УДК 517.5

И.П. Черняк¹, Р.В. Товкач²¹студентка 2 курса математического факультета

Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки

²канд. физ.-мат. наук, доц. каф. дифференциальных уравнений и математической физики

Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки

(Луцк, Украина)

**ЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ
И ИХ НАСЫЩЕНИЯ**

Работа посвящена вопросам сходимости полиномов $U_n(f; x; \Lambda)$, которые определяются линейными методами суммирования для бесконечных треугольных матриц чисел. Получены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости полиномов $U_n(f; x; \Lambda)$ к $f(x)$ на классе C 2π -периодических непрерывных функций.

Равномерная сходимость полиномов $U_n(f; x; \Lambda)$ на классе 2π -периодических непрерывных функций

Пусть C – пространство 2π -периодических непрерывных функций, в котором норма задается с помощью равенства $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$; L – пространство 2π -периодических суммируемых на периоде функций, в котором задана норма $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$.

Введем класс функций

$$Lip\alpha = \{f \in C : |f(x+h) - f(x)| \leq h^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1\},$$

который называют классом Липшица порядка α ; очевидно, что, положив $\alpha = 1$, получим класс функций

$$Lip1 = \{f \in C : |f(x+h) - f(x)| \leq h\}.$$

Пусть

$$T_n = \left\{ \tau_n(t) : \tau_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad i = \overline{1, n} \right\} -$$

пространство тригонометрических полиномов степени, что не превышает n для C, L .

Как уже было отмечено, простым примером аппроксимирующих многочленов выступают частные суммы ряда Фурье, то есть тригонометрические полиномы вида

$$S_n[f; x] = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где a_k, b_k – коэффициенты Фурье функции f .

Однако в связи с тем, что существуют примеры функций, ряды Фурье которых сходятся к функции очень медленно или же вообще расходятся в пространстве C , возникает вопрос о нахождении последовательностей полиномов, которые были бы равномерно сходящимися к данной функции f на всем пространстве C .

Каждому такому способу соответствует последовательность операторов $U_n(f)$, что отображают C в его конечно-измеримое подпространство T_n тригонометрических полиномов $U_n(f; x)$ степени, что не превышает n .

Разумеется, что наилучшее приближение функции f пространства C будет осуществлять последовательность операторов $U_n^*(f)$, что ставит в соответствие каждой функции f полином ее наилучшего приближения, то есть многочлен, который удовлетворяет условию

$$\inf_{P_n \in T_n} \|f(x) - P_n(x)\|_C = \|f(x) - U_n^*(f; x)\|_C. \quad (1)$$

Однако операторы $U_n^*(f)$ в пространстве C не всегда являются линейными, что затрудняет их построение, а также исследование, поэтому часто рассматривают случай линейных операторов $U_n(f; x)$. Таким образом, широкий класс методов суммирования рядов Фурье можно получить, используя, например, так называемое матричное суммирование рядов Фурье, смысл которого заключается в следующем.

Рассмотрим пространство L . Пусть $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$, $n = 0, 1, \dots$, $k = 0, 1, \dots, n$, – произвольная бесконечная треугольная матрица чисел. Каждой функции $f \in L$, соответственно к ее разложению в ряд Фурье, поставим в соответствие полином $U_n(f; x; \Lambda)$ вида

$$U_n(f; x; \Lambda) = \frac{a_0}{2} \lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (2)$$

где $a_k = a_k(f)$ и $b_k = b_k(f)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, – коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Таким образом, всякая треугольная матрица Λ задает метод построения полиномов $U_n(f; x; \Lambda)$, или, другими словами, конкретную последовательность полиномиальных операторов $U_n(f; \Lambda)$, определенных на множестве L . В этом случае также говорят, что матрица Λ определяет конкретный метод (Λ -метод) суммирования рядов Фурье. Легко увидеть, что при каждом фиксированном n операторы $U_n(f; \Lambda)$ являются линейными. Поэтому Λ -методы называют линейными методами (процессами) суммирования рядов Фурье.

Подставляя в (2) значения коэффициентов a_k , b_k , получим

$$U_n(f; x; \Lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left(\frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos k(t+x) \right) dt \stackrel{df}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) U_n(t; \Lambda) dt. \quad (3)$$

Тригонометрический полином $U_n(t; \Lambda) = \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos k(x+t)$ называют ядром оператора (метода) $U_n(f; \Lambda)$.

Приведем примеры Λ -методов.

1. Если матрица Λ такова, что $\lambda_k^{(n)} \equiv 1$, то в этом случае, очевидно, полиномы $U_n(f; x; \Lambda)$ совпадают с частными суммами $S_n(f; x)$ порядка n ряда Фурье функции $f(x)$. Следуя принятой терминологии, такой метод называют методом частных сумм Фурье.

