УДК 512.535

Т.В. Волошина

канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры и математического анализа Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки (Луцк, Украина)

ТОЧНЫЕ ПОДСТАНОВОЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛУГРУППЫ ЧАСТИЧНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КОНЕЧНОМЕРНОГО ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

В работе рассматривается инверсная полугруппа частичных линейных отображений конечномерного векторного просторанства. Описаны все ее точные представления частичными подстановками на множестве правых ω -классов по замкнутым инверсным подполугруппам.

Введение

Пусть V – конечномерное векторное пространство. Множество всех линейных взаимно однозначных отображений вида $s: W_1 \to W_2$, где W_1, W_2 – его подпространства одинаковой размерности, образует инверсную полугруппу относительно операции композиции. Будем называть ее *полугруппой частичных линейных отображений векторного пространства* V и обозначать $PGL(V)$. Заметим, что в этой полугруппе содержится подгруппа $GL(V)$ всех невырожденных линейных операторов векторного пространства.

На множестве элементов инверсной полугруппы S *естественный частичный порядок* ω задается следующим образом [1; 2]: $a\omega b$ в том и только в том случае, когда выполняется равенство $aa^{-1} = ab^{-1}$, равносильное равенству $a^{-1}a = a^{-1}b$. *Замыканием* $H\omega$ *множества* $H \subseteq S$ называется множество $H\omega := \{h \in S : \exists t \in H\ t\omega h\}$. Если $H\omega = H$, то H называют *замкнутым*.

Областью определения произвольного идемпотента полугруппы $PGL(V)$ является некоторое подпространство векторного пространства V. Естественный частичный порядок ω на множестве идемпотентов полугруппы $PGL(V)$ совпадает с отношением включения на соотвествующем множестве областей определения идемпотентов. Поскольку каждая убывающая цепочка $W_1 \supset W_2 \supset ... \supset W_k$ подпространств n-мерного векторного пространства V содержит не более $(n+1)$-ого элемента, каждая убывающая цепочка идемпотентов полугруппы $PGL(V)$ также содержит конечное число элементов. Каждая замкнутая инверсная подполугруппа инверсной полугруппы $PGL(V)$ содержит наименьший идемпотент.

Подстановочным представлением на множестве X инверсной полугруппы S называется произвольный ее гомоморфизм в симметрическую инверсную полугруппу $IS(X)$. Для элемента $a \in S$ через $dom\,a$ и $ran\,a$ обозначим соответственно область определения и область значений a как частичной подстановки. Представление называется *точным*, если оно инъективно. Для каждой инверсной полугруппы Вагнер [3] и Престон [4] построили точное представление частичными подстановками множества ее элементов. Этот факт является аналогом теоремы Кэли в теории групп.

Пусть $\varphi_i : S \to IS(X_i)$, $i \in I$ – семейство представлений полугруппы S и множества X_i попарно не пересекаются. *Прямой сумой представлений* φ_i называется представление $\varphi : S \to IS(X)$, где $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, и $\varphi(s)|_{X_i} = \varphi_i(s)$ для каждого $i \in I$. Два представления $\varphi: S \to IS(X)$ и $\psi: S \to IS(Y)$ называются *эквивалентными*, если существует такое взаимно однозначное отображение θ множества X на Y, что для $x, x' \in X$ и $s \in S$ равенство $x^{\varphi(s)} = x'$ выполняется в том и только в том случае, когда $\left(\theta(x)\right)^{\psi(s)} = \theta(x')$. Представление $\varphi: S \to IS(X)$ инверсной полугруппы S называют *транзитивным*, если для каждой пары элементов $x_1, x_2 \in X$ существует такая частичная подстановка $h \in \varphi(S)$ множества X, что $h(x_1) = x_2$, и *эффективным*, если $\bigcup\limits_{x \in \varphi(S)} dom\, x = X$.

