УДК 519.63

В.М. Волков[1], Ю.В. Буяльская[2]

[1]д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета

[2]аспирант кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета

О СПЕКТРАЛЬНЫХ МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА ВСТРЕЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрен спектральный метод Чебышева для модельной задачи встречного взаимодействия оптических волн в среде с кубической нелинейностью. Продемонстрированы существенные преимущества спектрального метода по сравнению с методами сплайн-коллокации 4-5-го порядков. Предложен консервативный итерационный алгоритм реализации спектральной модели, обеспечивающий более высокую скорость сходимости по сравнению с методом Ньютона в условиях сильной связи взаимодействующих волн.

Введение

Интерес к развитию методов численного моделирования эффектов встречного взаимодействия оптических волн в нелинейных средах обусловлен прежде всего тем, что схема встречного взаимодействия является типичной для большинства типов лазеров и оптических усилителей. В зависимости от конкретной ситуации и выбора соответствующего приближения задачи данного класса могут приводить как к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений [1; 2], так и к системам дифференциальных уравнений в частных производных [3]. И в первом и во втором случаях для исчерпывающего анализа задачи требуется привлечение численных методик. Для решения данного класса краевых задач используются различные подходы, основанные на методах конечных разностей [3] коллокации [4], методе стрельбы [5] и др. В последние годы большие успехи получены в использовании спектральных методов применительно к задачам численного моделирования оптоволоконных усилителей [6; 7]. Одна из проблем в использовании спектральных методов решения нелинейных краевых задач связана реализацией такого рода дискретных моделей, представляющих собой системы нелинейных алгебраических уравнений. Для этих целей используют, как правило, итерационный метод Ньютона, который при надлежащем выборе начального приближения обеспечивает высокую скорость сходимости итераций. В данной работе предлагается альтернативная итерационная методика реализации спектральных моделей, обеспечивающая высокую эффективность вне зависимости от выбора начального приближения. На примере модельной задачи показано, что при использовании предлагаемой методики достигается уменьшение числа итераций в 2–3 раза по сравнению с методом Ньютона. Показано также, что спектральный метод на основе полиномов Чебышева на порядок превосходит в эффективности стандартные средства численного анализа двухточечных краевых задач, предлагаемых современными математическими пакетами, например, Matlab.

Постановка задачи

Математическая модель встречного взаимодействия оптических волн в нелинейных средах в простейшем случае представляет собой краевую задачу для двух обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию нормированных комплексных огибающих амплитуды поля волн $E_{\pm} = E_{\pm}(z)$, распространяющихся в прямом и противоположном направлении координатной оси z:

$$\frac{dE_{\pm}}{dz} = G_{\pm}\left(E_{\pm}, E_{\mp}\right),\ -1 < z < 1, \qquad (1)$$

$$E_{+}(-1) = E_{p}, \quad E_{-}(1) = E_{m}. \qquad (2)$$

Функция $G_{\pm}\left(E_{\pm}, E_{\mp}\right)$ определяется механизмами взаимодействия волн. Для описания эффекта вынужденного комбинационного рассеяния функция нелинейного взаимодействия имеет вид

$$G_{\pm}\left(E_{\pm}, E_{\mp}\right) = -\gamma\left|E_{\mp}\right|^{2} E_{\pm}, \qquad (3)$$

где постоянная γ характеризует интенсивность энергетического обмена взаимодействующих волн.

Для задачи (1)−(3) имеет место закон сохранения

$$\frac{d}{dz}\left|E_{+}\right|^{2} - \left|E_{-}\right|^{2} = 0. \qquad (4)$$

Аналогичным инвариантом обладает и задача о распространении волн в средах с периодической модуляцией коэффициента преломления [7, с. 144], для которой функции $G_{\pm}\left(E_{\pm}, E_{\mp}\right)$ имеет вид:

$$G_{\pm}\left(E_{\pm}, E_{\mp}\right) = \mp i\kappa \exp\left(\pm i2\Delta z\right) E_{\mp}, \qquad (5)$$

где действительные постоянные κ и Δ характеризуют амплитуду и отстройку периода модуляции коэффициента преломления среды от длины волны.

