МАТЭМАТЫКА

УДК 517.925

***Е.Р. Бабич*[1], *И.П. Мартынов*[2]**

[1]*аспирант Гродненского государственного университета имени Я. Купалы*
[2]*д-р физ.-мат. наук, проф. каф. математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры Гродненского государственного университета имени Я. Купалы*

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Объектом исследования является система двух дифференциальных уравнений, каждое из которых является уравнением второго порядка. Цель исследования – изучение аналитических свойств решений данной системы и решений уравнений с ней связанных. В данной статье построен первый интеграл рассматриваемой системы, а также первые интегралы для уравнений с ней связанных. Установлена мероморфность компонент общего решения данной системы.

Введение

Если уравнение $f\left(x^{(n)},...,x,z\right)=0$ имеет решение $x=\sum_{k=0}^{\infty}h_k\left(z-z_0\right)^{k-s}$, то этому решению будем сопоставлять набор $\left(s;h_0;r_1,r_2,...,r_n\right)$, где $k=r_m$ – резонансы, h_{r_m} – резонансные коэффициенты. Среди резонансов r_k есть один равный -1. Остальные резонансы должны быть целыми и различными [1].

Следуя методике нахождения точных решений системы двух дифференциальных уравнений, являющейся моделью Хенона-Хейлеса [2, с. 235], проведем исследование аналитических свойств решений системы

$$\begin{cases} 2xx''=x'^2+3x^2y, \\ y''=6y^2+2x+a, a''=0 \end{cases} \tag{1}$$

и связанных с ней уравнений.

Пусть производная Шварца $\{\varphi,t\}$ удовлетворяет условию

$$\frac{\varphi'''}{\varphi'}-\frac{3}{2}\frac{\varphi''^2}{\varphi'^2}=-24p,$$

а функция ω такова, что

$$\omega=\frac{\varphi'}{\varphi}-\frac{1}{2}\frac{\varphi''}{\varphi'}.$$

Тогда справедливо равенство

$$\omega'=-\omega^2+12p.$$

Будем искать решение системы (1) в виде

$$x=-\upsilon\omega+b, y=\omega^2+c. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях φ (т.е. при одинаковых степенях ω), получим условия

$$b=\upsilon', \upsilon=-12p', c=-8p, p''=6p^2+\frac{1}{16}a, \upsilon''=12p\upsilon. \tag{3}$$

Учитывая (3), (2) можно записать в виде

$$x = -\upsilon\omega + \upsilon', y = \omega^2 - 8p.$$

Пусть $\omega = \dfrac{u'}{u}$, тогда $u'' = 12pu$. Значит, $u, \upsilon -$ два линейно независимые решения уравнения $w'' = 12pw$, т.е. $\begin{vmatrix} u & \upsilon \\ u' & \upsilon' \end{vmatrix} = h \neq 0$. Можно считать $h = 1$, тогда для x и y получим

$$x = \frac{1}{u}, \tag{4}$$

$$y = \frac{u'^2}{u^2} - \frac{2}{3}\frac{u''}{u}. \tag{5}$$

Для u имеем

$$u^{IV} = 5\frac{u'u'''}{u} - 5\frac{u'^2u''}{u^2} - \frac{3}{2}au - 3. \tag{6}$$

Уравнению (6) соответствуют наборы $(2; h_0; -1,0,2,3)$, $(3; h_0; -1,0,-2,6)$.

Полагая $u' = -wu$, получим

$$w^{IV} = 5w'w'' + 5w^2w'' + 5ww'^2 - w^5 - \frac{3}{2}aw + \frac{3}{2}a'. \tag{7}$$

Уравнение (7) обладает свойством Пенлеве [3], при этом ему соответствуют наборы $(1;-1;-1,2,3,6)$, $(1;2;-1,2,3,6)$, $(1;3;-1,-2,6,7)$, $(1;-4;-1,-7,6,12)$. Таким образом, вычеты функции $w -$ целые числа, а значит, согласно лемме, изложенной в работе [4], функция $u -$ мероморфна. Учитывая (4), (5), получаем, что справедлива

Теорема 1. Компаненты x, y общего решения системы (1) являются мероморфными функциями.

При

$$u = \frac{2}{y'' - 6y^2 - a} \tag{8}$$

получим уравнение для y

$$y^{IV} = \frac{1}{2}\frac{\left(y''' - 12yy' - a'\right)^2}{y'' - 6y^2 - a} + \frac{27}{2}yy'' + 12y'^2 - 9y^3 - \frac{3}{2}ay. \tag{9}$$

Теорема 2. Уравнения (6), (9) связаны между собой преобразованием Бэклунда (5), (8).

Учитывая (4) и (6), для x получим уравнение

$$x^3x^{IV} = 3x^2x'x''' + 6x^2x''^2 - 10xx'^2x'' + 4x'^4 + 3x^5 + \frac{3}{2}ax^4. \tag{10}$$

Если $a = \alpha, \alpha' = 0,$ то система (1) имеет первый интеграл

$$4x'^2 + 3xy'^2 = 12xy^3 + 12x^2y + 6\alpha xy + H_1x, \tag{11}$$

уравнение (10) при этом имеет первый интеграл

$$x^2x'x''' = \frac{1}{2}x^2x''^2 + 3xx'^2x'' - 2x'^4 + x^5 + \frac{3}{4}\alpha x^4 + Hx^2, \tag{12}$$

а уравнение (6) имеет первый интеграл

$$u^2 u' u''' = \frac{1}{2} u^2 u''^2 + u u'^2 u'' + u^3 + \frac{3}{4} \alpha u^4 + H u^6 . \qquad (13)$$

Заключение

Установлена мероморфность компонент общего решения системы (1). При $a = const$ построены первые интегралы (11), (12), (13) соответственно для системы (1) и уравнений (10), (6). Изучены аналитические свойства решений уравнений (6), (7), (9).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ванькова, Т. Н. О некоторых аналитических свойствах решений алгебраических дифференциальных уравнений / Т. Н. Ванькова [и др.] // Весн. ГрДУ. Сер. 2. – 2008. – № 1 (64). – С. 8–16.
2. Кудряшов, Н. А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений / Н. А. Кудряшов. – М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. – 360 с.
3. Cosgrove, C. M. Higher–order Painlev? equations in the polynomial class I. Bureau symbol P2 variables / C. M. Cosgrove // Stud. Appl. Math. – 2000. – P. 1–76.
4. Колесникова, Н. С. Об одном классе дифференциальных уравнений третьего порядка с неподвижными критическими точками / Н. С. Колесникова, Н. А. Лукашевич // Дифференциальные уравнения. – 1972. – Т. 8, № 11. – С. 2082–2086.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 24.09.2015

Babich E.R., Martynov I.P. **Analytical Properties of Solutions of a Fourth Order System**

Object of study is system of two differential equations, each of which is a second-order equation. The aim is to study the analytic properties of the solutions of the given system and the solutions of the equations associated with it. This article is built first integral of the system, and first integrals for the equations associated with it. Proven the meromorphic property of the common solutions of this system.