УДК 517.925

И.П. Мартынов[1], В.М. Пецевич[2], В.А. Пронько[3]

[1]д-р физ.-мат. наук, проф.,
проф. каф. математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры
Гродненского государственного университета имени Я. Купалы
[2]канд. физ.-мат. наук, доц.,
доц. каф. математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры
Гродненского государственного университета имени Я. Купалы
[3]канд. физ.-мат. наук, доц.,
доц. каф. математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры
Гродненского государственного университета имени Я. Купалы

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДВУХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Объектом исследования являются два класса автономных полиномиальных и рациональных дифференциальных уравнений четвертого порядка, решения которых имеют в проколотой окрестности точки комплексной плоскости только один вид полярных разложений. Цель исследования – установить аналитические свойства решений рассматриваемых уравнений. Показано, что разложения в ряды решений этих уравнений содержат логарифмы. Наличие логарифмических точек ветвления было обнаружено с помощью метода резонансов и метода малого параметра.

Введение

Известны полиномиальные дифференциальные уравнения Шази [1] третьего и четвертого порядка, решения которых не имеют ни алгебраических точек ветвления, ни полюсов. Причем в [1] не указан характер особенностей решений таких уравнений. Свойства их решений получены в [2–4]. В работе [5] возникло 8 полиномиальных дифференциальных уравнений четвертого порядка, допускающих только один вид полярных разложений, хотя правые части этих уравнений имеют третью размерность относительно искомой функции и ее производных первого и второго порядков. Было сделано замечание, согласно которому полученные уравнения имеют решения с логарифмическими точками ветвления. По мнению Cosgrove [6], это утверждение недостаточно обосновано. В данной работе, кроме обоснования указанного утверждения, исследован также класс рациональных автономных дифференциальных уравнений четвертого порядка, правые части которых имеют третью размерность и при этом допускают только один вид разложения решений в ряды.

Если автономное дифференциальное уравнение

$$y^{IV} = f(y''', y'', y', y), \tag{1}$$

где f – рациональная функция своих аргументов имеет решение

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - z_0)^{r-s}, \tag{2}$$

то этому решению будем сопоставлять набор $(s; \alpha_0; -1, r_1, r_2, r_3)$, где $r = r_m$ – резонансы, α_{r_m} – резонансные коэффициенты $(m = 1, 2, 3)$. При этом резонансу $r = -1$ отвечает произвольность точки z_0, и если уравнение (1) имеет только мероморфные решения, то, согласно [5], [7], r_1, r_2, r_3 – целые числа, а коэффициенты α_{r_m} – произвольные параметры. Поэтому прежде всего следует находить необходимые условия отсутствия подвижных критических точек, т.е. условия, при которых r_1, r_2, r_3 – целые различные числа, не равные -1, а затем проверять произвольность параметров α_{r_m}.

Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$y^{IV}=ayy'''+(12-3a)y'y''+by(yy''-2y'^2), \qquad (3)$$

$$y^{IV}=a\frac{y'y'''}{y}+(1-a)\frac{y''^2}{y}+byy'''+(a-3b-10)y'y''+(a+3b+2)y(yy''-2y'^2), \qquad (4)$$

где a,b – комплексные постоянные, причем в (3) $b\neq 0,$ а в (4) имеем $a+3b+2\neq 0.$ Если искать их решения в виде (2), то найдем, что $s=1,$ $\alpha_0=-1$ для (3) и $\alpha_0=1$ для (4). Резонансы r будут удовлетворять соответственно алгебраическим уравнениям

$$(r+1)(r^3-(11-a)r^2+(34-4a-b)r-24)=0, \qquad (5)$$

$$(r+1)(r^3-(11-a+b)r^2+(30-3a+b)r-20+2a)=0. \qquad (6)$$

Анализируя уравнения (5) и (6), найдем значения коэффициентов $a,$ $b,$ при которых эти уравнения имеют целые и различные корни. Заметим, что для коэффициентов уравнений (5) и (6) имеют место соответственно закономерности

а) $r_1+r_2+r_3=11-a,$ $r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=34-4a-b,$ $r_1r_2r_3=24;$

б) $r_1+r_2+r_3=11-a+b,$ $r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=30-3a+b,$ $r_1r_2r_3=20-2a.$

Результаты анализа для уравнений (3) и (4) приведем в таблицах 1 и 2 соответственно.

