УДК 539.12

Е.М. Овсиюк[1], А.Н. Редько[2], В.М. Редьков[3]

[1]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. общей физики и методики преподавания физики Мозырского государственного педагогического университета имени И.П. Шамякина

[2]преподватель каф. физики и методики преподования физики Белорусского государственного педагогического университета имени М. Танка

[3]д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник лаборатории теоретической физики Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СКАЛЯРНОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ ОСЦИЛЛЯТОРА В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИЙ ГОЙНА

На основе использования уравнения Клейна – Фока – Гордона выполнено аналитическое исследование релятивистской квантово-механической задачи о частице (со спином ноль) в поле осциллятора на фоне плоского пространства Минковского. Задача сведена к трижды вырожденному уравнению Гойна с одной иррегулярной особой точкой ранга 4 в $z=\infty$. *Приведены основные свойства локальных решений в окрестности этой особой точки, описаны 34-членные рекуррентные соотношения для возникающих степенных рядов. Качественный анализ показал, что у этой системы могут быть только квазистационарные состояния с возможностью туннелирования частицы через потенциальный барьер. Аналогичный анализ выполнен в случае использования геометрии гиперболического пространства Лобачевского. В этой системе также возможны только квазистационарные связанные состояния, ее аналитическое описание сводится к вырожденному уравнению Гойна с двумя регулярными и одной иррегулярной ранга 2 особенностями.*

Теоретические достижения в физике связаны с разработанностью применяемого математического аппарата. Многие результаты, полученные в классической и квантовой физике, в значительной степени основаны на применении теории гипергеометрических функций – решений дифференциального уравнения с тремя особыми точками. В последние десятилетия растет число физических задач, в которых надо решать дифференциальное уравнение с четырьмя особыми точками – уравнение Гойна [1; 2].

Релятивистская частица в поле осциллятора в пространстве Лобачевского

Обратимся к аналитическому исследованию задачи о поведении релятивистской скалярной частицы во внешнем поле осциллятора при равном нулю квантовом числе углового момента $j=0$. Сначала рассмотрим эту систему на фоне пространства Лобачевского, затем сравним ее с аналогичной системой в пространстве Минковского. После разделения переменных в уравнении Клейна – Фока – Гордона в пространстве Лобачевского задача сводится [3] к уравнению следующего вида (приводим его сначала в обычных единицах измерения; радиус кривизны пространства обозначаем как *p*; радиальная переменная r получена делением на радиус кривизны $r=R/\rho$):

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\left(\frac{\varepsilon\rho}{\hbar c}-\frac{1}{2}\frac{k\rho^3}{\hbar c}\,\mathrm{th}^2 r\right)^2-\frac{m^2c^2\rho^2}{\hbar^2}\right]F=0\,. \qquad (1)$$

Явное представление этого уравнения можно упростить, если использовать энергию покоя как единицу измерения энергии:

$$\frac{\varepsilon\rho}{\hbar c}\frac{\hbar}{mc\rho}=\frac{\varepsilon}{mc^2}=E, \qquad \frac{k\rho^3}{\hbar c}\frac{\hbar}{mc\rho}=\frac{k\rho^2}{mc^2}=K\,, \qquad (2)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\left(E-\frac{K\,\mathrm{th}^2 r}{2}\right)^2-1\right]F=0\,. \qquad (3)$$

Уравнение (3) определяет квадрат обобщенного импульса в виде:

$$p^2=\left(E-\frac{K\,\mathrm{th}^2 r}{2}\right)^2-1\,. \qquad (4)$$

Этот полином 4-й степени раскладывается на множители (требуем, чтобы точки поворота лежали в физической области изменения переменной r):

$$\mathrm{th}\,r_1=\sqrt{\frac{E-1}{K/2}}<1, \qquad \mathrm{th}\,r_2=\sqrt{\frac{E+1}{K/2}}<1,$$

$$\mathrm{th}\,r'_1=-\sqrt{\frac{E-1}{K/2}}>-1, \qquad \mathrm{th}\,r'_2=-\sqrt{\frac{E+1}{K/2}}>-1;$$

$$p^2=\frac{K^2}{4}\,(\mathrm{th}\,r-\mathrm{th}\,r_1)\,(\mathrm{th}\,r-\mathrm{th}\,r_2)\,(\mathrm{th}\,r-\mathrm{th}\,r'_1)\,(\mathrm{th}\,r-\mathrm{th}\,r'_2)\,. \qquad (5)$$

