца, состоящему из зацепляющихся неприводимых компонент τ. Под зацепляющимися понимаются неприводимые представления $\tau \sim \left(l_1, l_2\right)$ и $\tau' \sim \left(l_1', l_2'\right)$, для которых выполняются условия

$$l_1' = l_1 \pm \frac{1}{2}, \quad l_2' = l_2 \pm \frac{1}{2}, \tag{4}$$

причем знаки «+» и «–» в (4) могут не коррелировать. Кроме того, в представлении T наряду с каждым неприводимым представлением $\tau \sim \left(l_1, l_2\right)$ должно присутствовать сопряженное представление $\dot{\tau} \sim \left(l_2, l_1\right)$. В формировании спина s участвуют представления, удовлетворяющие условию

$$\left|l_1 - l_2\right| \le s \le l_1 + l_2. \tag{5}$$

Наглядное изображение представления T осуществляется с помощью так называемой схемы зацеплений, в которой зацепляющиеся неприводимые компоненты соединены чертой. При этом спиновый блок C^s состоит из элементов $c^s_{\tau\tau'}$, отличных от нуля только для зацепляющихся представлений τ — τ'.

Обязательными требованиями, предъявляемыми к РВУ (1), помимо релятивистской инвариантности являются инвариантность относительно операции пространственного отражения и возможность лагранжевой формулировки. При построении лагранжиана теории

$$L = -\bar{\psi}\left(\Gamma_\mu \partial_\mu + m\right)\psi \tag{6}$$

используется лоренц-инвариантная билинейная форма

$$\bar{\psi}\psi = \psi^+ \eta \psi, \tag{7}$$

где η – матрица билинейной формы, имеющая в каноническом базисе аналогичную (2) структуру

$$\eta = \oplus\sum_s \eta^s \otimes I_{2s+1}. \tag{8}$$

В блоках η^s отличными от нуля являются лишь элементы $\eta^s_{\tau\dot{\tau}}$, причем

$$\eta^s_{\tau\dot{\tau}} = \eta^s_{\dot{\tau}\tau} = -\eta^{s+1}_{\tau\dot{\tau}}. \tag{9}$$

Матрицу η можно нормировать так, что в блоках η^s будут встречаться только числа ± 1.

Конкретные ограничения, накладываемые на числа $c^{s}_{\tau\tau'}$ и $\eta^{s}_{\tau\dot{\tau}}$ требованиями P-инвариантности и лагранжевой формулировки РВУ (1), можно найти, например, в [3].

РВУ для частицы со спином *s* = 1/2 и тремя массами

Для построения заявленного РВУ рассмотрим схему зацеплений

$$\begin{array}{ccc} \left(0,\frac{1}{2}\right)' & — & \left(\frac{1}{2},0\right)' \\ | & & | \\ \left(\frac{1}{2},1\right) & — & \left(1,\frac{1}{2}\right) \\ | & & | \\ \left(0,\frac{1}{2}\right) & — & \left(\frac{1}{2},0\right), \end{array} \tag{10}$$

где знак «штрих» введен для различения кратных представлений $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$. Матрица Γ_4, соответствующая схеме (10), содержит спиновые блоки $C^{1/2}$, $C^{3/2}$:

$$\Gamma_4 = \left(C^{1/2} \otimes I_2\right) \oplus \left(C^{3/2} \otimes I_4\right). \tag{11}$$

Для удобства записи общих выражений блоков $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ используем следующую нумерацию неприводимых компонент, содержащихся в (10):

$$\begin{gathered} \left(0,\frac{1}{2}\right) \sim 1, \quad \left(\frac{1}{2},0\right) \sim 2, \quad \left(0,\frac{1}{2}\right)' \sim 3, \\ \left(\frac{1}{2},0\right)' \sim 4, \quad \left(\frac{1}{2},1\right) \sim 5, \quad \left(1,\frac{1}{2}\right) \sim 6. \end{gathered} \tag{12}$$

Тогда блоки $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ в каноническом базисе принимают вид

