

УДК 513.82

Е.М. Ракович¹, А.А. Юдов²¹магистрантка каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина²канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина**КЛАССИФИКАЦИЯ ПОДГРУПП ЛИ ГРУППЫ ЛИ
ДВИЖЕНИЙ ЧЕТЫРЁХМЕРНОГО ПСЕВДОЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА
НУЛЕВОЙ СИГНАТУРЫ**

В работе классифицируются связанные подгруппы Ли группы Ли движений четырёхмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры – пространства 2R_4 . Найдены инвариантные плоскости и прямые для таких подгруппы Ли и их образы стационарности.

В работе изучается геометрия однородных пространств. Анализ таких пространств является одной из актуальных проблем современной геометрии. В этом направлении выполняется много исследовательских работ. В Беларуси задачами такого характера занимались В.И. Ведерников, И.В. Белько, А.А. Бурдун, В.В. Балащенко, С.Г. Кононов, Л.К. Тутаев, А.С. Феденко и др., а за рубежом – эстонский геометр Ю. Лумисте и японские геометры К. Номидзу и Ш. Кобаяси. Ю. Лумисте показал применимость редуцированных однородных пространств к проблеме расширения связностей на расслоениях с редуцированными однородными слоями. К. Номидзу и Ш. Кобаяси проводили широкое исследование редуцированных однородных пространств, в частности, исследовали свойства инвариантной связности в редуцированных однородных пространствах.

1. Постановка задачи и метод решения

Рассматривается группа $G_0 = T_4 \cdot O_{4,2}$ движений пространства 2R_4 . Ставится задача классификации всех связных подгрупп Ли группы G_0 с точностью до внутренних автоморфизмов этой группы, т.е. до сопряжённости. Для решения этой задачи будем применять тот же метод, который разработали И.В. Белько и А.С. Феденко для классификации связных подгрупп Ли группы движения пространства Минковского [1; 2]. Ниже кратко излагаются основы этого метода применительно к группе движений пространства 2R_4 .

Как известно, задача классификации связных подгрупп группы Ли с точностью до внутренних автоморфизмов эквивалентна задаче классификации подалгебр алгебры Ли этой группы с точностью до присоединённого представления этой группы. Подалгебры, переводящиеся друг в друга элементами присоединённой группы, тоже будем называть сопряжёнными.

В настоящей работе решается задача классификации подалгебр Ли алгебры \overline{G}_0 с точностью до присоединённого представления Ad группы G_0 . Присоединённая группа действует в \overline{G}_0 по формуле:

$$Ad B C = B^{-1} C B, \quad B \in G_0, C \in \overline{G}_0. \quad (1)$$

Следуя И.В. Белько [2], введем следующие определения:

Определение 1. Пусть $\bar{T} \oplus K$ – полупрямая сумма идеала \bar{T} и подалгебры K , \bar{H} – подалгебра алгебры $\bar{T} \oplus K$, $H_1 = \bar{H} \cap \bar{T}$, $H_2 = pr_2 \bar{H}$. Подалгебра \bar{H} называется полупрямой, если $\bar{H} = H_1 \oplus H_2$, т.е. $pr_1 \bar{H} = H_1$, $\bar{H} \cap K = H_2$.

Определение 2. Подалгебра \bar{I} алгебры $\bar{T} \oplus K$ называется расширением полупрямой подалгебры $\bar{H} = H_1 \oplus H_2$, если $\bar{I} \cap \bar{T} = H_1$, $pr_2 \bar{I} = H_2$.

Имеют место следующие леммы, первые две из которых доказаны в [2].

Лемма 1. Пусть $\bar{T} \oplus K$ – полупрямая сумма идеала \bar{T} и подалгебры K , \bar{H} – подалгебра алгебры $\bar{T} \oplus K$. Тогда:

- 1) $\bar{H} \cap \bar{T} = H_1$ – подалгебра алгебры \bar{T} ,
- 2) $pr_2 \bar{H} = H_2$ – подалгебра алгебры K ,
- 3) если идеал \bar{T} абелев, то $H_1 \oplus H_2$ – подалгебра алгебры $\bar{T} \oplus K$.

Лемма 2. Пусть $\bar{T} \oplus K$ – полупрямая сумма идеала \bar{T} и подалгебры K , \bar{P} – подалгебра алгебры \bar{T} , \bar{H} – подалгебра алгебры K . Подпространство $\bar{P} \oplus \bar{H}$ тогда и только тогда является подалгеброй алгебры $\bar{T} \oplus K$, когда подпространство \bar{P} инвариантно относительно adX для любого $X \in \bar{H}$.

Лемма 3. Пусть $\bar{H} = H_1 \oplus H_2$ – полупрямая подалгебра алгебры $\bar{T}_4 \oplus \mathfrak{g}(4,2)$, \bar{I} – произвольное расширение подалгебры \bar{H} , $Ad h$ – элемент присоединённой группы $Ad(O(4,2))$. Тогда $Ad h(\bar{H})$ – полупрямая подалгебра, $Ad h(\bar{I})$ – расширение полупрямой подалгебры $Ad h(\bar{H})$.

Доказательство.

Пусть $h \in O(4,2)$. Из определения действия присоединённой группы AdG_0 получаем, что выполняются равенства:

$$pr_1 \circ Adh = Adh \circ pr_1, \quad pr_2 \circ Adh = Adh \circ pr_2, \quad (2)$$

где pr_i – проекция на i -е слагаемое в сумме $\bar{T}_4 \oplus \mathfrak{g}(4,2)$. Так как \bar{H} – полупрямая подалгебра, то $pr_1 \bar{H} = \bar{H} \cap \bar{T}_4$, $pr_2 \bar{H} = \bar{H} \cap \mathfrak{g}(4,2)$. Рассмотрим

$$Adh \bar{H} = Adh \mathfrak{H}_1 \oplus Adh \mathfrak{H}_2$$

Из (2) следует, что $pr_1 Adh \bar{H} = Adh \circ pr_1 \bar{H} = Adh \mathfrak{H}_1$. С другой стороны, поскольку \bar{T}_4 инвариантно относительно Adh , то $Adh \bar{H} \cap \bar{T}_4 = Adh \mathfrak{H}_1$. Таким образом, $pr_1 Adh \bar{H} = Adh \bar{H} \cap \bar{T}_4 = Adh \mathfrak{H}_1$.

