УДК 524.3+537.6

А.И. Серый
преподаватель каф. теоретической физики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

К ПРОБЛЕМЕ НАГРЕВА БЕЛОГО КАРЛИКА ПРИ АККРЕЦИИ

Рассмотрена постановка задачи о временной эволюции радиального распределения температуры в белом карлике класса DA, который первоначально охладился до температуры, близкой к абсолютному нулю, а затем стал нагреваться извне при аккреции водорода с поверхности более массивного компаньона в тесной двойной системе. Температура белого карлика описывается дифференциальным уравнением в частных производных параболического типа. Уравнение усложняется при наличии зависимости плотности вещества от радиальной координаты, что приводит к аналогичной зависимости для теплоемкости и коэффициента теплопроводности. При учете излучения, а также функции Дебая для теплоемкости решетки задача становится нелинейной, а уравнение – интегро-дифференциальным.

Введение

В [1, с. 554] был рассмотрен вопрос о происхождении магнитных полей с индукцией $B \sim 10^6$–10^9 Гс у водородных белых карликов (т.е. класса DA). Сущность предложенного механизма заключается в следующем.

1. Белый карлик остывает и полностью кристаллизуется.

2. На его поверхность начинается аккреция водорода с более массивного компаньона в тесной двойной системе.

3. Внешние слои нагреваются и расплавляются, водород переходит в жидкую металлическую фазу, в которой становится энергетически выгодной спиновая поляризация протонов.

4. В результате спиновой поляризации возникает магнитное поле с индукцией $B \sim 10^3$–10^4 Гс, проникающее в более глубокие слои.

5. Поскольку протоны в более глубоких слоях находятся в узлах кристаллической решетки и могут рассматриваться как совокупность осцилляторов, подчиняющихся статистике Бозе (в силу того, что волновые функции протонов локализованы вблизи узлов кристаллической решетки и практически не перекрываются), то протоны могут независимо друг от друга поляризоваться в указанном магнитном поле, усиливая его в целом.

6. Все это должно произойти быстрее, чем тепло с поверхности дойдет до внутренних слоев.

Последний пункт следует рассмотреть более строго математически. В рассматриваемом приближении будем пренебрегать конвекцией. Задачу можно разделить на 3 этапа:

I. Вывод уравнения для нахождения пространственно-временного распределения температуры.

II. Вывод краевых условий.

III. Математическая запись требования пункта 6. Прежде чем перейти к более подробному рассмотрению этих этапов, следует отметить, что главная трудность приведенной выше цепочки рассуждений заключается в том, что усиление магнитного поля внутри белого карлика возможно лишь при условии $kT < 2.79\mu_Я B$ ($\mu_Я$ – ядерный магнетон), что при $B \sim 10^4$ Гс соответствует $T < 10^{-3}$ К, а время необходимое для остывания до таких температур, скорее всего, превосходит возраст белых карликов, оцениваемый из наблюдательных данных.

Вывод уравнения для распределения температуры

Количество тепла, втекающее в сферический слой толщиной dr за время dt за счет теплопроводности, равно [2, с. 167]

$$4\pi\left[\left(jr^2\right)_r-\left(jr^2\right)_{r+dr}\right]dt=-4\pi\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 j\right)drdt\,. \tag{1}$$

Аналогичным образом можно учесть и диффузию излучения [3, с. 96]

$$L=-4\pi r^2\frac{c}{3\kappa(r,t)\rho(r)}\frac{d}{dr}\left(aT^4\right), \tag{2}$$

$$\left[L_r-L_{r+dr}\right]dt=4\pi\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{c}{3\kappa(r,t)\rho(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(aT^4\right)\right)drdt\,, \tag{3}$$

где $a=7.56\cdot10^{-15}$ эрг/(см^3·К^4) [4, с. 609], $\kappa(r,t)$ – непрозрачность, в приближении Крамерса зависящая от температуры и плотности следующим образом [3, с. 96]:

$$\kappa(r,t)=\kappa_0\rho(r)T^{-7/2}(r,t), \tag{4}$$

где $\kappa_0=8.68\cdot10^{24}$ см^2/г в случае водорода [3, с. 97].

С другой стороны, изменение количества тепла в сферическом слое толщиной dr за время dt можно представить в виде [2, с. 167]

$$d^2Q=\rho(r)\cdot4\pi r^2dr\cdot C_V(r,t)dT\,. \tag{5}$$

Приравнивая (5) к сумме выражений (1) и (3) и учитывая (4), а также соотношение [2, с. 168]

$$j=-\lambda(r,t)\frac{\partial T}{\partial r}\,, \tag{6}$$

разделяя полученное соотношение на $4\pi r^2drdt$, получаем:

$$\rho(r)C_V(r,t)\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(r,t)r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{c}{3\kappa_0r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{T^{7/2}}{\rho^2(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(aT^4\right)\right). \tag{7}$$

В уравнении (7) необходимо уточнить выражения для $\rho(r),C_V(r,t)$ и $\lambda(r,t)$. Плотность $\rho(r)$ в случае водорода связана с концентрацией соотношением

$$\rho(r)\approx m_pn(r). \tag{8}$$

Это соотношение, однако, не выполняется в более глубоких слоях, где водород отсутствует. Поэтому условие равновесия между давлением гравитационных сил (которое выражается через $\rho(r)$) и давлением вырожденных электронов (которое выражается через $n(r)$) вместе с (8) не является достаточным для нахождения $\rho(r)$ либо $n(r)$.