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & c^{1/2}_{12} & 0 & 0 & c^{1/2}_{15} & 0 \\ c^{1/2}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & c^{1/2}_{26} \\ 0 & 0 & 0 & c^{1/2}_{34} & c^{1/2}_{35} & 0 \\ 0 & 0 & c^{1/2}_{43} & 0 & 0 & c^{1/2}_{46} \\ c^{1/2}_{51} & 0 & c^{1/2}_{53} & 0 & 0 & c^{1/2}_{56} \\ 0 & c^{1/2}_{62} & 0 & c^{1/2}_{64} & c^{1/2}_{65} & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & c^{3/2}_{56} \\ c^{3/2}_{65} & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Матрица η будет иметь в данном случае вид

$$\eta = \left(\eta^{1/2} \otimes I_2\right) \oplus \left(\eta^{3/2} \otimes I_4\right), \tag{14}$$

где

$$\eta^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & \eta^{1/2}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta^{1/2}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta^{1/2}_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta^{1/2}_{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta^{1/2}_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta^{1/2}_{56} & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & -\eta^{1/2}_{56} \\ -\eta^{1/2}_{56} & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Требование инвариантности теории относительно преобразований полной группы Лоренца приводит к соотношениям [3]

$$\begin{gathered}c_{12}^{1/2}=c_{21}^{1/2},\quad c_{34}^{1/2}=c_{43}^{1/2},\quad c_{15}^{1/2}=c_{26}^{1/2}\\ c_{35}^{1/2}=c_{46}^{1/2},\quad c_{62}^{1/2}=c_{51}^{1/2},\quad c_{64}^{1/2}=c_{53}^{1/2}.\end{gathered}\tag{16}$$

Поскольку нас интересует только спин $1/2$, необходимо положить

$$c_{56}^{3/2}=c_{65}^{3/2}=0,\tag{17}$$

откуда следует также, что

$$c_{56}^{1/2}=c_{65}^{1/2}=0.\tag{18}$$

Равенства (17) и (18) означают, что схема зацеплений (10) трансформируется к виду

$$\begin{array}{ccc}\left(0,\frac{1}{2}\right)' & - & \left(\frac{1}{2},0\right)'\\ | & & |\\ \left(\frac{1}{2},1\right) & & \left(1,\frac{1}{2}\right)\\ | & & |\\ \left(0,\frac{1}{2}\right) & - & \left(\frac{1}{2},0\right).\end{array}\tag{19}$$

Возможность получения РВУ (1) из лагранжиана (6) предполагает в рассматриваемом случае выполнение условий:

$$c_{12}^{1/2},\ c_{34}^{1/2}\ \text{– вещественные;}\tag{20}$$

$$c_{62}^{1/2}=\left(\eta_{56}^{1/2}/\eta_{12}^{1/2}\right)\left(\eta_{15}^{1/2}\right)^*,\quad c_{64}^{1/2}=\left(\eta_{56}^{1/2}/\eta_{34}^{1/2}\right)\left(\eta_{35}^{1/2}\right)^*.\tag{21}$$

Вводя для упрощения записи обозначения

$$c_{12}^{1/2}=c_1,\quad c_{34}^{1/2}=c_2,\quad c_{15}^{1/2}=c_3,\quad c_{35}^{1/2}=c_4,\tag{22}$$

$$\eta_{56}^{1/2}/\eta_{12}^{1/2}=f,\quad \eta_{56}^{1/2}/\eta_{34}^{1/2}=g\quad (f=\pm1,\ g=\pm1),\tag{23}$$

с учетом (16) – (21), получим для спиновых блоков $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ матрицы Γ_4 выражения

$$C^{1/2}=\begin{pmatrix}0 & c_1 & 0 & 0 & c_3 & 0\\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3\\ 0 & 0 & 0 & c_2 & c_4 & 0\\ 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_4\\ fc_3^* & 0 & gc_4^* & 0 & 0 & 0\\ 0 & fc_3^* & 0 & gc_4^* & 0 & 0\end{pmatrix},\quad C^{3/2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.\tag{24}$$