Спектральный метод Чебышева

В основе спектральных методов лежит представление искомого решения дифференциальной задачи в виде линейной комбинации некоторых базисных функций, в качестве которых традиционно выступают системы ортогональных алгебраических или тригонометрических полиномов. Для алгебраических полиномов наиболее удобно интерполяционное представление вида

$$f(z) \cong \sum_{n=0}^{N-1} f_n \varphi_n(z), \qquad (6)$$

где значения коэффициентов f_n в узлах сетки z_n, $n = 0,1,\ldots,N-1$, совпадает с интерполируемой функцией, $f(z_n) = f_n$, а базисные функции удовлетворяю условию $\varphi_n(z_m) = \delta_{nm}$. В этом случае удается достаточно компактно выразить производные интерполируемой функции в узлах сетки:

$$\frac{d^k}{dz^k} f(z_m) \cong \sum_{n=0}^{N-1} f_n \frac{d^k}{dz^k}\varphi_n(z_m),\ m = 0,1,\ldots,N-1. \qquad (7)$$

Выражение (7) для приближенного вычисления производных сеточной функции $f(z_m)$ представляет собой не что иное, как произведение некоторой матрицы $D \in R^{N\times N}$ (спектральной матрицы дифференцирования) на заданный вектор $f \in R^N$:

$$f^{(k)} \cong D^{(k)} f,\ \ f = \left(f_0, f_1, \ldots, f_N\right)^T,\ d_{nm}^{(k)} = \frac{d^k}{dz^k}\varphi_m(z_n). \qquad (8)$$

Подробную информацию о вычислении спектральных матриц дифференцирования для различных базисных функций можно найти в работах [8; 9]. Мы использовали спектральную матрицу дифференцирования Чебышёва для системы узлов

$$z_j = \cos\frac{j\pi}{N-1},\ j = \overline{0, N-1}, \tag{9}$$

которые являются экстремумами полиномов Чебышева первого рода степени $N-1$: $T_{N-1}(z) \equiv \cos\left((N-1)\arccos(z)\right)$. Матрица спектрального дифференцирования Чебышева произвольной размерности для отрезка $z \in [-1, 1]$ может быть сгенерирована стандартными функциями Matlab.

Использование формализма матрицы спектрального дифференцирования позволяет весьма просто перейти от дифференциальной модели к спектральному аналогу путем замены неизвестных функций и их производных на соответствующие векторы и матрицы с учетом краевых условий задачи. В нашем случае спектральная модель приводит к системе алгебраических уравнений, которая может быть представлена в виде

$$A\mathbf{u} + \mathbf{g}(\mathbf{u}) = f, \tag{10}$$

где $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_+ \\ \mathbf{u}_- \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_\pm = \left(u_\pm(z_0), u_\pm(z_1), \ldots u_\pm(z_{N-1})\right)^T$, $u_\pm(z_n)$ – приближенные значения искомого решения в узлах сетки, $A = \begin{pmatrix} D_+ & 0 \\ 0 & D_- \end{pmatrix}$ – блочно-диагональная матрица размерности $2(N-1)\times 2(N-1)$, блоки которой строятся из спектральной матрицы дифференцирования с учетом краевых условий задачи, $g(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} G_+(\mathbf{u}) \\ G_-(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$ – вектор-функция размерности $2(N-1)$,описывающая нелинейную часть задачи. В случае линейной задачи, например (1), (2), (5), функции $G_\pm\left(E_\pm, E_\mp\right)$ могут быть учтены в виде соответствующих блоков матрицы A,