2. Метод средних арифметических (метод Фейера) определяется матрицей Λ , в которой $\lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Полиномы $U_n(f; x; \Lambda)$ для этого метода имеют вид

$$U_n(f; x; \Lambda) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f; x) \stackrel{df}{=} \sigma_n(f; x)$$

и называются суммами Фейера.

3. Если в матрице Λ положим

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{êî ääà } k = 0, 1, \dots, n-p, \\ 1 - \frac{k-n+p}{p+1}, & \text{êî ääà } k = n-p+1, \dots, n, \quad 0 \leq p \leq n, \end{cases}$$

то

$$U_n(f; x; \Lambda) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p}^n S_k(f; x) \stackrel{df}{=} V_{n-p}^n(f; x).$$

Такой метод называется методом Валле – Пуссена, а полиномы $V_{n-p+1}^n(f; x)$ – суммами Валле – Пусена. Если $p = 0$, то $V_{n-p}^n(f; x) = S_n(f; x)$; если же $p = n$, то

$$V_{n-p}^n(f; x) = V_0^n(f; x) = \sigma_{n+1}(f; x).$$

4. В случае, когда $\lambda_k^{(n)} = \cos \frac{k\pi}{2n}$, $k = 0, 1, \dots, n$, получаем метод Рогозинского.

При этом

$$U_n(f; x; \Lambda) = \frac{1}{2} \left[S_n \left(f; x + \frac{\pi}{2n} \right) + S_n \left(f; x - \frac{\pi}{2n} \right) \right] = R_n(f; x).$$

Многочлены $R_n(f; x)$ называют суммами Рогозинского.

5. Если же $\lambda_k^{(n)} = 1 - \left(\frac{k}{n} \right)^s$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $s > 0$, то

$$U_n(f; x; \Lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{n} \right)^s \right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = Z_n^{(s)}(f; x).$$

Полиномы $Z_n^{(s)}(f; x)$ называют суммами Зигмунда. При $s = 1$ суммы $Z_n^{(s)}(f; x)$ совпадают с суммами Фейера $\sigma_n(f; x)$.

Понятно, что аппроксимативные свойства полиномов $U_n(f; x; \Lambda)$ полностью определяются элементами $\lambda_k^{(n)}$ матрицы Λ . В связи с этим возникает вопрос: каким условиям должны удовлетворять числа $\lambda_k^{(n)}$, чтобы последовательности полиномов $U_n(f; x; \Lambda)$ равномерно сходились на всем пространстве C .

Если предположить, что полиномы $U_n(f; x; \Lambda)$ равномерно сходятся на всем пространстве C , то в таком случае они наверняка должны равномерно сходиться на пространстве T_m тригонометрических полиномов $P_m(x)$ порядка не выше m , т.е. для любого полинома $P_m(x) \in T_m$ равномерно по всем $x \in [-\pi; \pi]$ должно выполняться равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |U_n(P_m; x; \Lambda) - P_m(x)| = 0.$$

Но это, очевидно, возможно лишь тогда, когда для любого фиксированного $k = 0, 1, \dots, n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k^{(n)} = 1. \quad (4)$$

Это означает, что условие (4) является необходимым для равномерной сходимости полиномов $U_n(f; x; \Lambda)$ на всем пространстве C .

Далее, согласно классической теореме Вейерштрасса, любую функцию из C можно сколь угодно точно приблизить тригонометрическими полиномами. Другими словами, каким бы ни было $\varepsilon > 0$, для любой функции $f \in C$ можно указать такой тригонометрический полином $P_m^{(\varepsilon)}(f; x)$, что

$$\|f(x) - P_m^{(\varepsilon)}(f; x)\|_C < \varepsilon. \tag{5}$$

Следовательно, при любых Λ и n

$$\begin{aligned} \|f(x) - U_n(f; x; \Lambda)\|_C &\leq \|f(x) - P_m^{(\varepsilon)}(f; x)\|_C + \|P_m^{(\varepsilon)}(f; x)\|_C + \|P_m^{(\varepsilon)}(f; x) - U_n(f; x; \Lambda)\|_C \leq \\ &\leq \varepsilon + \|P_m^{(\varepsilon)}(f; x) - U_n(P_m^{(\varepsilon)}; x; \Lambda)\|_C + \|U_n(P_m^{(\varepsilon)} - f; x; \Lambda)\|_C. \end{aligned}$$

Но в силу (3) и (5)

$$\|U_n(P_m^{(\varepsilon)} - f; x; \Lambda)\|_C = \max_x \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [P_m^{(\varepsilon)}(t) - f(t)] U_n(x-t; \Lambda) dt \right| \leq \varepsilon \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |U_n(t; \Lambda)| dt.$$