Характеристическое уравнение матрицы $C^{1/2}$ имеет вид

$$\begin{gathered}\lambda^6-\lambda^4\left(c_1^2+c_2^2+2f|c_3|^2+2g|c_4|^2\right)+\\ +\lambda^2\left(c_1^2c_2^2+|c_3|^4+|c_4|^4+2fc_2^2|c_3|^2+2gc_1^2|c_4|^2+2fg|c_3|^2|c_4|^2\right)-\\ -c_1^2|c_4|^4-c_2^2|c_3|^4-2fgc_1c_2|c_3|^2|c_4|^2=0.\end{gathered}\tag{25}$$

Уравнение (25) имеет в общем случае корни $\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2$, $\pm\lambda_3$. Квадраты этих корней $\mu_1 = \lambda_1^2$, $\mu_2 = \lambda_2^2$, $\mu_3 = \lambda_3^2$ являются решениями кубического уравнения

$$\mu^3 - a\mu^2 + b\mu - c = 0, \tag{26}$$

где для удобства использованы обозначения

$$a = c_1^2 + c_2^2 + 2f\left|c_3\right|^2 + 2g\left|c_4\right|^2, \tag{27}$$

$$b = c_1^2 c_2^2 + \left|c_3\right|^4 + \left|c_4\right|^4 + 2fc_2^2\left|c_3\right|^2 + 2gc_1^2\left|c_4\right|^2 + 2fg\left|c_3\right|^2\left|c_4\right|^2, \tag{28}$$

$$c = c_1^2\left|c_4\right|^4 + c_2^2\left|c_3\right|^4 + 2fgc_1c_2\left|c_3\right|^2\left|c_4\right|^2. \tag{29}$$

Корни μ_1, μ_2, μ_3 связаны с коэффициентами a, b, c соотношения

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = a, \tag{30}$$

$$\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 = b, \tag{31}$$

$$\mu_1\mu_2\mu_3 = c. \tag{32}$$

Не уменьшая общности, один из корней, например, μ_3, можно положить равным 1:

$$\mu_3 = 1. \tag{33}$$

Тогда соотношения (30) – (32) принимают вид

$$\mu_1 + \mu_2 = a - 1, \tag{34}$$

$$\mu_1\mu_2 + \mu_1 + \mu_2 = b, \tag{35}$$

$$\mu_1\mu_2 = c. \tag{36}$$

Из системы (34) вытекают квадратные уравнения

$$\begin{aligned} &\mu_1^2 - (a-1)\mu_1 + c = 0, \\ &\mu_2^2 - (a-1)\mu_2 + c = 0, \end{aligned} \tag{37}$$

из которых находим

$$\mu_1 = \frac{a-1}{2} + \sqrt{\frac{(a-1)^2}{4} - c}, \quad \mu_2 = \frac{a-1}{2} - \sqrt{\frac{(a-1)^2}{4} - c}. \tag{38}$$

Величины μ_1, μ_2 должны быть вещественными и положительными, причем

$$\mu_1 \neq \mu_2 \neq 1. \tag{39}$$

Из (37) вытекают условия, которым должны удовлетворять коэффициенты a, c:

$$c > 0, \tag{40}$$

$$\frac{(a-1)^2}{4} > c. \tag{41}$$

Кроме того, в силу (35) имеем

$$a + c - b = 1. \tag{42}$$

Таким образом, РВУ (1), основанное на схеме зацеплений (19), с матрицей Γ_4 (11), (24), где произвол в выборе параметров c_1, c_2, c_3, c_4 ограничен условиями (40) – (42), описывает микрообъект со спином $s = 1/2$ и тремя различными значениями массы

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{\mu_1}}, \quad m_2 = \frac{m}{\sqrt{\mu_2}}, \quad m_3 = m. \tag{43}$$

Обсудим выбор знаков величин f и g (23). Поскольку все корни $C^{1/2}$ по условию вещественны, матрица $C^{1/2}$ должна быть эрмитовской. Отсюда следует, что

$$f = g = 1. \tag{44}$$

Значения величин μ_1, μ_2 в (43), определяемые по формуле (38), зависят от значений коэффициентов *a*, *b*, *c*, которые, в свою очередь, выражаются через элементы c_1, c_2, c_3, c_4 спинового блока $C^{1/2}$ (24). Остающийся после наложения условий (39) – (42) произвол в выборе этих параметров позволяет получить различные (с точки зрения спектра масс) варианты теории.