Аналогично доказывается равенство

$$pr_2 Adh \bar{H} = Adh \bar{H} \cap \mathfrak{g}(4,2) = Adh \mathfrak{H}_2$$

Таким образом, алгебра $Adh \bar{H} = Adh \mathfrak{H}_1 \oplus Adh \mathfrak{H}_2$ – полупрямая.

Подалгебра \bar{I} – расширение полупрямой подалгебры \bar{H} , значит, $\bar{I} \cap \bar{T}_4 = H_1$, $pr_2 \bar{I} = H_2$. Рассмотрим соотношения:

$$\begin{aligned} Adh \bar{H} \cap \bar{T}_4 &= Adh \bar{H} \cap Adh \bar{T}_4 = Adh \bar{H} \cap \bar{T}_4 = Adh \bar{H}_1, \\ pr_2 \circ Adh \bar{H} &= Adh \circ pr_2 \bar{H} = Adh \bar{H}_2. \end{aligned}$$

Значит, $Adh \bar{H}$ – расширение полупрямой подалгебры $Adh \bar{H}$.

Лемма доказана.

Имеет место следующая основная теорема:

Теорема. Всякая подалгебра алгебры $\bar{T}_4 \oplus \mathfrak{G}_{4,2}$ с помощью $Adh, h \in O_{4,2}$ сопряжена некоторому расширению подалгебры $H_1 \oplus H_2$, где H_2 – один из представителей классов сопряжённых подалгебр алгебры $\mathfrak{G}_{4,2}$, H_1 – подпространство пространства \bar{T}_4 , инвариантное относительно adH_2 .

Доказательство.

Пусть \bar{I} – произвольная подалгебра алгебры $\bar{T}_4 \oplus \mathfrak{G}_{4,2}$, $\bar{I}_1 = \bar{I} \cap \bar{T}_4$, $\bar{I}_2 = pr_2 \bar{I}$.

В силу леммы 1, \bar{I}_2 – подалгебра алгебры $\mathfrak{G}_{4,2}$. Значит, существует элемент $h \in O_{4,2}$, такой, что $Adh \bar{I}_2 = H_2$, где H_2 – один из представителей классов сопряжённых подалгебр алгебры $\mathfrak{G}_{4,2}$. В силу определения 2, \bar{I} является расширением полупрямой подалгебры $\bar{I}_1 \oplus \bar{I}_2$. В силу леммы 3, $Adh \bar{I}$ является расширением полупрямой подалгебры $\bar{I}_1 \oplus \bar{I}_2$. В силу леммы 3, $Adh \bar{I}$ является расширением полупрямой подалгебры $Adh \bar{I}_1 \oplus Adh \bar{I}_2 = Adh \bar{I}_1 \oplus H_2$. В силу леммы 2, подпространство $Adh \bar{I}_1$ инвариантно относительно adX для любого $X \in H_2$. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что классификация подалгебр алгебры \bar{G}_0 должна проводиться с использованием классификации подалгебр алгебры $\mathfrak{G}_{4,2}$. В данной работе используется классификация с точностью до сопряжённости подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{G}_{4,2}$, приведённая Р.Н. Хабибуллиной и А. П. Широковым [3].

Доказанная теорема сводит задачу классификации подалгебр алгебры $\bar{T}_4 \oplus \mathfrak{G}_{4,2}$ к трём следующим задачам:

- 1) нахождение всех полупрямых подалгебр вида $H_1 \oplus H_2$, где H_2 прибегает множество представителей классов сопряжённых подалгебр алгебры $\mathfrak{G}_{4,2}$,
- 2) нахождение всех расширений полученных полупрямых подалгебр,
- 3) классификация полученных расширений с точностью до сопряжённости.

Покажем, как для подалгебры $H_2 \in \mathfrak{G}_{4,2}$ находятся подпространства пространства \bar{T}_4 , инвариантные относительно $ad H_2$.

Пусть $A \in \bar{T}_4, B \in \mathfrak{G}_{4,2}$. Тогда

$$ad B (A) = AB - BA = AB \tag{3}$$

Таким образом, для нахождения инвариантных одномерных подпространств, необходимо решить следующее матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix},$$

где $\lambda \in R$ – произвольное число, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ – произвольный элемент из H_2 . Аналогично

для нахождения инвариантных двумерных подпространств необходимо решить систему:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & O_4 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & O_4 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

где $\lambda, \mu, \nu, \delta$ – произвольные числа, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ – произвольный элемент из H_2 .

Для нахождения инвариантных трёхмерных подпространств воспользуемся следующим утверждением, доказательство которого опускаем. Пусть H_2 – алгебра Ли связной группы Ли H_2 .

Тогда из $AdH_2 \mathfrak{K} \subseteq K$ следует $adH_2 \mathfrak{K} \subseteq K$ и обратно, где K – подпространство алгебры Ли G_0 . Из формулы (1.8) и (1) заключаем, что присоединённая группа $AdO_{4,2}$ сохраняет метрику в пространстве \bar{T}_4 (изоморфном V_4). Таким образом, если $Adh \bar{\mathfrak{P}} \subseteq \bar{P}$, то $Adh \bar{\mathfrak{P}}_0 \subseteq \bar{P}_0$, где $h \in O_{4,2}$, \bar{P}_0 – ортогональное дополнение пространства \bar{P} . Значит, из $adK \bar{\mathfrak{P}} \subseteq \bar{P}$ следует, что $adK \bar{\mathfrak{P}}_0 \subseteq \bar{P}_0$. Таким образом, инвариантные трёхмерные пространства находим как ортогональные дополнения к инвариантным одномерным подпространствам.

Чтобы найти расширения полупрямой подалгебры $H_1 \oplus H_2$, необходимо из множества $\bar{\Gamma}$ всех векторных подпространств алгебры $\bar{T}_4 \oplus \mathfrak{G}_{4,2}$ удовлетворяющих условию $\bar{\Gamma} \cap \bar{T} = H_1$, $pr_2 \bar{\Gamma} = H_2$, выбрать подалгебры, для чего надо потребовать замкнутость операции коммутирования.