Значит,

$$\|f(x) - U_n(f; x; \Lambda)\|_C \leq \varepsilon \left(1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |U_n(t; \Lambda)| dt \right) + \|P_m^{(\varepsilon)}(f; x) - U_n(P_m^{(\varepsilon)}; x; \Lambda)\|_C.$$

Отсюда заключаем, что последовательность $U_n(f; x; \Lambda)$ будет равномерно сходиться к $f(x)$ всякий раз, когда выполнено условие (4) и, кроме того, если последовательность чисел

$$L_n(\Lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |U_n(t; \Lambda)| dt,$$

называемых константами Лебега данного метода, является ограниченной:

$$L_n(\Lambda) = O(1), \quad n \rightarrow \infty \tag{6}$$

Таким образом, условия (4) и (6) являются достаточными для того, чтобы последовательность $U_n(f; x; \Lambda)$ равномерно сходилась для любой функции из C . Но для этого условия (4) и (6) являются также и необходимыми. Действительно, необходимость условия (4) мы уже доказали, а необходимость ограниченности констант Лебега следует, например, из известной теоремы Банаха:

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность линейных операторов $U_n(f)$, отображающих полное линейное нормированное пространство в свою часть, обладала свойством*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - U_n(f)\|_F = 0,$$

необходимо, чтобы, какой бы ни была функция $f \in F$, выполнялось условие

$$\sup_{\|f\| \leq 1} \|U_n(f)\|_F = O(1).$$

В рассматриваемом случае пространство C является полным и, очевидно,

$$\|U_n\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) U_n(t-x; \Lambda) dt \right\|_C = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |U_n(t)| dt = L_n(\Lambda).$$

Отсюда немедленно получаем необходимость условия (6). Следовательно, справедлива

Теорема 2. Для того чтобы последовательность полиномов $U_n(f; x; \Lambda)$ равномерно сходилась к $f(x)$ на всем классе C 2π -периодических непрерывных функций, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (4) и (6).

Насыщение линейных методов. Постановка задачи

К общим вопросам теории линейных методов суммирования рядов Фурье относится понятие насыщения линейного метода.

Если при некотором $k \in N$ выполняется соотношение

$$\|f(x) - U_n(f; x; \Lambda)\|_C = O\left(|1 - \lambda_k^{(n)}|\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (7)$$

то коэффициенты Фурье a_k и b_k функции $f(x)$ равны нулю. Действительно, поскольку

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - U_n(f; x; \Lambda)] e^{-ikx} dx = (1 - \lambda_k^{(n)})(a_k - ib_k), \quad (8)$$

то

$$|1 - \lambda_k^{(n)}| \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \leq 2 \|f(x) - U_n(f; x; \Lambda)\|_C$$

и, следовательно, (7) возможно лишь в случае $a_k = b_k = 0$. Отсюда следует, что если для данного метода $U_n(\Lambda)$ выполняется соотношение (7) для всех значений k , начиная с некоторого номера k_0 , то $f(x)$ является тригонометрическим полиномом степени, не выше $k_0 - 1$. В частности, если $k_0 = 1$, то $f(x)$ – некоторая постоянная. Следовательно, если $f(x)$ отлична от тождественной постоянной, то порядок стремления к нулю величины $\|f(x) - U_n(f; x; \Lambda)\|_C$ при $n \rightarrow \infty$ не может превышать максимального порядка убывания к нулю любой из разностей $1 - \lambda_k^{(n)}$, $k \in N$. Так, для сумм Фейера $1 - \lambda_k^{(n)} = k/n$, и значит, $\min_k (1 - \lambda_k^{(n)}) = n^{-1}$. Поэтому выполнение соотношения

$$\|f(x) - \sigma_n(f; x)\|_C = O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty,$$

возможно лишь в случае $f(x) \equiv \text{const}$. Другими словами, $\forall f \in C, f \neq \text{const}$, $\|f(x) - \sigma_n(f; x)\|_C > Kn^{-1}$, где K – некоторая не зависящая от n величина.

Аналогично заключаем, что в случае приближения суммами Зигмунда

$$\|f(x) - Z_n^{(s)}(f; x)\|_C > Kn^{-s}, \quad f \neq \text{const},$$

в случае приближения суммами Рогозинского –

$$\|f(x) - R_n(f; x)\|_C > Kn^{-2}, \quad f \neq \text{const}.$$

Для частных сумм Фурье $1 - \lambda_k^{(n)} = 0$. Поэтому из равенства (7) никаких ограничений на величину $\|f(x) - S_n(f; x)\|_C$ по существу не следует. Что же касается сумм Валле – Пуссена, то все зависит от выбора чисел p .

Таким образом, для сумм Фейера, Рогозинского, Зигмунда и ряда других линейных методов можно указать функцию $\varphi_\Lambda(n)$ такую, что приближения, доставляемые данным методом, не могут убывать быстрее, чем $\varphi_\Lambda(n)$.