Теплоемкость $C_V(r,t)$ складывается из теплоемкости кристаллической решетки $C_{реш}$ и электронного газа $C_{эл}$. При этом теплоемкость решетки равна [3, с. 106]

$$C_{реш}(r,t)=\frac{9R}{M_Hy^3}\int_0^y\frac{x^4e^xdx}{\left(e^x-1\right)^2},y=\frac{\theta_D(r)}{T(r,t)},\ \theta_D(r)=A_1\rho^{1/2}(r), \tag{9}$$

где $A_1=4\cdot10^3$ К·см$^{3/2}$/г$^{1/2}$ [3, с. 104], R – универсальная газовая постоянная. Теплоемкость электронного газа при низких температурах в нерелятивистском и ультрарелятивистском случаях равна, соответственно [5, с. 203, 212].

$$C_{эл}^{н/р}(r,t)=\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/3}\frac{m_e}{M_H\hbar^2n^{2/3}(r)}RkT(r,t), \tag{10}$$

$$C_{эл}^{у/р}(r,t)=\frac{\left(3\pi^2\right)^{2/3}}{3M_H\hbar c n^{1/3}(r)}RkT(r,t), \tag{11}$$

где M_H = 1 г/моль – молярная масса водорода. При более строгом вычислении выражение для теплоемкости электронного газа в общем случае существенно усложняется, например, из-за наличия интегралов и бесконечных сумм.

Коэффициент теплопроводности $\lambda(r,t)$ можно найти через удельную электропроводность, используя закон Видемана–Франца [6, с. 80]:

$$\lambda(r,t)=\frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k}{e}\right)^2\tilde{\sigma}_{эл}(r,t)T(r,t),\ \tilde{\sigma}_{эл}(r,t)=A_2\frac{\rho(r)}{T(r,t)}\left(1+A_3\frac{\rho(r)}{T^2(r,t)}\right)^{1/2}, \tag{12}$$

где (в СГС) $A_2=6\cdot10^{21}$ К·см³/(г·с), $A_3=0.24\cdot10^6$ К²·см³/г [7, с. 2].

Вывод краевых условий

Будем считать, что на поверхности белого карлика поток тепла обусловлен теплопроводностью, излучением и кинетической энергией падающего вещества, которая преобразуется в тепло.

$$j(r,t)|_{r=R_{WD}}=\frac{\dot{\mu}_S v^2}{2}-\sigma T^4(r,t)|_{r=R_{WD}}, \tag{13}$$

$$\dot{\mu}_S=\frac{\dot{M}}{4\pi R_{WD}^2},\ v^2=\frac{2GM_{WD}}{R_{WD}}. \tag{14}$$

С учетом (6) и (14) можно переписать (13) в виде:

$$\frac{\sigma T^4(r,t)|_{r=R_{WD}}}{\lambda(R_{WD},t)}-\frac{G\dot{M}M_{WD}}{4\pi R_{WD}^3\lambda(R_{WD},t)}=\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}|_{r=R_{WD}}. \tag{15}$$

При этом уровень аккреции $\dot{M}$ можно задавать в пределах от $10^{-11}M_\odot$/год до $10^{-8}M_\odot$/год [8, с. 10], где $M_\odot$ – масса Солнца. С учетом предела Чандрасекара, для массы белого карлика M_{WD} можно задавать значения, не превышающие $1.4M_\odot$. При низких плотностях, когда электронный газ нерелятивистский, имеется взаимосвязь между M_{WD} и радиусом R_{WD} белого карлика [3, с. 77]:

$$M_{WD}\sim R_{WD}^{-3}. \tag{16}$$

При высоких плотностях, когда электронный газ ультрарелятивистский, указанная взаимосвязь отсутствует, поэтому для определения R_{WD} нужно задавать значение центральной плотности [3, с. 77].

Математическая запись требования, изложенного в пункте 6 во введении

Значения концентрации n_1, при которых уже возможна спонтанная спиновая поляризация (после расплавления), можно задавать, например, в пределах от 10^{25} до 10^{26} см$^{-3}$. Каждое из этих значений достигается на некоторой глубине x_1 или на некотором расстоянии от центра белого карлика $R_{WD}-x_1$. Плавление происходит в некоторый момент времени t_1 при достижении температуры T_{melt}. Значение концентрации n_2, соответствующее максимально возможной плотности водорода (у порога нейтронизации), можно задать равным приблизительно $7.4\cdot10^{30}$ см$^{-3}$. Оно достигается на некоторой глубине $x_2>x_1$ или на некотором расстоянии от центра белого карлика $R_{WD}-x_2<R_{WD}-x_1$.