Замечание. Для нахождения полупрямых подалгебр, соответствующих подалгебре $H_2 \subset \mathfrak{G}_{4,2}$, подпространства H_1 пространства \bar{T}_4 , инвариантные относительно adH_2 нужно искать с точностью до преобразований $Adh, h \in O_{4,2}$ таких, что $Adh \mathfrak{H}_2 \cong H_2$.

В данной работе находятся расширения для однопрометрических подалгебр Ли.

Для приведения найденных инвариантных подпространств к минимальному числу, согласно замечанию, будем использовать следующие элементы группы $O_{4,2}$:

$$h_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi - \sin \phi & \\ 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$h_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ch\phi & 0 & sh\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & sh\phi & 0 & ch\phi \end{pmatrix}, h_5 = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & 1 - \lambda^2/2 & 0 & \lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & -\lambda^2/2 & 0 & 1 + \lambda^2/2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 h_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\lambda^2/2 & -\lambda & -\lambda^2/2 \\ 0 & -\lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda^2/2 & -\lambda & 1-\lambda^2/2 \end{pmatrix}, h_7 = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda/2 & -\lambda/2 & 0 \\ \lambda/2 & 1 & 0 & -\lambda/2 \\ -\lambda/2 & 0 & 1 & \lambda/2 \\ 0 & -\lambda/2 & -\lambda/2 & 1 \end{pmatrix}, \\
 h_8 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, h_9 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, h_{10} = \begin{pmatrix} ch\phi & 0 & sh\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sh\phi & 0 & ch\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 h_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, h_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 h_{13} &= \begin{pmatrix} 1+\lambda^2/2 & -\sin\phi & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & 0 & 0 \\ 1+\lambda^2/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, h_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 h_{15} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, h_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

2. Полупрямые подалгебры алгебры $\overline{G}_0 = \overline{T}_4 \oplus \mathfrak{g}_{4,2}$

2.1 Приведём некоторые сведения о k -плоскостях пространства 2R_4 . В зависимости от метрики, которая индуцируется на k -плоскостях, все k -плоскости пространства 2R_4 разделяются на действительные (евклидовы), «мнимые» (мнимоевклидовы), полувеклидовы и изотропные.

Пусть дана плоскость $\beta = 0; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$, где $O \in {}^2R_4$, $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ – попарно ортогональные векторы из V_4 , определяющие k -плоскость β . Произвольный вектор $\vec{a} = \lambda^\alpha \vec{a}_\alpha, \alpha = 1, \dots, k$ имеет длину $|\vec{a}|$, определяемую по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\lambda^1 \vec{a}_1^2 + \lambda^2 \vec{a}_2^2 + \dots + \lambda^k \vec{a}_k^2}.$$

Если $\vec{a}_1^2 > 0, \vec{a}_2^2 > 0, \dots, \vec{a}_k^2 > 0$, то k -плоскость β называется евклидовой; если $\vec{a}_1^2 > 0, \vec{a}_2^2 > 0, \dots, \vec{a}_k^2 > 0$, – мнимоевклидовой. Если $\vec{a}_1^2 > 0, \dots, \vec{a}_e^2 > 0, \vec{a}_{e+1}^2 < 0, \dots, \vec{a}_{e+p}^2 < 0, \vec{a}_{e+p+1}^2 = 0, \dots, \vec{a}_k^2 = 0$, то k -плоскость β называется полуевклидовой k -плоскостью индекса l дефекта $k-(l+p)$. Если все $\vec{a}_i^2 = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k$, то k -плоскость β называется изотропной k -плоскостью.

Евклидову k -плоскость будем обозначать R_k , мнимоевклидову k -плоскость будем обозначать ${}^k R_k$, полуюевклидову k -плоскость индекса l дефекта r будем обозначать ${}^e R_k^r$, изотропную k -плоскость будем обозначать R_k^k .

В пространстве ${}^2 R_4$ существуют все возможные виды 1-плоскостей (т.е. прямых): $R_1 = 0, \vec{e}_1, {}^1 R_1 = 0, \vec{e}_3, {}^1 R_1^1 = 0, \vec{e}_1 + \vec{e}_3$ – и все возможные виды 2-плоскостей:

$$R_2 = 0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, {}^1 R_2 = 0, \vec{e}_1, \vec{e}_3, {}^2 R_2 = 0, \vec{e}_3, \vec{e}_4, {}^1 R_2^1 = 0, \vec{e}_1, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, {}^1 R_2^1 = 0, \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_4, {}^1 R_2^2 = 0, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_4.$$

В пространстве ${}^2 R_4$ существует только три типа 3-плоскостей: ${}^1 R_3 = 0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, {}^2 R_3 = 0, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_4, {}^1 R_3^1 = 0, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_4$. 3-плоскостей $R_3^1, {}^2 R_3^1, R_3, {}^3 R_3, {}^1 R_3^2, R_3^2, R_3^3$ в пространстве ${}^2 R_4$ не существует. Это следует из того, что существует только три типа прямых, а 3-плоскости являются ортогональными дополнениями соответствующих прямых. Если при движениях пространства ${}^2 R_4$ прямые переходят друг в друга, то и их ортогональные дополнения также переходят друг в друга. Значит, они несут на себе метрику одного типа.

Введем теперь определение образа стационарности.

Определение. Образом стационарности (о.с.) данной подгруппы Ли H группы Ли G (а также соответствующей подгруппе H алгебры Ли N) называется такая фигура F в пространстве ${}^2 R_4$, что подгруппа H состоит из тех и только тех движений пространства ${}^2 R_4$, при которых фигура F инвариантна.

Всякая фигура F пространства ${}^2 R_4$ определяет некоторую подгруппу H , образом стационарности которой служит данная фигура. Под фигурой понимается любое множество точек пространства $P({}^2 R_4)$. Если две фигуры отличаются только положением в пространстве ${}^2 R_4$ (т.е. переводятся друг в друга некоторым движением пространства ${}^2 R_4$), то определяемые ими подгруппы сопряжены. Любые две K -плоскости пространства ${}^2 R_4$, несущие метрику одного типа, переводятся друг в друга некоторым движением пространства ${}^2 R_4$.

Важнейшими фигурами пространства 2R_4 являются k -плоскости и образованные с их помощью флаги.

Определение. Последовательность плоскостей $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_r}$ пространства 2R_4 , $\dim \alpha_{k_i} = k_i, k_1 < k_2 < \dots < k_r$ называется флагом пространства 2R_4 и обозначается $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_r}$, если $\alpha_{k_1} \subset \alpha_{k_2} \subset \dots \subset \alpha_{k_r}$.