Таблица 1

№	(a,b)	r_1,r_2,r_3
1	(–4, 12)	(1, 2, 12)
2	(–1, 3)	(1, 3, 8)
3	(14, –12)	(3, –2, –4)
4	(17, –30)	(2, –2, –6)
5	(24, –72)	(1, –2, –12)
6	(16, –28)	(2, –3, –4)
7	(20, –60)	(1, –4, –6)
8	(21, –63)	(1, –3, –8)

Таблица 2

№	(a,b)	r_1,r_2,r_3
1	(1, 0)	(1, 3, 6)
2	(1, 2)	(1, 2, 9)
3	(2, 2)	(1, 2, 8)
4	(3, 2)	(1, 2, 7)
5	(4, 1)	(1, 3, 4)
6	(4, 2)	(1, 2, 6)
7	(1, –18)	(1, –3, –6)
8	(2, –18)	(1, –2, –8)
9	(4, –14)	(1, –2, –6)
10	(1, –20)	(1, –2, –9)
11	(3, –16)	(1, –2, –7)
12	(4, –13)	(1, –3, –4)

Замечание 1. Уравнение

$$y^{IV}=a\frac{y'y'''}{y}+(1-a)\frac{y''^2}{y}$$

является упрощенным для (4). Мероморфность решений этого уравнения возможна лишь при $a\in\{1,2,3,4\}$.

Замечание 2. При наличии отрицательных резонансов в случаях 3–5 таблицы 1 и в случаях 7–9 таблицы 2 имеем $r_3=kr_2,$ $k\in\mathrm{N}.$ В случаях 6–8 таблицы 1 и в случаях 10–12 таблицы 2 нет такого $k\in\mathrm{N},$ чтобы было $r_3=kr_2.$

Проверка произвольности соответствующих коэффициентов в случае положительных резонансов

Рассмотрим случаи 1, 2 таблицы 1. В случае 1 для отсутствия подвижных критических точек необходимо, чтобы $\alpha_0 = -1$, а коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}$ и число z_0 были произвольными постоянными. В случае 2 необходимо: $\alpha_0 = 1$; $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_8$ и z_0 произвольные постоянные. Однако, подставляя (2) в (3), получим

$$(a+4)\alpha_2 = a\alpha_1^2, \quad (a+1)\alpha_3 = a\alpha_1\alpha_2.$$

Если $a = -4$, то α_2 остается произвольным, а $\alpha_1 = 0$; при $a = -1$ получим: $0 \cdot \alpha_3 = -\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2 = -\dfrac{1}{3}\alpha_1^2$. Значит, $\alpha_1^3 = 0$.

Поэтому вместо рядов Лорана (2) необходимо применить разложения соответственно

$$y = -(z-z_0)^{-1} + \alpha_1 + (\alpha_2 + \gamma_1 \ln(z-z_0)) \cdot (z-z_0) + \ldots, \tag{7}$$

$$y = (z-z_0)^{-1} + \beta_1 + \beta_2 (z-z_0) + (\beta_3 + \gamma_2 \ln(z-z_0)) \cdot (z-z_0)^2 + \ldots, \tag{8}$$

где $\gamma_1 = \dfrac{1}{4}\alpha_1^2$, $\gamma_2 = \dfrac{3}{5}\beta_1\beta_2 = -\dfrac{1}{5}\beta_1^3$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_3$ остаются произвольными постоянными. Аналогично найдем, что в случаях 2, 3, 4, 6 таблицы 2 будем иметь

$$y = (z-z_0)^{-1} + \alpha_1 + (\alpha_2 + \gamma_3 \ln(z-z_0)) \cdot (z-z_0) + \ldots, \tag{9}$$

где $3(a-8)\gamma_3 = 4(a+5)\alpha_1^2$, $a = 1, 2, 3, 4$. В случаях 1, 5 таблицы 2 получаем

$$y = (z-z_0)^{-1} + \alpha_1 + \alpha_2 (z-z_0) + (\alpha_3 + \gamma_4 \ln(z-z_0)) \cdot (z-z_0)^2 + \ldots, \tag{10}$$

где z_0, α_1, α_3 – произвольные постоянные, $\alpha_2 = \dfrac{3b+2}{4-3b} \cdot \alpha_1^2$, $\gamma_4 = \dfrac{6(18b^2+10b+7)}{3b-4} \cdot \alpha_1^3$.