$$A = \begin{pmatrix} D_+ & G_+ \\ G_- & D_- \end{pmatrix},$$

$G_+ = \operatorname{diag}\left(0, g_1^+, \ldots g_{N-1}^+\right)$, $G_- = \operatorname{diag}\left(g_0^-, \ldots g_{N-2}^-, 0\right)$, $g_n^\pm = \pm i\kappa \exp\left(\pm i2\Delta z_n\right)$. Заметим, что первая и последняя строки матрицы A отвечают краевым условиям задачи, в связи с чем все компоненты данных строк, за исключением $a_{11} = a_{2(N-1),2(N-1)} = 1$, полагаются равными нулю. Первая и последняя компоненты вектор-функции $g(\mathbf{u})$ также полагаются равными нулю. В соответствие с краевыми условиями вектор правой части системы $f \in R^{2(N-1)}$ имеет вид

$$f = \left(E_p, 0, \ldots, 0, E_m\right). \tag{11}$$

Отметим, что в отличие от разностных методов [3] спектральная модель не обладает свойством консервативности. В частности, для нее не удается получить дискретного аналога закона сохранения (4), поскольку необходимое для этого свойство дифференцирования $(u\cdot g)' = u'\cdot g + u\cdot g'$ не выполняется в строгом смысле для формул спектрального дифференцирования. Тем не менее, для аналитических функций спектральные производные обладают весьма высокой точностью, что при достаточном разрешении сетки гарантируют в рамках спектральной модели соответствующую точность передачи всех качественных характеристик решения [10], включая и законы сохранения вида (4).

В качестве иллюстрации преимуществ спектрального метода (10) на рисунке 1 представлены результаты численных экспериментов по оценке эффективности данного подхода в сравнении со стандартными функциями Matlab для решения двухточечных краевых задач. В качестве тестового примера рассмотрена линейная задача (1), (2), (5) при значениях параметров: $\kappa = 1$, $\Delta = 10$, $E_p = 1$, $E_m = 0$. Погрешность приближенных решений оценивалась с использованием значения амплитуды отраженной волны $E_-(-1)$, для которого известно точное выражение [7, с. 146]:

$$\left|E_-(-1)\right| = \frac{\left|\mathrm{sh}(2\alpha)\right|}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(2\alpha - \chi^2)}},\ \alpha = \kappa^2 - \Delta^2,\ \chi = \frac{\Delta}{\kappa}. \qquad (12)$$

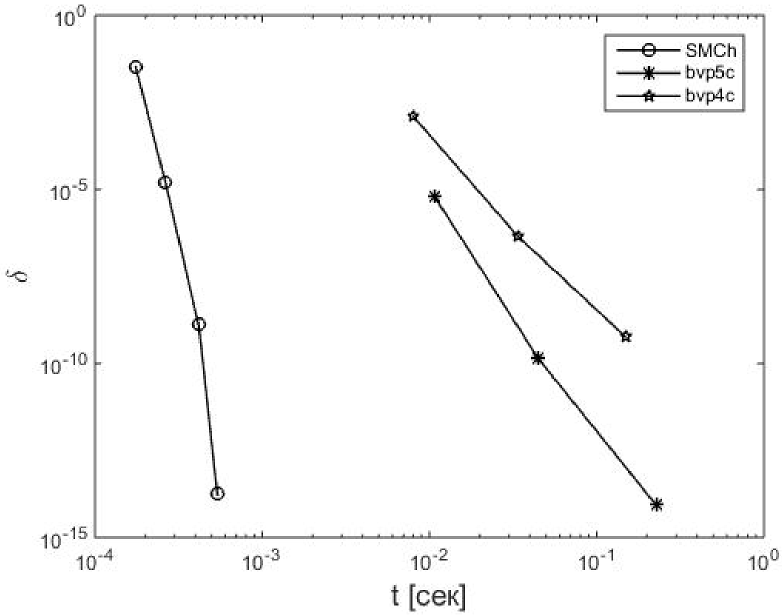

Рисунок 1.