Каждой K -плоскости α_k пространства 2R_4 отвечает K -мерное подпространство $\bar{\alpha}_k$ векторного пространства V_4 .

Определение. Последовательность $\bar{\alpha}_{k_1}, \alpha_{k_2}, \bar{\alpha}_{k_3}, \alpha_{k_4}, \alpha_{k_5}, \dots, \alpha_{k_r}, k_1 < k_2 < \dots < k_r$, состоящая из плоскостей пространства 2R_4 и подпространств векторного пространства V_4 , называется обобщенным флагом и обозначается $\bar{\alpha}_{k_1}, \alpha_{k_2}, \bar{\alpha}_{k_3}, \dots, \alpha_{k_r}$, если существует последовательность $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \alpha_{k_3}, \dots, \alpha_{k_r}$, такая, что подпространство $\bar{\alpha}_{k_1}$ отвечает k_1 -плоскости α_{k_1} ; пространство $\bar{\alpha}_{k_3} - k_3$ -плоскости α_{k_3} и т.д., причем последовательность $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \alpha_{k_3}, \dots, \alpha_{k_r}$ является флагом.

Плоскости и подпространства могут быть расположены в произвольном порядке и числе.

2.2 Перечислим теперь подалгебры алгебры $O(4,2)$, указывая образы стационарности (о.с.) и обозначая каждую подалгебру буквой. Это обозначение будет применяться во всей работе.

$$J_1 = \{i_{10}\}, \text{ о.с. – три точки, определяющие } R_2,$$

$$J_2 = \{i_5\}, \text{ о.с. – три точки, определяющие } {}^2R_2,$$

$$J_3 = \{i_6\}, \text{ о.с. – три точки, определяющие } {}^1R_2,$$

$$J_4 = \{i_8 - i_{10}\}, \text{ о.с. – три точки, определяющие } R_2^1,$$

$$J_5 = \{i_5 - i_7\}, \text{ о.с. – три точки, определяющие } {}^1R_2^1,$$

$$J_6 = \{i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\}, \text{ о.с. – три точки, определяющие } R_2^2,$$

$$J_7 = \{i_5 + i_{10}\}, \text{ о.с. – пара } (R_2, {}^2R_2), \text{ причем } (R_2)^\perp \neq {}^2R_2.$$

Здесь символом α^\perp обозначается плоскость ортогональная к плоскости α и $\dim \alpha + \dim \alpha^\perp = \dim {}^2R_4$.

$$J_8 = \{i_6 - i_9\}, \text{ о.с. – пара } ({}^1R_2, {}^1R_2'), \text{ где } {}^1R_2 \neq ({}^1R_2')^\perp \text{ и } {}^1R_2 \cap ({}^1R_2') = R$$

$$J_9 = \{i_5 + \lambda i_{10}\}, \lambda \neq 0, \pm 1, \quad J_{10} = \{i_6 + \lambda i_9\}, \lambda \neq 0, \pm 1,$$

$$J_{11} = \{i_5 - i_7 + i_8 - i_{10} + 2i_6 - 2i_9\}, \quad J_{12} = \{i_6 - i_9 + \lambda(i_5 - i_7)\}, \lambda \neq 0,$$

$$J_{13} = \{i_5 + i_7 + i_8 - 3i_{10}\}, \quad J_{14} = \{3i_5 - i_7 - i_8 - i_{10}\},$$

$$J_{15} = \{i_5, i_{10}\}, \text{ о.с. – флаг } \{R_0, R_2\},$$

$$J_{16} = \{i_6, i_9\}, \text{ о.с. – флаг } R_0, {}^2R_2,$$

$$J_{17} = i_9, i_8 - i_{10}, \text{ о.с. - флаг } R_0, R_1, R_2^1,$$

$$J_{18} = i_9, i_5 - i_7, \text{ о.с. - флаг } R_0, R_2^1,$$

$J_{19} = i_5 - i_7, i_8 - i_{10}, \text{ о.с. - флаг } R_0, R_2^1$. Волна означает, что в плоскости R_2^1 изотропная прямая точечно неподвижна.

$J_{20} = i_6, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}, \text{ о.с. - пара } R_1^1, R_2^1$, причем $R_1^1 \cap R_2^1 = R_0$ и 3-плоскость, содержащая R_2^1 и R_1^1 , есть R_3^1 .

$J_{21} = i_6 - i_9, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}, \text{ о.с. - три изотропных прямых, лежащих в одной изотропной плоскости и пересекающихся в одной точке.}$

$$J_{22} = i_6 - i_9, i_5 - i_7 + i_{10}, \quad J_{23} = i_6 + \lambda i_9, i_5 - i_7 + i_8 - i_{10}, \quad \lambda \neq 0, \pm 1.$$

$$J_{24} = i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}, i_8 - i_{10} \pm i_6 \pm i_9, \quad J_{25} = i_5 - i_{10}, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10},$$

$$J_{26} = i_6 - i_9 + \lambda i_5 - i_{10}, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}, \quad J_{27} = i_5 - i_{10}, i_6 - i_9,$$

$$J_{28} = i_8, i_9, i_{10}, \text{ о.с. - две точки, определяющие } R_1,$$

$$J_{29} = i_5, i_7, i_9, \text{ о.с. - две точки, определяющие } R_1,$$

$$J_{30} = i_6, i_5 - i_7, i_8 - i_{10}, \text{ о.с. - две точки, определяющие } R_1^1,$$

$J_{31} = i_6, i_9, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}, \text{ о.с. - две пересекающиеся изотропные прямые, определяющие изотропную плоскость.}$