В связи с этим в теории линейных методов суммирования рядов Фурье возникла т.н. задача о насыщении, заключающаяся в том, чтобы для конкретного Λ -метода по свойствам элементов матрицы Λ сделать вывод о существовании такой функции

$\varphi_\Lambda(n)$, определить ее и описать класс функций, на котором порядки приближений данным методом совпадают с $\varphi_\Lambda(n)$.

Приведем основное определение. Пусть L_p , $p \geq 1$, – пространство 2π -периодических функций $\varphi(\cdot)$ с конечной нормой $\|\varphi\|_p$, где при $p \in [1, \infty)$

$$\|\varphi\|_{L_p} = \|\varphi\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad (9)$$

при $p = \infty$ $\|\varphi\|_\infty = \text{ess sup} |\varphi(t)|$, т.о. $L_1 = L$. Как и выше, через C будем обозначать множество 2π -периодических непрерывных функций $\varphi(t)$ с нормой $\|\varphi(t)\|_C = \max |\varphi(t)|$.

Определение. Пусть X – одно из пространств C или L_p , $p \in [1, \infty)$, и $U_n(\Lambda)$ – линейный метод суммирования рядов Фурье, порождающий полиномы $U_n(f; x; \Lambda)$ вида (2). Если существует положительная, монотонно убывающая к нулю функция $\varphi_\Lambda(n)$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что из соотношения

$$\|f(x) - U_n(f; x; \Lambda)\|_X = O(\varphi_\Lambda(n)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (10)$$

следует, что $f(x) \equiv \text{const}$ при $X = C$ и $f(x) = \text{const}$ почти всюду при $X = L_p$, и найдется хотя бы одна функция $f(x)$, отличная от постоянной, для которой

$$\|f(x) - U_n(f; x; \Lambda)\|_X = O(\varphi_\Lambda(n)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (11)$$

то говорят, что метод $U_n(\Lambda)$ является насыщенным в пространстве X . Множество функций $\Phi(\Lambda)_X$, для которых выполняется соотношение (11), называется классом насыщения, а функция $\varphi_\Lambda(n)$ – порядком насыщения метода $U_n(\Lambda)$.

С учетом этого определения задача о насыщении конкретного метода $U_n(\Lambda)$ заключается, прежде всего, в выяснении вопроса, является ли он насыщенным в данном пространстве X , и если он насыщен, то каков порядок и класс его насыщения?

Отметим, что исследованию асимптотических свойств различных линейных методов суммирования рядов Фурье и их насыщения посвящено множество работ, например, работы А.Н. Колмогорова [3], С.М. Никольского [4], А.И. Степанца [5], С.А. Теляковского [6] и др.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корнейчук, Н. П. Об экстремальных свойствах периодических функций / Н. П. Корнейчук // Докл. АН УССР. – 1962. – № 8. – С. 993–998.
2. Степанец, А. И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Линейные методы / А. И. Степанец. – Киев : Наук. думка, 1981. – 340 с.
3. Kolmogoroff, A. Zur GrJossenordnung des Restliedes Fouriershen Reihen differenzierbaren Functionen / A. Kolmogoroff // Ann. Math. – 1935. – 36. – S. 521–526.
4. Никольский, С. М. О линейных методах суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1948. – 12, № 3. – С. 191–193.
5. Степанец, А. И. Методы теории приближения / А. И. Степанец. – Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
6. Теляковский, С. А. Приближение дифференцируемых функций частными суммами их рядов Фурье / С. А. Теляковский // Мат. заметки. – 1968. – 4, № 3. – С. 291–300.

7. Zhyhallo, K. M. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals / K. M. Zhyhallo, Yu. I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – 54, № 9. – P. 1462–1470.

8. Zhyhallo, K. M., Kharkevych Yu. I. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals / K. M. Zhyhallo, Yu. I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – 54, № 1. – P. 51–63.

9. Kharkevych, Yu. I. Approximation of (ψ, β) -differentiable functions by Weierstrass integrals / Yu. I. Kharkevych, I. V. Kal'chuk // Ukr. Math. Journal. – 2007. – 59, № 7. – P. 1059–1087.

10. Zhyhallo, K. M. Approximation of (ψ, β) -differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals / K. M. Zhyhallo, Yu. I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2011. – 53, № 12. – P. 1607–1629.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 01.04.2015

Chernyak I.P., Tovkach R.V. Linear Methods of Summation of Fourier's Series and their Saturation

Work focuses to the questions of convergence of the polynomials $U_n(f; x; \Lambda)$, which determined by linear summation methods for infinite triangular matrices of numbers. Necessary and sufficient conditions for uniform convergence of polynomials $U_n(f; x; \Lambda)$ to function $f(x)$ on the class C 2π -continuous periodic functions are obtained.