На рисунке 1 представлены зависимости погрешности приближенного решения $\delta = \left\| E_-(-1) \right| - \left| u_-(-1) \right\|$ от времени решения задачи при использовании спектрального метода Чебышева (10) и методов сплайн-коллокации четвертого и пятого порядков точности [11], реализованных в функциях Matlab *tpbvp4c* и *tpbvp5c*, соответственно. Увеличение точности результатов достигалось за счет увеличения размерности сетки от $N = 21$, до $N = 47$ в спектральном методе и от $N = 17$ до $N = 700$ в методах сплайн-коллокации. С ростом размерности сетки соответственно возрастали вычислительные затраты на решение задачи. Представленные на рисунке 1 результаты показывают, что спектральный метод Чебышева позволяет сократить время решения задачи на один–два порядка для получения заданной относительной погрешности в диапазоне от $\delta = 10^{-4}$ до $\delta = 10^{-12}$, причем с ростом требований к точности приближенного решения преимущества спектрального метода возрастают.

Говоря о преимуществах спектрального метода Чебышева для рассмотренного класса задач следует отметить естественную адаптацию расчетной сетки к характеру типичных решений. Пример решения задачи (1)−(3), $\gamma = 10$, $E_p = 1$, $E_m = 10^{-4}$ представлен на рисунке 2. При возрастании значения параметра $\gamma >> 1$ решение приобретает структуру пограничного слоя, для описания которого требуется лучшее разрешение сетки вблизи границ области, что естественным образом обеспечивается расчетной сеткой (9).

В случае линейной задачи спектральный метод приводит к системе линейных алгебраических уравнений с матрицей блочного вида. При решении нелинейных задач соответствующая спектральная модель (10) также нелинейная, поэтому для ее реализации потребуется использование итерационных методов.

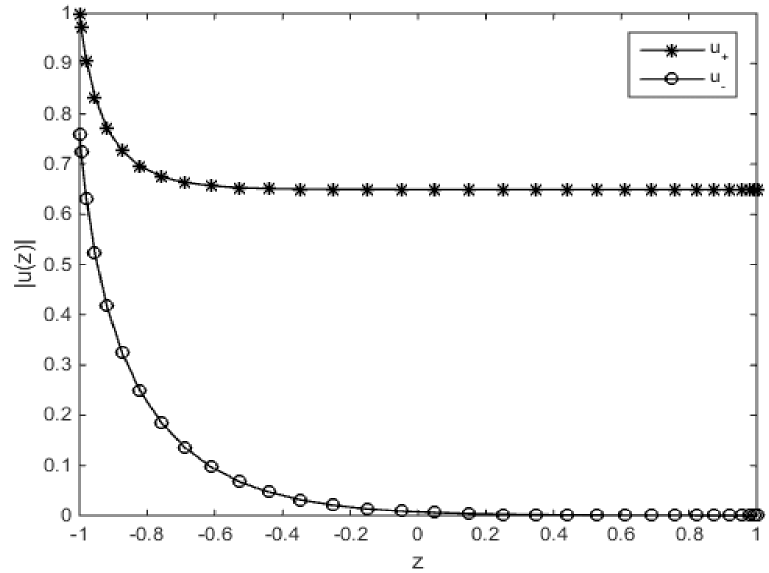

Рисунок 2.

Итерационные методы реализации спектральной модели

Рассмотрим итерационный метод Ньютона, который для задачи (1)–(3), (10) будет иметь следующий вид:

$$J^s \mathbf{u}^{s+1} = J^s \mathbf{u}^s - \tau \cdot F(\mathbf{u}^s), \tag{13}$$

$$J^s = J(\mathbf{u}^s) = A + \gamma \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}$$

$$G_{11} = \operatorname{diag}\left(0, |u_-^s(z_1)|^2, \ldots, |u_-^s(z_{N-1})|^2\right),$$

$$G_{22} = \operatorname{diag}\left(|u_+^s(z_0)|^2, \ldots, |u_+^s(z_{N-2})|^2, 0\right),$$

$$G_{12} = \operatorname{diag}\left(0, u_+^{*s}(z_1) u_-^s(z_1), \ldots, u_+^{*s}(z_{N-1}) u_-^s(z_{N-1})\right), \tag{14}$$