$J_{32} = i_5 + i_{10}, i_6 - i_9, i_7 + i_8, \text{ о.с. - три изотропные плоскости, каждая пара из которых имеет только одну общую точку, общую для трех плоскостей.}$

$$J_{33} = i_5 - i_7, i_6 - i_9, i_8 - i_{10}, \quad J_{34} = i_5 - i_7, i_8 - i_{10}, i_6 + \lambda i_9, \quad \lambda \neq 0, \pm 1$$

$$J_{35} = i_5 - i_{10}, i_6 - i_9, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10},$$

$$J_{36} = i_9, i_5 - i_7, i_8 - i_{10}, \text{ о.с. - } R_0, R_2^1,$$

$$J_{37} = i_6, i_9, i_5 - i_7, i_8 - i_{10} - \text{ флаг } R_0, R_1^1,$$

$J_{38} = i_6, i_9, i_5 - i_{10}, i_7 - i_8, \text{ о.с. - две изотропные плоскости, имеющих только одну общую точку и симметричных относительно некоторой евклидовой плоскости.}$

$$J_{39} = i_5 - i_7, i_5 - i_{10}, i_6 + i_9, i_7 - i_8, \quad J_{40} = i_5, i_{10}, i_6 + i_9, i_7 + i_8,$$

$$J_{41} = i_6, i_9, i_5 - i_7, i_5 - i_{10}, i_8 - i_{10} - \text{ флаг } R_0, R_2^2,$$

$$J_{42} = i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}, \text{ о.с. - } R_0.$$

2.3 Перечислим теперь полупрямые подалгебры. Для этого будем находить подпространства пространства \bar{T}_4 , инвариантные относительно присоединенного представления подалгебр алгебры $O \llcorner 2$. Элементы пространства $\bar{T}_4 = V_4$ будем записывать в виде: $a = \mathbf{0}, a^1, a^2, a^3, a^4$. Инвариантность подпространства $K \subset \bar{T}_4$ относительно присоединенного представления некоторой алгебры $J_i, i = 1, \dots, 42$ эквивалентна инвариантности этого пространства относительно присоединенного представле-

ния базиса этой алгебры. Заметим, что присоединенное представление $adi, i \in J$ в нашем случае определяется формулой

$$adi a = ai. \tag{I}$$

Подпространства \bar{K} , инвариантные относительно adJ_i , достаточно искать с точностью до Adh , где $Adh \in \langle i, \bar{h} \subset O \langle 2 \rangle$.

Для приведения подпространств, инвариантных относительно подалгебры adJ_i , будем пользоваться матрицами $h_1 - h_{16}$, записанными в §.4. Чтобы каждый раз не проверять инвариантность базиса данной алгебры относительно Adh , выпишем формулы действия Adh_i на базисы данных алгебр.

Будем пользоваться формулой §.1, полагая для краткости

$$Ad \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = Adh, \quad \begin{pmatrix} r \\ O_4 \end{pmatrix} = r.$$

Имеют место формулы:

$$Adh_1 i_5 + i_{10} = i_5 + i_{10}, \quad Adh_2 i_5 = i_5,$$

$$Adh_3 i_6 = -i_6, \quad Adh_3 i_6 - i_9 = i_9 - i_6, \quad Adh_3 i_6 + \lambda i_9 = -i_6 - \lambda i_9,$$

$$Adh_3 i_9 = -i_9, \quad Adh_3 i_5 - i_{10} = i_5 - i_{10}, \quad Adh_3 i_7 - i_8 = i_8 - i_7,$$

$$Adh_4 i_6 = i_6, \quad Adh_4 i_5 - i_7 - i_8 + i_{10} = chJ + shJ i_5 - i_7 - i_8 + i_{10},$$

$$Adh_4 i_6 - i_9 = i_6 - i_9, \quad Adh_5 i_8 - i_{10} = i_8 - i_{10}, \quad Adh_6 \langle -i_7 \rangle = -i_7,$$

$$Adh_7 \langle -i_7 - i_8 + i_{10} \rangle = -i_7 - i_8 + i_{10}, \quad Adh_7 \langle -i_9 \rangle = -i_9,$$

$$Adh_8 \langle \rangle = \rangle_9, \quad Adh_8 \langle \rangle = \rangle_6, \quad Adh_8 \langle +i_{10} \rangle = +i_{10},$$

$$Adh_8 \langle +i_8 \rangle = +i_8, \quad Adh_9 \langle \rangle = \rangle_8, \quad Adh_9 \langle \rangle = \rangle_9$$

$$Adh_9 \langle -i_9 \rangle = -i_9, \quad Adh_9 \langle -i_7 + i_8 - i_{10} \rangle = -i_7 + i_8 - i_{10},$$

$$Adh_{10} \langle -i_7 \rangle = -i_7, \quad Adh_{10} \langle -i_7 + i_8 \rangle = -i_7 + i_8, \quad Adh_{10} \langle -i_{10} \rangle = -i_{10},$$

$$Adh_{10} i_8 - i_{10} = shJ i_5 - i_7 + chJ i_8 - i_{10},$$

$$Adh_{11} i_5 + i_{10} = i_5 + i_{10}, \quad Adh_{11} i_7 + i_8 = i_9 - i_6, \quad Adh_{11} i_6 - i_9 = i_7 + i_8$$

$$Adh_{12} i_6 = -i_6, \quad Adh_{12} i_9 = i_9, \quad Adh_{12} i_8 - i_{10} = -i_8 + i_{10},$$

$$Adh_{12} i_5 - i_7 = i_5 - i_7, \quad Adh_{13} i_6 - i_9 = i_6 - i_9,$$

$$Adh_{13} i_5 - i_7 - i_8 + i_{10} = i_5 - i_7 - i_8 + i_{10},$$

$$Adh_{14} (i_7 + i_8 - i_{10} + 2i_6 - 2i_9) = i_5 + i_7 - i_8 + i_{10} - 2i_6 + 2i_9,$$

$$Adh_5 (i_6) = i_6, \quad Adh_{15} (i_9) = i_9, \quad Adh_{16} (i_8 + \lambda i_9) = i_8 + \lambda i_9,$$

$$Adh_{16} (i_9) = i_9, \quad Adh_{16} (i_7) = i_7 + shJ i_7 + chJ i_7 - i_{10},$$

$$Adh_{16} (i_8 - i_{10}) = shJ i_8 - i_7 + chJ i_8 - i_{10},$$

$$Adh_{16} (i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}) = -i_5 + i_7 + i_8 - i_{10},$$

$$Adh_{16} (i_5 - i_7 + i_8 - i_{10}) = -i_5 + i_7 - i_8 + i_{10}.$$

Рассмотрим подалгебру $J_1 = i_{10}$. Пусть подпространство пространства \bar{T}_4 , натянутое на вектор $a = 0; a^1, a^2, a^3, a^4$, инвариантно относительно adi_{10} . Это приводит к системе $a \cdot i_{10} = \lambda a$, или: $0 = \lambda a^1$, $0 = \lambda a^2$, $-a^4 = \lambda a^3$, $a^3 = \lambda a^4$.

$$\text{Отсюда: } -a^4 = \lambda^2 a^4, \quad a^4 = 0, \quad a^3 = 0, \quad \lambda = 0.$$

Вывод: относительно adi_{10} инвариантны все одномерные подпространства с базисами $a = 0, a^1, a^2, 0, 0$, a^1, a^2 -произвольные.