Мы в работе ограничимся рассмотрением только транзитивных представлений, поскольку каждое эффективное представление разлагается в прямую сумму транзитивных [5]. В 1962 г. Шайном [6] было доказано, что каждое эффективное транзитивное представление инверсной полугруппы S эквивалентно представлению, построенному следующим образом. Для замкнутой инверсной подполугруппы H инверсной полугруппы S рассмотрим частичную правую конгруэнцию $\pi_H = \{(s,t) \in S \times S \mid st^{-1} \in H\}$ на множестве S. Классами эквивалентности этого отношения являются множества $(Hs)\omega$, где $ss^{-1} \in H$, в частности H – единственный π_H-класс, содержащий идемпотенты. Очевидно, $s \in (Hs)\omega$ [1]. На множестве X классов эквивалентности конгруэнции π_H действие $\varphi_H(S)$ определяется правилом: для $x \in X$ и $s \in S$ $x^{\varphi_H(s)} = (xs)\omega$. Классы эквивалентности конгруэнции π_H на S будем называть *правыми ω-классами по замкнутой инверсной подполугруппе H*. Эти множества являются обобщением понятия правых смежных классов группы по подгруппе для случая инверсной полугруппы. Представление $\varphi_H : S \to IS(X)$ будем называть *представлением полугруппы S на правых ω-классах по замкнутой инверсной подполугруппе H*. Область определения конгруэнции π_H будем обозначать $D_H = \left\{ s \in S \,\middle|\, ss^{-1} \in H \right\}$.

Постановка задачи

Описание всех точных представлений для произвольной инверсной полугруппы – еще нерешенная задача. Представление Вагнера – Престона в общем случае нетранзитивно. С другой стороны, каждое транзитивное представление инверсной полугруппы с точностью до эквивалентности определяется некоторой замкнутой инверсной подполугруппой. В нашей работе описаны все точные транзитивные подстановочные представления полугруппы $PGL(V)$ частичных линейных отображений конечномерного векторного пространства в терминах ее замкнутых инверсных подполугрупп, а также их представлений.

Вспомогательные результаты

Теорема 1 [7]. Для каждого подпространства W конечномерного векторного пространства V и каждой погруппы $G \le GL(W)$ множество $\{s \in PGL(V) \mid s|_W \in G\}$ является замкнутой инверсной подполугруппой полугруппы $PGL(V)$. Каждая замкнутая инверсная подполугруппа полугруппы $PGL(V)$ имеет такой вид.

Шайн [6] показал, что представления φ_{K_1} и φ_{K_2} инверсной полугруппы S на множестве правых ω-классов по замкнутым инверсным подполугруппам K_1 и K_2 будут эквивалентными (а подполугруппы K_1 и K_2 – сопряженными) тогда и только тогда, когда существует такой элемент $a \in S$, что $aa^{-1} \in K_1$, $a^{-1}a \in K_2$ и $a^{-1}K_1 a \subseteq K_2$, $aK_2 a^{-1} \subseteq K_1$.

Теорема 2 [7]. Представления инверсной полугруппы $PGL(V)$ на множестве правых ω-классов по замкнутым инверсным подполугруппам $H_1 = \{s \in PGL(V) \mid s|_{W_1} \in G_1\}$ и $H_2 = \{s \in PGL(V) \mid s|_{W_2} \in G_2\}$, где $G_1 \le GL(W_1)$, $G_2 \le GL(W_2)$, будут эквивалентными тогда и только тогда, когда существуют такой линейный изоморфизм $\tau : W_1 \to W_2$ и изоморфизм $\psi : G_1 \to G_2$, для которых равенство $\tau(a^{g_1}) = (\tau(a))^{\psi(g_1)}$ выполняется для всех $g_1 \in G_1$, $a \in W_1$.

Основной результат

Одномерные подпространства векторного пространства V и только они не содержат нетривиальных подпространств. Поэтому множество примитивных идемпотентов инверсной полугруппы $PGL(V)$ совпадает с множеством тех идемпотентов, областью определения которых является одномерное подпространство векторного пространства V.

Теорема 3. Представление φ_H полугруппы $PGL(V)$ по замкнутой инверсной подполугруппе $H = \{s \in PGL(V) \mid s|_W \in G\}$, где $G \le GL(W)$, является точным тогда и только тогда, когда подпространство W – одномерно, а группа G состоит из одного элемента. Все точные эффективные транзитивные представления полугруппы $PGL(V)$ – эквивалентны.

Доказательство. Предположим сначала, что представление φ_H инверсной полугруппы $PGL(V)$ на множестве правых ω-классов по замкнутой инверсной подполугруппе $H = \{s \in PGL(V) \mid s|_W \in G\}$, где $G \le GL(W)$, является точным. Поскольку каждая убывающая цепочка идемпотентов из $PGL(V)$ содержит конечное число элементов, каждая замкнутая инверсная подполугруппа инверсной полугруппы $PGL(V)$ в силу леммы 2 из [8] содержит наименьший идемпотент. По теореме 1 из [8] наименьший идемпотент e_H подполугруппы H является примитивным идемпотентом инверсной полугруппы $PGL(V)$. Областью определения такого идемпотента является одномерное подпространство W векторного пространства V. Группа $GL(W)$ при этом совпадает с множеством всех линейных отображений $s : W \to W$, заданных правилом $s(a) = \lambda a$, $a \in W$, где $\lambda \in P \setminus \{0\}$, и поэтому изоморфна мультипликативной группе поля P.