$$G_{21} = \operatorname{diag}\left(u_-^{*s}(z_0) u_+^s(z_0), \ldots, u_-^{*s}(z_{N-2}) u_+^s(z_{N-2}), 0\right),$$

$$F(\mathbf{u}^s) = A\mathbf{u}^s + g(\mathbf{u}^s) - f, \; s = 0, 1, \ldots .$$

Здесь $u_\pm^*$ означает комплексно-сопряженное значение $u_\pm$, $0 < \tau \le 1$ − итерационный параметр, обеспечивающий глобальную сходимость метода Ньютона в пространстве начальных приближений вне зависимости от попадания в достаточно малую окрестность искомого решения. Максимальная скорость сходимости достигается при $\tau = 1$. При отсутствии сходимости итерационного метода (13), (14) в случае $\tau = 1$ следует повторить процедуру с меньшим значением τ. Использование модифицированного метода Ньютона с параметром позволяет достичь сходимости при произвольном, например, нулевом начальном приближении, $\mathbf{u}_\pm^0 = 0$.

Наряду с итерационным методом Ньютона (13), (14) рассмотрим также итерационный процесс, аналогичный консервативному методу, успешно использованному ранее для реализации разностных моделей аналогичных нелинейных задач встречного взаимодействия оптических волн [12]:

$$C^s \mathbf{u}^{s+1} = f, \tag{15}$$

$$C^s = C(\mathbf{u}^s) = \begin{pmatrix} D_+ & \gamma G_{12} \\ \gamma G_{21} & D_- \end{pmatrix}, \; s = 0,1,\ldots \tag{16}$$

Здесь использованы те же обозначения, что и в формулах (13), (14). Структура матрицы C в итерационном методе (15) совпадает со структурой матрицы Якоби в методе Ньютона, что позволяет говорить о сопоставимой вычислительной сложности одной итерации в рассмотренных двух итерационных процедурах.

Отличительной особенностью итерационного метода (15), (16) является то, что в пределах спектральной точности он является консервативным, т.е. приближенное решение на каждой итерации удовлетворяет закону сохранения (4) не хуже, чем в пределе сходимости итераций. Иными словами, консервативность итерационного метода выполняется настолько, насколько спектральная производная обеспечивает точность дифференцирования квадрата сеточных функций на текущей итерации.

Результаты численных экспериментов показывают, что скорость сходимости итерационных методов (13), (14) и (15), (16) существенно зависит от интенсивности взаимодействия волн, однако для консервативного итерационного метода (КИМ) замедление скорости сходимости с ростом параметра γ существенно ниже по сравнению с методом Ньютона (13), (14). В частности, на рисунке 3 представлены результаты сравнительного анализа эффективности рассмотренных численных методов, а именно, зависимости числа итераций для достижения показателя точности $\varepsilon = 10^{-8}$, который оценивался по относительной норме невязки приближенного решения. Рассмотрен пример решения задачи (1)–(3) в диапазоне значений параметра $\gamma = 2 \div 7$ при $E_p = 1$, $E_m = 10^{-4}$. Как видно из рисунка, консервативный итерационный метод требует до трех раз меньше итераций по сравнению с методом Ньютона. При этом, как отмечалось выше, вычислительные затраты на отдельную итерацию в рассмотренных методах приблизительно одинаковы.