Чтобы двумерное подпространство, натянутое на векторы $a = 0, a^1, a^2, a^3, a^4$ и $b = b^1, b^2, b^3, b^4$ было инвариантно относительно adi_{10} , необходимо, чтобы нашлись числа $\lambda, \mu, \nu, \delta$, такие, что

$$a \cdot i_{10} = \lambda a + \mu b, \quad b \cdot i_{10} = \nu a + \delta b.$$

Это эквивалентно системе

$$-a^4 = \lambda a^3 + \mu b^3, \quad a^3 = \lambda a^4 + \mu b^4, \quad 0 = \lambda a^1 + \mu b^1, \quad 0 = \lambda a^2 + \mu b^2, \quad (3)$$

$$0 = \nu a^1 + \delta b^1, \quad 0 = \nu a^2 + \delta b^2, \quad -b^4 = \nu a^3 + \delta b^3, \quad b^4 = \nu a^4 + \delta b^4.$$

Рассмотрим следующие случаи.

а) $a^4 \neq 0, b^4 \neq 0$. Тогда можно положить: $a^4 = 1, b^4 = 0, b^3 = 1, a^3 = 0$.

Из (3): $0 = \lambda, -1 = \mu, b^1 = 0, b^2 = 0, \delta = 0, v^1 = 1, a^1 = 0, a^2 = 0$.

Таким образом, получили подпространство i_1, i_2 .

б) $a^4 \neq 0, b^3 = 0, b^2 \neq 0$. В этом случае можно положить: $a^4 = 1, b^4 = 0, b^2 = 1, a^2 = 0$. Из (3) следует $\lambda^2 = -1$. Система противоречива.

в) $a^4 \neq 0, b^3 = b^2 = 0, b^1 \neq 0$. Можно положить: $a^4 = 1, b^4 = 0, b^1 = 1, a^1 = 0$.

Система (3) противоречива.

г) $a^4 = b^4 = 0, a^3 \neq 0, b^2 \neq 0$. Можно положить: $a^3 = 1, b^3 = 0, b^2 = 1, a^2 = 0$. Из (3): $a^3 = 0$ – противоречие.

д) $a^4 = b^4 = 0, a^3 \neq 0, b^2 \neq 0, b^1 = 0$. Можно положить: $a^3 = 1, b^3 = 0, b^1 = 1, a^1 = 0$. Из (3): $a^3 = 0$ – противоречие.

е) $a^4 = b^4 = a^3 = b^3 = 0$. Получим подпространство i_3, i_4 , которое удовлетворяет системе (3).

Таким образом, относительно adi_{10} инвариантны только подпространства: i_1, i_2, i_3, i_4 .

Чтобы найти трехмерные подпространства пространства \bar{T}_4 , инвариантные относительно adi_{10} , достаточно рассмотреть ортогональные дополнения к уже найденным одномерным инвариантным подпространствам. Они запишутся в виде: $a^2 i_1 - a^1 i_2, i_3, i_4$. Наконец, относительно adi_{10} будет инвариантно четырехмерное пространство $i_1, i_2, i_3, i_4 \equiv \bar{T}_4$.

При помощи Adh_1 подпространство $a^1 i_1 + a^2 i_2$ приводится к виду i_1 . Этим же преобразованием подпространства $a^2 i_1 - a^1 i_2, i_3, i_4$ приводятся к i_2, i_3, i_4 . При этом подалгебра i_{10} инвариантна относительно Adh_1 (2).

Таким образом, подпространства пространства \bar{T}_4 , инвариантные относительно adi_{10} , приводятся к виду: $i_1, i_1, i_2, i_3, i_4, i_2, i_3, i_4, i_1, i_2, i_3, i_4$.

Рассмотрим подалгебру J_2 . Поступая, как в предыдущем случае, получим, что подпространства, инвариантные относительно adJ_2 , имеют вид:

$$\lambda i_3 + \mu i_4, i_1, i_2, i_3, i_4, i_1, i_2, \mu i_3 - \lambda i_4, i_1, i_2, i_3, i_4.$$

При помощи Adh_2 подпространства $\lambda i_3 + \mu i_4$ приводятся к i_3 , а подпространства $i_1, i_2, \mu i_3 - \lambda i_4$ – к i_1, i_2, i_4 . При этом подалгебра J_2 инвариантна относительно Adh_2 (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду:

$$i_3, i_1, i_2, i_3, i_4, i_1, i_2, i_4, i_1, i_2, i_3, i_4.$$

Рассмотрим подалгебру J_3 . Инвариантные относительно adJ_3 подпространства имеют вид:

$$i_1 \pm i_3, \quad \lambda i_2 + \mu i_4, \quad i_1 \pm i_3, \lambda i_2 + \mu i_4, \quad i_1, i_3, \\ i_2, i_4, \quad i_1 \pm i_3^\perp, \quad \lambda i_2 + \mu i_4^\perp, \quad i_1, i_2, i_3, i_4,$$

где символом v^\perp обозначается ортогональное дополнение подпространства v пространства \bar{T}_4 .