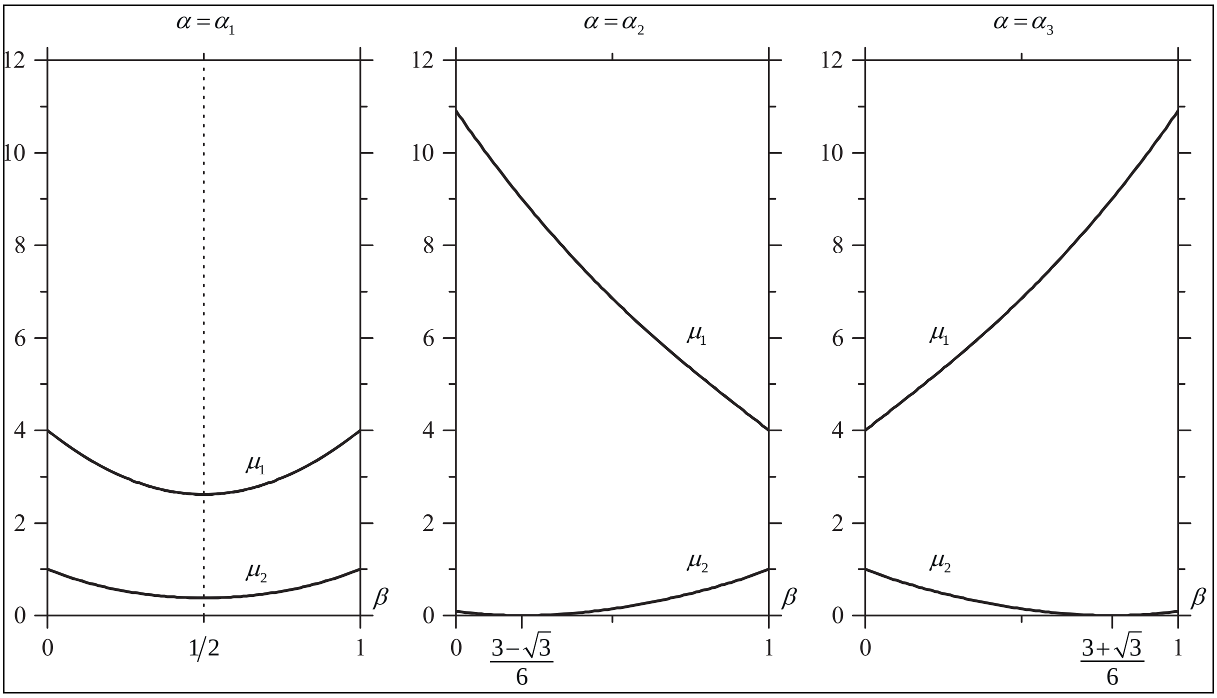

Рисунок. – Графики зависимости величин μ_1, μ_2 от параметра β

Рассмотрим более подробно имеющиеся возможности. Для этого вместо c_1, c_2, c_3, c_4 введем параметры *α*, *β* согласно определению

$$c_1 = 1+\alpha, \quad c_2 = 1-\alpha, \quad |c_3| = \sqrt{\beta}, \quad |c_4| = \sqrt{1-\beta} \quad (0<\beta<1). \tag{45}$$

Тогда имеем

$$a = 2\alpha^2 + 4, \quad b = \alpha^4 - 8\alpha\beta + 4\alpha + 4, \tag{46}$$

$$c = 4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2\beta + \alpha^2 - 4\alpha\beta + 2\alpha + 1. \tag{47}$$