Пусть $\lambda \in P \setminus \{0\}$ такая, что отображение $s : W \to W$, заданное $s(a) = \lambda a$ для $a \in W$, содержится в подгруппе $G \le GL(W)$.

Рассмотрим произвольный правый ω-класс $(Hs)\omega$ инверсной полугруппы $PGL(V)$ по замкнутой инверсной подполугруппе H и произвольный $t \in PGL(V)$. Элемент s можно выбрать так, чтобы выполнялось равенство $ss^{-1} = e_H$. При этом

$$dom\, s = dom\,(ss^{-1}) = dom\, e_H = W.$$

Пусть τ_λ – отображение $a \mapsto \lambda a$, $a \in V$. Тогда выполняется равенство $st(\tau_\lambda \tau_\lambda^{-1})t^{-1}s^{-1} = stt^{-1}s^{-1}$. Отсюда $(Hst)\omega \ne \varnothing \Leftrightarrow stt^{-1}s^{-1} \in H \Leftrightarrow st(\tau_\lambda \tau_\lambda^{-1})t^{-1}s^{-1} \in H \Leftrightarrow (Hs(t\tau_\lambda))\omega \ne \varnothing$. Если идемпотент $stt^{-1}s^{-1} \in H$, то для каждого $a \in W$ выполняется равенство $a^{stt^{-1}s^{-1}} = a$. Поэтому для каждого $a \in W$

$a^{st\tau_\lambda t^{-1}s^{-1}} = ((a^{st})^{\tau_\lambda})^{t^{-1}s^{-1}} = (\lambda a^{st})^{t^{-1}s^{-1}} = \lambda a^{stt^{-1}s^{-1}} = \lambda a$.

Следовательно $st\tau_\lambda t^{-1}s^{-1}|_W \in G$ и $st\tau_\lambda t^{-1}s^{-1} \in H$. Отсюда вытекает равенство $(Hst\tau_\lambda)\omega = (Hst)\omega$. Таким образом, $((Hs)\omega)^{\varphi_H(t)} = ((Hs)\omega)^{\varphi_H(t\tau_\lambda)}$. Поскольку правый ω-класс $(Hs)\omega$ выбран произвольно, $\varphi_H(t) = \varphi_H(t\tau_\lambda)$. Из точности представления φ_H следует, что $t = t\tau_\lambda$. Элемент $t \in PGL(V)$ также выбран произвольно. Поэтому из равенства $t = t\tau_\lambda$ вытекает, что $\lambda = 1$. Таким образом, група G – единичная, содержит тождественное отображение подпространства W.

По теореме 2, все точные эффективные транзитивные представления инверсной полугруппы $PGL(V)$ – эквивалентны.

Пускай теперь $H = \{s \in PGL(V) \mid s|_W \in G\}$ и подпространство W – одномерно. Докажем, что представление φ_H – точное.

Выберем в подпространстве W произвольный элемент $a \in W$ и зафиксируем его. Тогда

$$W = \{\lambda a \mid \lambda \in P\}.$$

Построим взаимно однозначное соотвествие θ между множеством X правых ω-классов инверсной полугруппы $PGL(V)$ по замкнутой инверсной подполугруппе H и множеством векторов векторного пространства V. Для каждого правого ω-класса $(Hs)\omega$ положим $\theta((Hs)\omega) = s(a) \in V$. Рассмотрим такие $s_1, s_2 \in D_H$, что $s_1(a) \neq s_2(a)$. Тогда $a^{s_1 s_2^{-1}} \neq a$. Отсюда $s_1 s_2^{-1} \notin H$, что равносильно $(Hs_1)\omega \neq (Hs_2)\omega$. Следовательно, θ – задано корректно.