При помощи Adh_3 пространства $i_1 + i_3$ и $i_1 - i_3$, $i_2 + i_4$ и $i_2 - i_4$, $i_1 + i_3, i_2 + i_4$ и $i_1 - i_3, i_2 - i_4$, $i_1 - i_3, i_2 + i_4$ и $i_1 + i_3, i_2 - i_4$, $i_1 + i_3, i_2$ и $i_1 - i_3, i_2$, $i_1 + i_3, i_4$ и $i_1 - i_3, i_4$ сопряжены. При помощи Adh_4 пространство $\lambda i_2 + \mu i_4$ переводится либо в i_2 , либо в i_4 , либо в $i_2 \pm i_4$. При помощи Adh_{12} пространства $i_1 + i_3, i_2 + i_4$ и $i_1 - i_3, i_2 + i_4$ сопряжены. При этом подалгебра J_3 инвариантна относительно Adh_3 , Adh_4 и Adh_{12} (2). Таким образом, инвариантные относительно adJ_3 подпространства приводятся к виду:

$$i_2, \quad i_4, \quad i_1 + i_3, \quad i_2 + i_4, \quad i_1 + i_3, i_2, \quad i_1 + i_3, i_4, \\ i_1, i_3, \quad i_2, i_4, \quad i_1 + i_3, i_2 + i_4, \quad i_1, i_3, i_4, \quad i_1, i_2, i_3, \\ i_1 + i_3, i_2, i_4, \quad i_1, i_3, i_2 + i_4, \quad i_1, i_2, i_3, i_4.$$

Рассмотрим подалгебру J_4 . Инвариантные относительно adJ_4 подпространства имеют вид: $\lambda i_1 + \mu i_2 - i_4$, $i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3$, $\lambda i_1 + \mu i_2 - i_4^\perp$, i_1, i_2, i_3, i_4 . При помощи Adh_5 подпространство $\lambda i_1 + \mu i_2 - i_4$ сопряжено либо i_1 , либо $i_2 - i_4$. При этом J_4 инвариантна относительно Adh_5 (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду:

$$i_1, \quad i_2 - i_4, \quad i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3, \quad i_2, i_3, i_4, \quad i_1, i_3, i_2 - i_4, \quad i_1, i_2, i_3, i_4.$$

Рассмотрим подалгебру J_5 . Инвариантные относительно adJ_5 подпространства имеют вид: $\lambda i_1 + \mu i_2 - i_4 + \mu i_3$, $i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3$, $\lambda i_1 + \mu i_2 - i_4 + \mu i_3^\perp$, i_1, i_2, i_3, i_4 . При помощи Adh_6 подпространство $\lambda i_1 + \mu i_2 - i_4 + \mu i_3$ приводится к i_3 или $i_2 - i_4$. При этом подалгебра J_5 инвариантна относительно Adh_6 (2).

Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду:

$$i_3, \quad i_2 - i_4, \quad i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3, \quad i_1, i_2, i_4, \quad i_2 - i_4, i_1, i_3, \quad i_1, i_2, i_3, i_4.$$

Рассмотрим подалгебру J_6 . Инвариантные относительно adJ_6 подпространства: $\lambda i_1 + i_3 + \mu i_2 - i_4$, $v i_1 + i_3 - \lambda i_2 - i_4$, $\lambda i_1 - i_2 + v i_2 + i_4$, $v \neq 0$, $i_1 - \lambda i_2, i_2 - i_4 + \lambda i_1 + i_3$, $i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3$, $i_1 + i_3, \lambda i_2 + \mu i_4$, $\lambda i_1 + i_3 + \mu i_2 - i_4^\perp$, i_1, i_2, i_3, i_4 .

При помощи Adh_7 пространство $\lambda i_1 + i_3 + \mu i_2 - i_4$ приводится к $i_1 + i_3$ или $i_1 + i_2 + i_3 - i_4$. При помощи Adh_{13} эти пространства сопряжены. При помощи Adh_7 пространство $v i_1 + i_3 - \lambda i_2 - i_4, \lambda i_1 - i_2 + v i_2 + i_4$ приводится к $i_1 + i_3, \lambda i_2 + \mu i_4$ или $i_1 + i_2 + i_3 - i_4, \lambda i_1 - i_2 + v i_2 + i_4$. При помощи

Adh_{13} пространство $i_1 + i_2 + i_3 - i_4, \lambda i_1 - \mu i_2 + i_4$ приводится к пространству $i_1 + i_3, \lambda i_2 + \mu i_4$. При помощи Adh_8 пространства $i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3$ и $i_1 + i_3, \lambda i_2 + \mu i_4$ сопряжены. При помощи Adh_7 пространство $i_1 - \lambda i_2, i_2 - i_4 + \lambda \mu + i_3$ при $\lambda \neq 1$ приводится к виду $i_1 + i_3, \lambda i_2 + \mu i_4$, а пространство $i_1 - i_2, i_1 + i_2 + i_3 - i_4$ при помощи Adh_4 — к виду $i_1 + i_3, \lambda i_2 + \mu i_4$. При помощи Adh_4 пространство $i_1 + i_3, \lambda i_2 + \mu i_4$ приводится к $i_1 + i_3, i_2$, $i_1 + i_3, i_4$ или к $i_1 + i_3, i_2 \pm i_4$. При этом подалгебра J_6 инвариантна относительно $Adh_4, Adh_7, Adh_8, Adh_{13}$. (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $i_1 + i_3$, $i_1 + i_3, i_2 \pm i_4$, $i_1 + i_3, i_2$, $i_1 + i_3, i_4$, $i_1 + i_3, i_2, i_4$, i_1, i_2, i_3, i_4 .

Рассмотрим подалгебру J_7 . Инвариантны относительно adJ_7 подпространства: i_1, i_2 , $i_3 + \mu i_1 - \lambda i_2, i_4 + \lambda i_1 + \mu i_2$, i_1, i_2, i_3, i_4 . При помощи Adh_1 подпространства $i_3 + \mu i_1 - \lambda i_2, i_4 + \lambda i_1 + \mu i_2$ приводятся к виду $i_3 + \lambda i_1, i_4 + \lambda i_2$. При этом подалгебра J_7 инвариантна относительно Adh_1 (2).

Таким образом, инвариантные пространства приводятся к виду:

$$i_1, i_2, i_3 + \lambda i_1, i_4 + \lambda i_2, i_1, i_2, i_3, i_4.$$

Рассмотрим подалгебру J_8 . Относительно adJ_8 инвариантны подпространства $\lambda \mu \pm i_3 + \mu \mu \mp i_4$, $i_4 + \lambda i_1 + \mu i_2, i_2 - \lambda i_3 + \mu i_4$, $i_2 \pm i_4, \pm i_1 + \lambda i_2 + i_3$, $i_2 - i_4, i_1 \pm i_3$, $i_2 + i_4, i_1 \pm i_3$, $i_4 + \lambda i_3, i_2 - \lambda i_1$, $\lambda \mu \pm i_3 + \mu \mu \mp i_4$, i_1, i_2, i_3, i_4 , i_1, i_3 , i_2, i_4 .