Из условия (42) вытекает уравнение

$$\alpha\left[\alpha^3 - \alpha\left(4\beta^2 - 4\beta + 3\right) - 4\beta + 2\right] = 0. \tag{48}$$

Одно решение уравнения (48) вытекает сразу:

$$\alpha = 0, \quad \beta \in (0,1). \tag{49}$$

Остальные решения находятся из уравнения

$$\alpha^3 - \alpha\left(4\beta^2 - 4\beta + 3\right) - 4\beta + 2 = 0. \tag{50}$$

Рассматривая (50) как кубическое уравнение относительно *α* с параметром *β*, получим

$$\alpha_1 = -2\beta + 1, \quad \beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right); \tag{51}$$

$$\alpha_2 = \frac{2\beta - 1 - \sqrt{4\beta^2 - 4\beta + 9}}{2}, \quad \beta \in \left(0, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) \cup \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, 1\right); \tag{52}$$

$$\alpha_3 = \frac{2\beta - 1 + \sqrt{4\beta^2 - 4\beta + 9}}{2}, \quad \beta \in \left(0, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}, 1\right);. \tag{53}$$

Величины μ_1, μ_2 (38), соответствующие классам решений (49), (51), (52), (53) и определяющие спектр масс (43), принимают вид

$$\mu_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \mu_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad (\alpha = 0); \tag{54}$$

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= 4\beta^2 - 4\beta + \frac{5+\sqrt{16\beta^2 - 16\beta + 9}}{2} \\ \mu_2 &= 4\beta^2 - 4\beta + \frac{5-\sqrt{16\beta^2 - 16\beta + 9}}{2} \end{aligned}\right\} \quad (\alpha = \alpha_1), \tag{55}$$

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= 2\beta^2 - 2\beta - S\beta + \frac{S}{2} + 4 + \frac{3}{2}\sqrt{8\beta^2 - 8\beta - 4S\beta + 2S + 7} \\ \mu_2 &= 2\beta^2 - 2\beta - S\beta + \frac{S}{2} + 4 - \frac{3}{2}\sqrt{8\beta^2 - 8\beta - 4S\beta + 2S + 7} \end{aligned}\right\} \quad (\alpha = \alpha_2), \tag{56}$$

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= 2\beta^2 - 2\beta + S\beta - \frac{S}{2} + 4 + \frac{3}{2}\sqrt{8\beta^2 - 8\beta + 4S\beta - 2S + 7} \\ \mu_2 &= 2\beta^2 - 2\beta + S\beta - \frac{S}{2} + 4 - \frac{3}{2}\sqrt{8\beta^2 - 8\beta + 4S\beta - 2S + 7} \end{aligned}\right\} \quad (\alpha = \alpha_3), \tag{57}$$

где для упрощения записи введено обозначение

$$S = \sqrt{4\beta^2 - 4\beta + 9}. \tag{58}$$

Графики зависимостей (55) – (57) показаны на рисунке.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Feshbach, H. A wave equation for a particle of maximum spin one / H. Feshbach, W. Nichols // Annals of Physics. – 1958. – Vol. 4. – P. 448–458.
2. Гельфанд, И. М. Представления группы вращений и группы Лоренца / И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. – М. : Наука, 1958. – 368 с.
3. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 328 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 02.03.2017

Huhniuk M.L., Pletyukhov V.A. **Description of Neutrino Generations in Approach of the Relativistic Wave Equations Theory**

To date it is firmly established that all three known sorts of neutrinos possess finite masses. This fact points to a limited character of the Standard Model, in the context of which a neutrino is treated as a massless particle. Obviously, a description of a neutrino by means of the massless Dirac equation is either no longer adequate. In the present paper we propose a relativistic wave equation for a micro-object with spin 1/2 and three different mass values. In our opinion, this equation can be used for describing neutrino generations in frames of the classical field theory.