Пусть $(Hs_1)\omega, (Hs_2)\omega$ – разные правые ω-классы. Предположим, что $s_1(a) = s_2(a)$. Тогда $a^{s_1 s_2^{-1}} = s_2^{-1}(s_1(a)) = s_2^{-1}(s_2(a)) = a$ и $(\lambda a)^{s_1 s_2^{-1}} = \lambda a^{s_1 s_2^{-1}} = \lambda a$, $\lambda \in P$. Следовательно, $s_1 s_2^{-1}|_W = 1$ и поэтому $s_1 s_2^{-1} \in H$, что в свою очередь равносильно равенству $(Hs_1)\omega = (Hs_2)\omega$, а это противоречит выбору $(Hs_1)\omega, (Hs_2)\omega$. Образы разных правых ω-классов при отображении θ разные, поэтому θ – инъективно.

Рассмотрим теперь произвольный вектор $v \in V$. Для него существует такое $s \in PGL(V)$, что $s(a) = v$. Тогда $s(\lambda a) = \lambda s(a) = \lambda v$, $\lambda \in P$. Следовательно, $W \subseteq dom\, s = dom\,(ss^{-1})$. Поэтому $e_H\, \omega\, ss^{-1}$. Поскольку H – замкнута, $ss^{-1} \in H$. Отсюда имеем $(Hs)\omega \neq \varnothing$. При этом $\theta((Hs)\omega) = s(a) = v$, что доказывает сюръективность отображения θ. Следовательно, $\theta : X \to V$ – биекция.

Пусть $t_1, t_2 \in PGL(V)$ такие, что $\varphi_H(t_1)$ и $\varphi_H(t_2)$ одинаково действуют на множестве правых ω-классов по H. Докажем, что $t_1(v) = t_2(v)$, для всех $v \in V$.

Пусть $v \in V$ – такой, что $t_1(v) \neq \varnothing$ и $\theta^{-1}(v) = (Hs)\omega$. Тогда $t_1(v) = t_1(s(a)) = a^{st_1} \neq \varnothing$ и $\theta^{-1}(t_1(v)) = \theta^{-1}(a^{st_1}) = (Hst_1)\omega \neq \varnothing$. Поскольку $\varphi_H(t_1)$ и $\varphi_H(t_2)$ одинаково действуют на множестве правых ω-классов по H и выполняется равенство $((Hs)\omega)^{\varphi_H(t_1)} = (Hst_1)\omega \neq \varnothing$, то

$$(Hst_2)\omega = ((Hs)\omega)^{\varphi_H(t_2)} = ((Hs)\omega)^{\varphi_H(t_1)} = (Hst_1)\omega.$$

Отсюда $t_2(v) = t_2(s(a)) = a^{st_2} = \theta((Hst_2)\omega) = \theta((Hst_1)\omega) = a^{st_1} = t_1(v)$. Таким образом, из условия $t_1(v) \neq \varnothing$ вытекает равенство $t_1(v) = t_2(v)$. Поскольку $t_1(v) = t_2(v)$, для всех $v \in V$, то $t_1 = t_2$ и представление φ_H – точное.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клиффорд, А. Алгебраическая теория полугрупп : в 2 т. / А. Клиффорд, Г. Престон. – М. : Мир, 1972. – Т. 1, 2. – 672 с.
2. Артамонов, В. А. Общая алгебра : в 2 т. / В. А. Артамонов [и др.]. – М. : Наука, 1991. – Т. 2. – 395 с.
3. Вагнер, В. В. Обобщенные группы / В. В. Вагнер // Доклады АН СССР. – 1952. – № 84. – С. 1119–1122.
4. Preston, G. B. Representations of inverse semigroups / G. B. Preston // J. London Math. Soc. – 1954. – № 29. – P. 411–419.
5. Понизовский, И. С. О представлениях инверсных полугрупп частичными взаимно однозначными преобразованиями / И. С. Понизовский // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1964. – Т. 28:5. – С. 989–1002.
6. Шайн, Б. М. Представление обобщенных групп / Б. М. Шайн // Изв. вузов. Матем. – 1962. – № 3. – С. 164–176.
7. Волошина, Т. В. Подстановочные представления полугруппы частичных линейных отображений конечномерного векторного пространства / Т. В. Волошина // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : материалы науч.-практ. конф., Брест, 2015, 22–24 апр.
8. Волошина, Т. В. О точных представлениях инверсных полугрупп / Т. В. Волошина // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фіз. Матэм. – 2012. – № 1. – С. 50–55.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 10.09.2015

***Voloshyna T.V.* Exact Representations of Semigroup of Partial Linear Transformations of a Finite-dimensional Vector Space by Partial Permutations**

In paper inverse semigroup of partial linear transformations of a finite-dimensional vector space is considered. All exact representations of this semigroup by partial permutations on a set of right ω -classes of the closed inverse subsemigroups are described.