Тепло доходит до этого слоя в некоторый момент времени t_2, а до этого можно считать, что температура слоя $T = 0$ К. С учетом п. 6 (в 1-м абзаце статьи) все это можно математически записать в следующем виде:

$$T(R_{WD} - x_1, t_1) = T_{melt},\ n(R_{WD} - x_1) = n_1, \quad (17)$$

$$T(x_2, t) = 0, t \in (0, t_2),\ n(R_{WD} - x_2) = n_2, \quad (18)$$

$$t_2 > t_1. \quad (19)$$

Температура плавления водорода зависит от плотности (либо от давления, т.к. эти величины взаимосвязаны), причем в разных источниках предлагаются разные формулы (таблица 1).

Таблица. – Формулы для температуры плавления водорода

Источник	Формула для T_{melt}	Значения коэффициентов
[9, с. 670]	$T_0(1+P/a)^b \exp(-cP)$	T_0 = 14.025 К, a = 0.030355 ГПа, b = 0.59991, c = 0.0072997 ГПа$^{-1}$
[10, с. 12802]	$T_0(1+P/a)^b \exp(-P/c)$	T_0 = 14.025 К, a = 0.1129 ГПа, b = 0.7155, c = 149 Гпа
[3, с. 104; 7, с. 2]	$A_4 \rho^{1/3}$	$A_4 = 3 \cdot 10^4$ К·см/г$^{1/3}$

Заключение

Рассмотрена постановка задачи о временной эволюции радиального распределения температуры в водородном белом карлике, который первоначально охладился до температуры, близкой к абсолютному нулю, а затем стал нагреваться извне при аккреции водорода с поверхности более массивного компаньона, находясь в тесной двойной системе. Температура белого карлика описывается дифференциальным уравнением в частных производных параболического типа. Уравнение усложняется при наличии зависимости плотности вещества от радиальной координаты, что приводит к аналогичной зависимости для теплоемкости и коэффициента теплопроводности. При учете излучения, а также функции Дебая для теплоемкости решетки задача становится нелинейной, а уравнение – интегро-дифференциальным. Оно не может быть решено каким-либо из аналитических методов, предлагаемых в литературе по уравнениям сходного типа [11; 12].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Серый, А. И. Спиновая поляризация нуклонов. Пределы низких и высоких температур / А. И. Серый // Известия РАН. Серия физическая. – 2015. – Т. 79, № 4. – С. 549–555.

2. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1975. – Т. 2: Термодинамика и молекулярная физика. – 552 с.

3. Шапиро, С. Л. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды : в 2 ч. ; пер. с англ. / С. Л. Шапиро, С. А. Тьюколски – М. : Мир, 1985. – Ч. 1. – 256 с.

4. Шапиро, С. Л. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды : в 2 ч. ; пер. с англ. / С. Л. Шапиро, С. А. Тьюколски – М. : Мир, 1985. – Ч. 2. – 257–656 с.

5. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : учеб. пособие для вузов : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 5-е изд., стереот. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. V : Статистическая физика. Ч. I. – 616 с.

6. Физическая энциклопедия / Гл. ред. А. М. Прохоров; редкол.: Д. М. Алексеев [и др.]. – М. : Большая рос. энцикл., 1998. – Т. 5. Стробоскопические приборы – Яркость. – 691 с.

7. Cumming, A. Magnetic Field Evolution in Accreting White Dwarfs [Electronic resource] / A. Cumming. – Mode of access: http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0202079. – Date of access: 10.03.2015.

8. Gänsicke, Boris T. Heating and cooling of accreting white dwarfs: Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultäten der Georg–August Universität zu Göttingen / Boris T. Gänsicke // Göttingen, 1997. – P. 1–119.

9. Bonev, S. A. A quantum fluid of metallic hydrogen suggested by first-principles calculations / S. A. Bonev [et al.] // Nature. – 2004. – Vol. 431. – P. 669–672.

10. Morales, M. A. Evidence for a first-order liquid-liquid transition in high-pressure hydrogen from ab initio simulations / M. A. Morales [et al.] // PNAS – July 20, 2010. – Vol. 107, № 29. – P. 12799–12803.

11. Полянин, А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.

12. Владимиров, В. С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В. С. Владимиров [и др.]. – М. : Наука, 1982. – 256 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 31.10.2014

***Sery A.I.* To the Problem of White Dwarf Heating at Accretion**

The statement of a problem is considered for the time evolution of the radial distribution of temperature in a DA type white dwarf which initially cooled down to a temperature close to absolute zero and then started warming up from without at accretion of hydrogen from the surface of a more massive partner in a close binary system. The temperature of a white dwarf is described by a partial differential equation of parabolic type. The equation gets complicated at the presence of the dependence of the density of matter on radial coordinate, which leads to similar dependence for heat capacity and heat conductivity coefficient. Considering radiation as well as Debye function for lattice heat capacity the problem becomes non-linear and the equation becomes an integral-differential one.