При помощи Adh_3 пространства $\lambda \mu + i_3 + \mu \mu - i_4$ и $\lambda \mu - i_3 + \mu \mu + i_4$ сопряжены. При помощи Adh_7 пространство $\lambda \mu + i_3 + \mu \mu - i_4$ переводится в $i_1 + i_3$ или $i_1 + i_2 + i_3 - i_4$. При помощи Adh_{13} эти пространства сопряжены. При помощи Adh_4 пространство $i_4 + \lambda i_1 + \mu i_2, i_2 - \lambda i_3 + \mu i_4$ приводится к $\lambda i_1 + \mu i_4, \mu i_2 - \lambda i_3$ или $i_1 + i_3, i_2 \pm i_4$. При помощи Adh_7 пространство $\lambda i_1 + \mu i_4, \mu i_2 - \lambda i_3$ приводится к $i_1 + i_3, \lambda \mu - i_3 + \mu \mu + i_4$ или $i_1 + i_2, i_3 - i_4$. При помощи Adh_3 пространства $i_2 - i_4, -i_1 + \lambda i_2 + i_3$ и $i_2 + i_4, i_1 + \lambda i_2 + i_3$, $i_1 + i_3, i_2 - i_4$ и $i_1 - i_3, i_2 + i_4$, $i_1 + i_3, i_2 + i_4$ и $i_1 - i_3, i_2 - i_4$, $i_1 + i_3, i_1 + \mu \mu + i_4$ и $i_1 - i_3, i_1 + \lambda \mu - i_4$ сопряжены. При помощи Adh_7 подпространства $i_2 + i_4, i_1 + \lambda i_2 + i_3$ и $i_1 - i_3, i_1 + \lambda \mu - i_4$ при $\lambda \neq 0$ сопряжены, а пространство $i_1 + i_3, \lambda \mu - i_3 + \mu \mu + i_4$ при $\lambda \neq 0$ входит в семейство $i_1 + i_3, i_1 + \lambda \mu + i_4$. При этом подалгебра J_8 инвариантна относительно $Adh_3, Adh_4, Adh_7, Adh_{13}$ (2). Таким образом, инвариантные относительно adJ_8 подпространства приводятся к виду: $i_1 + i_3$, $i_2 - \lambda i_1, i_4 + \lambda i_3$, $i_1 - i_3, i_2 \pm i_4$, $i_1 - i_3, i_1 + \lambda \mu - i_4$, $i_1 + i_3$, i_1, i_2, i_3, i_4 .

Рассмотрим подалгебру J_9 . Относительно adJ_{10} инвариантны подпространства: $i_1, i_2, i_3, i_4, i_1, i_2, i_3, i_4$.

Рассмотрим подалгебру J_{10} . Относительно adJ_{10} инвариантны подпространства: $i_1 \pm i_3, i_2 \pm i_4, i_1, i_3, i_2, i_4, i_1 + i_3, i_2 \pm i_4, i_1 - i_3, i_2 \pm i_4, i_1 \pm i_3, i_2, i_4, i_2 \pm i_4, i_1, i_3, i_1, i_2, i_3, i_4$.

При помощи Adh_3 пространства $i_1 + i_3$ и $i_1 - i_3, i_2 - i_4$ и $i_2 + i_4, i_1 + i_3, i_2 \pm i_4$ и $i_1 - i_3, i_2 \mp i_4$ сопряжены. При этом подалгебра J_{10} инвариантна относительно Adh_3 (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду $i_1 + i_3, i_2 + i_4, i_1, i_3, i_2, i_4, i_1 + i_3, i_2 \pm i_4, i_1 + i_3, i_2, i_4, i_2 + i_4^\perp, i_1, i_2, i_3, i_4$.

Рассмотрим подалгебру J_{11} . Относительно adJ_{11} инвариантны пространства: $i_1 - i_3, i_2 - i_4, i_1 - i_3, i_2 \pm i_4, i_1 + i_3, i_2 - i_4, i_1 - i_3, i_2, i_4, i_2 - i_4, i_1, i_3, i_1, i_2, i_3, i_4$. При помощи Adh_{14} подпространства $i_1 - i_3$ и $i_2 - i_4, i_1 - i_3, i_2 + i_4$ и $i_1 + i_3, i_2 - i_4$ сопряжены. При этом J_{11} инвариантна относительно Adh_{14} (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $i_1 - i_3, i_1 - i_3, i_2 \pm i_4, i_1 - i_3, i_2, i_4, i_1, i_2, i_3, i_4$.

Рассмотрим подалгебру J_{12} . Относительно adJ_{12} инвариантны подпространства: $i_2 \mp i_4, i_1 \pm i_3, i_1, i_2, i_3, i_4$.

Рассмотрим подалгебру J_{13} . Относительно adJ_{13} инвариантны подпространства: $i_1 + i_3, i_2 - i_4, i_1, i_2, i_3, i_4$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белько, И. В. Подгруппы группы Лоренца / И. В. Белько, А. С. Феденко // Докл. АН БССР. – 1970. – Т. 14. – № 6. – С. 393–395.
2. Белько, И. В. Подгруппы группы Лоренца – Пуанкаре / И. В. Белько // Изв. АН БССР. Сер. физ-мат. наук. – 1971. – № 1. – С. 5–13.
3. Хабибуллина, Р. Н. Классификация групп движений биаксиального пространства гиперболического типа / Р. Н. Хабибуллина, А. П. Широков // Уч. зап. Казан. ун-та. – 1968. – Т. 128, кн. 3. – С. 154–163.
4. Юдов, А. А. Канонический лифт подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и её алгебру Ли. Проблема эквивалентности подмногообразий пространства 2R_4 / А. А. Юдов // Изв. АН БССР. – 1989. – Деп. в ВИНТИ, № 1498-B89.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 19.10.2016

Rakovich A.M., Yudov A.A. Classification of Subgroups Lie Whether the Groups of Lie Motions of Four-Dimensional Pseudo-Euclidean Space of Signature Zero

The work is classified the related subgroup If the Lie groups of motions of four-dimensional pseudo-Euclidean space of signature zero – space 2R_4 . Are the invariant plane and straight for such subgroup Whether their images of stationarity.