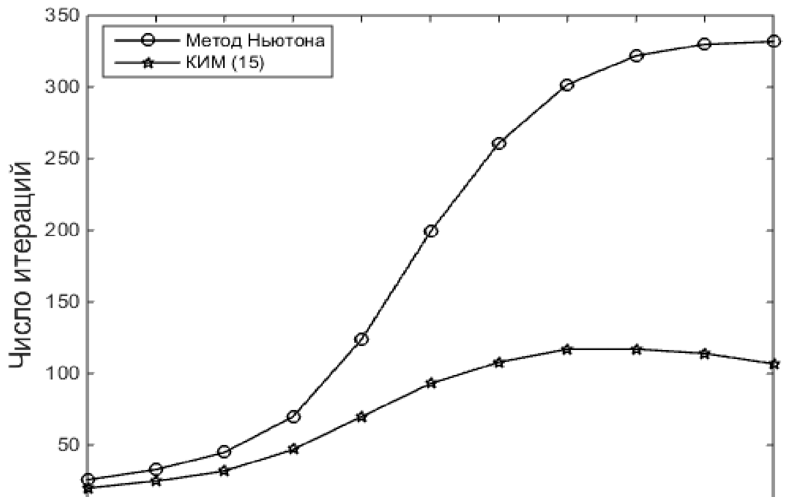

Рисунок 3.

Подводя итог, отметим, что предложенный итерационный метод тестировался также на более сложных примерах многоволновых задач, характерных для моделирования оптоволоконных усилителей на основе эффекта вынужденного комбинационного рассеяния [1; 2]. При этом в подавляющем большинстве случаев консервативный итерационный метод (15), (16) демонстрировал убедительное превосходство по сравнению с методом Ньютона.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Headley, C. Raman Amplification in Fiber Optical Communication Systems / C. Headley, G. Agrawal. – San Diego : Academic Press, 2005. – P. 376.

2. Perlin, V. E. Optimal design of flat-gain wide-band fiber Raman amplifiers / V. E. Perlin, H. G. Winful // Journal of lightwave technology. – 2002. – T. 20. – № 2. – P. 250–254.

3. Карамзин, Ю. Н. Математическое моделирование в нелинейной оптике / Ю. Н. Карамзин, А. П. Сухоруков, В. А. Трофимов. – М. : МГУ, 1989. – 160 с.

4. Serdar Gokhan, F. Solution of Raman fiber amplifier equations using MATLAB BVP solvers / F. Serdar Gokhan, G. Yilmaz // COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering. – 2011. – T. 30. – № 2. – P. 398–411.

5. Liu, X. An effective method for two-point boundary value problems in Raman amplifier propagation equations / X. Liu, M. Zhang // Optics communications. – 2004. – T. 235. – № 1. – P. 75–82.

6. Tarman, H. I. A spectral collocation algorithm for two-point boundary value problem in fiber Raman amplifier equations / H. I. Tarman, H. Berberoğlu // Optics Communications. – 2009. – T. 282. – № 8. – P. 1551–1556.

7. Виноградова, М. Б. Теория волн / М. Б. Виноградова, А. П. Сухоруков, О. В. Руденко. – М. : Наука, 1979. – 384 с.

8. Trefethen, L. N. Spectral Methods in MATLAB / L. N. Trefethen. – Philadelphia : SIAM, 2000. – 160 p.

9. Weideman, J. A. A MATLAB differentiation matrix suite / J. A. Weideman, S. C. Reddy // ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). – 2000. – T. 26. – № 4. – P. 465–519.

10. Boyd, J. P. Chebyshev and Fourier spectral methods / J. P. Boyd. – New York : DOVER Publications, 2000. – 594 p.

11. Shampine, L. F. Solving ODEs with matlab / L. F. Shampine, I. Gladwell, S. Thompson. – New York : Cambridge University Press, 2003. – 263 p.

12. Волков, В. М. Итерационные методы решения стационарных задач встречного взаимодействия оптических волн в нелинейных средах / В. М. Волков // Дифференциальные уравнения. – 1998. – Т. 34. –№ 7. – С. 935–941.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 12.10.2015

Volkov V.M., Buyalskaya Yu.V. **On Spectral Methods for Numerical Analysis of Counterpropagating Optical Waves Interaction in Nonlinear Media**

Spectral methods for a typical problem of counterpropagating optical wave interaction in nonlinear media are considered. Significant advantages of the spectral technique in comparison with 4-5-order spline-collocation methods are demonstrated. For implementation of nonlinear spectral model a conservative iterative method is proposed. The proposed method demonstrates improved convergence in comparison with the Newton methods in the case of strong nonlinear coupling of the interacting waves.