Таким образом, формальные разложения (7) – (10) решений уравнений (3), (4) содержат логарифмы. Чтобы показать, что разложения (7) – (10) действительно представляют решения уравнений (3), (4) в соответствующих случаях, применим прием сведения уравнений (3), (4) к системе уравнений Брио и Буке, показанный в [5].

Обозначим:

$$\begin{gathered} t = z - z_0,\ y = t^{-1}(\varepsilon + u_1),\ y' = t^{-2}(-\varepsilon + u_2), \\ y'' = t^{-3}(2\varepsilon + u_3),\ y''' = t^{-4}(-6\varepsilon + u_4),\ \varepsilon^2 = 1. \end{gathered} \tag{11}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} tu_1' &= u_1 + u_2, \\ tu_2' &= 2u_2 + u_3, \\ tu_3' &= 3u_3 + u_4, \\ tu_4' &= c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + c_4u_4 + f(u_1, u_2, u_3, u_4), \end{aligned} \tag{12}$$

где f – нелинейная функция своих аргументов, $c_1 = 6a + 2b$, $c_2 = 6a + 4b - 24$, $c_3 = b - 3a + 12$, $c_4 = 4 - a$ для уравнения (3); $c_1 = 0$, $c_2 = 6b - 12$, $c_3 = 6b - 4a + 16$, $c_4 = b - a + 4$ для уравнения (4). Определяющее уравнение для (12) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-r & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-r & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 - r \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Уравнение (13) совпадает с (5) и (6), если соответственно взять $\varepsilon=-1,\ \varepsilon=1$. Согласно [8], по положительным резонансам $r_1,\ r_2,\ r_3$ (случаи 1, 2 таблицы 1; случаи 1–6 таблицы 2) можно построить решение системы (12) в виде рядов

$$u_n=\sum_{p,q} C_{p,q}^{(n)}t^p\left(-\ln t\right)^q, \tag{14}$$

где $p=m+m_1r_1+m_2r_2+m_3r_3,\ q=m_1\gamma_1+m_2\gamma_2+m_3\gamma_3;\ m,\ m_1,\ m_2,\ m_3$ – неотрицательные целые числа, причем $m+m_1+m_2+m_3>0;$ числа $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$, согласно [8], связаны с резонансами $r_1,\ r_2,\ r_3$ определенным образом. Ряды (14) сходятся при $0<\left|t\right|<\delta;$ они содержат три произвольных постоянных коэффициента, отвечающих резонансам $r_1,\ r_2,\ r_3$. Значит, верна

Лемма 1. Ряды (7) – (10) сходятся при $0<\left|z-z_0\right|<\delta,\ \delta$ – достаточно малое положительное число.

Проверка произвольности соответственных коэффициентов в случае наличия отрицательных резонансов, когда $r_3=k\,r_2,\ k$ – натуральное число

Так как система (12) автономна, то, полагая $t=\tau^{-1},\ u_k\left(t\right)=v_k\left(\tau\right)$, получим

$$\begin{gathered}\tau\dot{v}_1=-v_1-v_2,\ \tau\dot{v}_2=-2v_2-2v_3,\ \tau\dot{v}_3=-3v_2-v_4,\\ \tau\dot{v}_4=-c_1v_1-c_2v_2-c_3v_3-c_4v_4-f\left(v_1,v_2,v_3,v_4\right),\end{gathered} \tag{15}$$

где $\dot{v}_k=\frac{dv_k}{d\tau},\ k=\overline{1,4}$.

Легко проверить, что определяющее уравнение для системы (15) будет иметь корни, противоположные по знаку корням уравнения (13). Так что для уравнений в случаях 3–5 таблицы 1 и в случаях 7–9 таблицы 2 можем построить ряды, отвечающие отрицательным резонансам $-1,r_2,r_3$. О том, что эти ряды должны содержать логарифмические члены, убеждаемся также следующим образом. В случаях, когда $r_2=-2$, будем искать решение в виде рядов Лорана

$$y=\varepsilon\,t^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h_k}{t^{2k+1}},\ t=z-z_0. \tag{16}$$

Будем иметь:

1) $\varepsilon=-1,\ a=14$. Получим произвольное h_1. Однако второе резонансное условие дает произвольность h_2 и $16h_1^2=0$.

2) $\varepsilon=-1,\ a=17$. Получим произвольное h_1. Однако второе резонансное условие показывает произвольность h_3 и $19h_1h_2+3h_1^3=0$, причем $h_2=44h_1^2$. Значит, $h_1=0$.

3) $\varepsilon=-1,\ a=24$. Первое резонансное условие приводит к тому, что h_1 произвольно. Однако из второго резонансного условия следует произвольность h_6 и $h_1=0$.

4) $\varepsilon=-1,\ a=2,\ b=-18$. Первое резонансное условие выполнено: h_1 произвольно. Однако из второго резонансного условия следует, что h_4 произвольно, но при этом $6h_2=13h_1^2,\ 35h_3=414h_1^3$ и $106h_1h_3+438h_2^2+254h_1^2h_2-75h_1^4=0$, откуда следует $h_1=0$.

5) $\varepsilon=-1,\ a=4,\ b=-14$. Первое резонансное условие дает произвольность h_1. Второе резонансное условие показывает произвольность h_3 и $h_1=0$. Это следует из того, что $h_2=3h_1^2$ и $25h_1h_2-111h_1^3=0$.

В случае $\varepsilon = 1,\ a = 1,\ b = -18,\ r_2 = -3$ будем искать решение уравнения (4) в виде

$$y = \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{t^{3k+1}},\ t = z - z_0. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (4), получим сначала произвольность h_1 (выполнено первое резонансное условие). Из второго резонансного условия следует произвольность h_2 и $48h_1^2 = 0.$ Таким образом, ряды (16) и (17) следует заменить на другие, которые должны содержать логарифмические члены.

Значит, имеет место

Лемма 2. Общие решения уравнений (3) и (4) в случаях 3–5 таблицы 1 и 7–9 таблицы 2 имеют подвижные логарифмические точки ветвления.

Наличие логарифмических особенностей в решениях уравнений в случае отрицательных резонансов, при которых $r_3 \neq k\,r_2,\ k$ – натуральное число

Рассмотрим теперь случаи 6–8 таблицы 1 и случаи 10–12 из таблицы 2. Так как все члены уравнений (3) и (4) имеют один и тот же вес, равный 5, то будем искать решения этих уравнений в виде рядов

$$y = \varepsilon\, t^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k\, \lambda^k,\ t = z - z_0, \tag{18}$$

где $\varepsilon^2 = 1,\ \lambda$ – малый параметр.

Подставляя (18) при $\varepsilon = -1$ в уравнение (3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, для нахождения функций ω_k получим линейные уравнения

$$\omega_k^{IV} = -\frac{a}{t}\omega_k''' + \frac{12-3a+b}{t^2}\omega_k'' + \frac{6a+4b-24}{t^3}\omega_k' + \frac{6a+2b}{t^4}\omega_k + F_{k-1},\ k = 1, 2, ..., \tag{19}$$

при этом

$F_0 = 0,$

$F_1 = a\omega_1\omega_1''' + (12-3a)\,\omega_1'\omega_1'' - \frac{2b}{t}\left(\omega_1\omega_1'' - \omega_1'^2\right) - \frac{4b}{t^2}\omega_1\omega_1' - \frac{2b}{t^3}\omega_1^2,$

$F_2 = a\left(\omega_2\omega_1''' + \omega_1\omega_2'''\right) + (12-3a)\left(\omega_1'\omega_2'' + \omega_2'\omega_1''\right) + b\left(\omega_1^2\omega_1'' - 2\omega_1\omega_1'^2\right) - \frac{2b}{t}\left(\omega_2\omega_1'' - 2\omega_1'\omega_2' + \omega_1'\omega_2''\right) -$

$- \frac{4b}{t^2}\left(\omega_2\omega_1' + \omega_1\omega_2'\right) - \frac{4c}{t^3}\omega_1\omega_2.$

1) Пусть $a = 16.$ Возьмем решение однородного (при $k = 1$) уравнения (19) в виде $\omega_1 = \beta t + \gamma t^{-4}$ (здесь и далее β, γ – произвольные постоянные). Тогда получим $F_1 = \Phi_1(t) - 1296\beta\gamma t^{-6},$ где функция $\Phi_1(t)$ не содержит слагаемого с t^{-6}. Общее решение $\omega_2 = A_1 t + A_2 t^{-2} + A_3 t^{-4} + A_4 t^{-5}$ уравнения (19) будем искать методом вариации произвольных постоянных, считая $A_k = A_k(t),\ k = \overline{1,4}.$

Будем иметь:

$$\begin{cases} A_1' t + A_2' t^{-2} + A_3' t^{-4} + A_4' t^{-5} = 0, \\ A_1' - 2A_2' t^{-3} - 4A_3' t^{-5} - 5A_4' t^{-6} = 0, \\ 6A_2' t^{-4} + 20A_3' t^{-6} + 30A_4' t^{-7} = 0, \\ -24A_2' t^{-5} - 120A_3' t^{-7} - 210A_4' t^{-8} = F_1, \end{cases}$$

откуда получим

$$A_1' = \frac{1}{90}t^2F_1,\ A_2' = \frac{1}{18}t^5F_1,\ A_3' = \frac{1}{10}t^7F_1,\ A_4' = \frac{1}{18}t^8F_1.$$

Поэтому найдем $A_2' = \varphi_1(t) - 72\beta\gamma t^{-1}$, где функция $\varphi_1(t)$ не содержит слагаемого с t^{-1}. Значит, функция $A_2(t)$ содержит $\ln t$.

2) При $a = 20$ возьмем $\omega_1 = \beta + \gamma t^{-7}$. Тогда

$$F_1 = 8016\gamma^2t^{-17} - 4800\beta\gamma t^{-10} + 120\beta^2t^{-3},\ F_2 = \Phi_2(t) - 584000\beta^2\gamma t^{-9},$$

где функция $\Phi_2(t)$ не содержит слагаемого с t^{-9}. Если $\omega_3 = A_1 + A_2t^{-2} + A_3t^{-5} + A_4t^{-7}$, $A_k = A_k(t),\ k = \overline{1,4}$, то $A_3' = \frac{1}{30}t^8F_2$, т.е. $A_3' = \varphi_3(t) - \frac{58400}{3}\beta^2\gamma t^{-1}$, где функция $\varphi_3(t)$ не содержит слагаемого с t^{-1}. Значит, функция $A_3(t)$ выражается через $\ln t$.

3) Пусть $a = 21$. Возьмем $\omega_1 = \beta + \gamma t^{-4}$. Тогда $F_1 = \Phi_1(t) - 756\beta\gamma t^{-7} + 126\beta^2t^{-3}$, $\omega_2 = -\frac{197}{35}\gamma^2t^{-7} - 42\beta\gamma t^{-3} + \frac{21}{25}\beta^2 t$, $F_2 = \Phi_2(t) + \frac{222264}{25}\beta^2\gamma t^{-6}$, где функция $\Phi_2(t)$ не содержит слагаемого с t^{-6}. Если $\omega_3 = A_1 + A_2t^{-2} + A_3t^{-4} + A_4t^{-9}$, то $A_2' = \varphi_2(t) - \frac{7938}{25}\beta^2\gamma t^{-1}$, где функция $\varphi_2(t)$ не содержит слагаемого с t^{-1}. Значит, функция $A_2(t)$ содержит $\ln t$.

Подставляя (18) при $\varepsilon = 1$ в уравнение (4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, для нахождения функций ω_k получим следующие линейные уравнения

$$\omega_k^{IV} = \frac{b-a}{t}\omega_k''' + \frac{16-4a+6b}{t^2}\omega_k'' + \frac{6b-12}{t^3}\omega_k' + F_{k-1},\ k = 1, 2, ..., \tag{20}$$

при этом

$F_0 = 0,$

$$F_1 = -\omega_1\omega_1^{IV} + a\omega_1'\omega_1''' + (1-a)\omega_1''^2 + (2b\omega_1\omega_1''' + (a-3b-10)\omega_1'\omega_1'')t^{-1} +$$

$$+ ((2a+12b+16)\omega_1\omega_1'' + (6b-2a+20)\omega_1'^2)t^{-2} + (10a+18b-4)\omega_1\omega_1't^{-3} + (4a+6b+8)u^2t^{-4}.$$

В случаях $a = 1, b = -12$ и $a = 3, b = -16$ возьмем $\omega_1 = \beta + \gamma t^{-3}$. Тогда $F_1 = \Phi_1(t) + 2(a - 9b - 70)\beta\gamma t^{-7}$, где функция $\Phi_1(t)$ не содержит слагаемого с t^{-7}. Если $\omega_2 = A_1 + A_2t^{-2} + A_3t^{-3} + A_4t^{-\sigma}$, где $\sigma = 10$ при $a = 1$, $\sigma = 8$ при $a = 3$, то получим $A_3' = \frac{1}{3(\sigma - 3)}t^6 \cdot F_1$, т.е. $A_2' = \varphi_1(t) + \frac{2(a - 9b - 70)}{3(\sigma - 3)}\beta\gamma t^{-1}$, где функция $\varphi_1(t)$ не содержит слагаемого с t^{-1}. Поэтому $A_3(t)$ содержит $\ln t$.

В случае $a = 4, b = -13$ возьмем $\omega_1 = \beta + \gamma t^{-5}$. Тогда $F_1 = \Phi_1(t) + 702\beta\gamma t^{-9}$, где функция $\Phi_1(t)$ не содержит слагаемого с t^{-9}. Если $\omega_2 = A_1 + A_2t^{-2} + A_3t^{-4} + A_4t^{-5}$, то получим $A_4' = \varphi_1(t) - \frac{2106}{5}\beta\gamma t^{-1}$, где функция $\varphi_1(t)$ не содержит слагаемого с t^{-1}, т.е. функция $A_4(t)$ выражается через $\ln t$.

Сходимость ряда (18) при достаточно малом λ обеспечивается теоремой Пуанкаре [9, с. 153].

Поэтому имеет место

Лемма 3. Общие решения уравнений (3) и (4) в случаях 6–8 таблицы 1 и 10–12 таблицы 2 имеют подвижные логарифмические точки ветвления.

Из лемм 1–3 следует, что верна

Теорема. Общие решения уравнений (3) и (4) имеют подвижные логарифмические точки ветвления.

Заключение

Показано, что два класса дифференциальных уравнений четвертого порядка (полиномиальных и рациональных), правые части которых имеют третью размерность относительно функции и ее производных, но допускающих только один вид полярных разложений их решений, имеют общие решения с логарифмическими точками ветвления.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chazy, J. Sur les équations différentieles du troisième orde et d'orde supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes / J. Chazy // These, Paris (1910), Acta Math. – 1911. – Vol. 34. – P. 317–385.
2. Cosgrove, C. M. Painlevé classification of the second order. I. Hyperbolic equations in two independent variables / C. M. Cosgrove // Stud. Appl. Math. – 1993. – Vol. 89. – P. 1–61.
3. Соболевский, С. Л. Подвижные особые точки решений обыкновенных дифференциальных уравнений / С. Л. Соболевский. – Минск : БГУ, 2006. – 119 с.
4. Мартынов, И. П. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений и систем : пособие / И. П. Мартынов, Н. С. Берёзкина, В. А. Пронько. – Гродно : ГрГУ, 2009. – 395 с.
5. Мартынов, И. П. О дифференциальных уравнениях с неподвижными критическими особыми точками / И. П. Мартынов // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9, № 10. – С. 1780–1791.
6. Cosgrove, C. M. Parabolic a nd higher dimensional equations / C. M. Cosgrove // Stud. Appl. Math. – 1993. – Vol. 89. – P. 95–151.
7. Ablowitz, M. J. A connection between nonlinear evolution and ordinary differential equations of P–type. I. / M. J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur // J. Math. Phys. – 1980. – Vol. 21, № 4. – P. 715–721.
8. Horn, J. Über die Reihenenwickelung der Integrale eines Systems von Differentialgleichungen in der Umgeburg gewisser singularer Stellen. I. / J. Horn // J. fur Math. – 1896. – Vol. 116. – P. 265–306.
9. Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. : ГИТТЛ, 1950. – 436 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 26.09.2016

Martynov I.P., Pecevich V.M., Pronko V.A. **Analytical Properties of Solutions of Two Classes of Fourth-Order Differential Equations**

The object of the study are two classes of independent polynomial and rational fourth-order differential equations whose solutions are in a punctured neighborhood of the complex plane of only one species in polar expansions. The purpose of research – to establish the analytic properties of the considered equations. It is shown that the expansion of the ranks of the solutions of these equations contain logarithms. Availability logarithmic branch points were found by the method of resonances and small-parameter method.