Из требования, чтобы положительные точки поворота лежали в физической области координаты r, следует (рисунок 1):

$$E>1, \qquad E-1<\frac{K}{2}, \qquad E+1<\frac{K}{2}\,. \qquad (6)$$

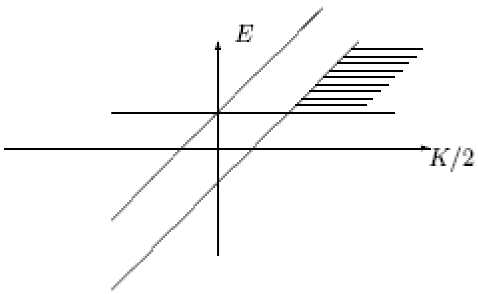

Рисунок 1. – Две положительные точки поворота

При этом значение $p^2(r=\infty)$ следующее:

$$p^2(r=\infty)=(E-\frac{K}{2}-1)(E-\frac{K}{2}+1)>0\,. \qquad (7)$$

Другими словами, имеем квантово-механическую систему с возможностью туннельного эффекта. Типичный график функции $p^2(r)$ показан на рисунке 2 (пусть $K=8,\ E=2$ – это согласуется с (6)). Поведение кривой обобщенного импульса говорит, что здесь с точки зрения квантовой механики реализуется ситуация возможного туннельного эффекта.

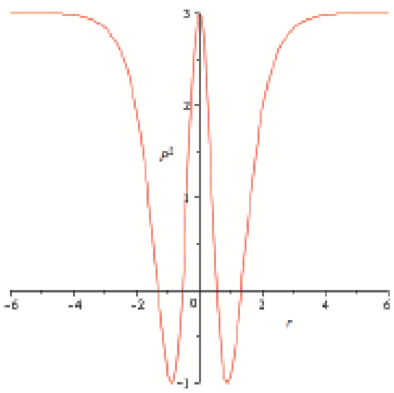

Рисунок 2. – График кривой $p^2(r)$, физическая область $r>0$

Рассмотрим дифференциальное уравнение (3) с точки зрения принадлежности его к известному классу уравнений. Для этого вводим новую переменную

$$z=\mathrm{th}^2 r, \quad \frac{dz}{dr}=2\tanh r\frac{1}{\cosh^2 r}=2\sqrt{z}(1-z), \quad \frac{d}{dr}=2\sqrt{z}(1-z)\frac{d}{dz},$$

$$\left(4\sqrt{z}(1-z)\frac{d}{dz}\sqrt{z}(1-z)\frac{d}{dz}+E^2-1-EKz+z^2\frac{K^2}{4}\right)F=0;$$

в результате получаем уравнение

$$\frac{d^2F}{dz^2}+\left(\frac{1}{2z}+\frac{1}{z-1}\right)\frac{dF}{dz}+\left(\frac{\alpha}{z}+\frac{\beta}{z-1}+\frac{\gamma}{(z-1)^2}\right)F=0,$$

$$\alpha=\frac{E^2-1}{4}, \quad \beta=\frac{K^2/4}{4}-\frac{E^2-1}{4}, \quad \gamma=\frac{-1+(E-K/2)^2}{4}. \tag{8}$$

С использованием подстановки $F(z)=z^A(z-1)^B f(z)$ уравнение (8) принимает вид:

$$f''+\left(\frac{2A+1/2}{z}+\frac{2B+1}{z-1}\right)f'+\left(\frac{A(A-1/2)}{z^2}+\frac{B^2+\gamma}{(z-1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha-2AB-B/2-A}{z}+\frac{\beta+2AB+B/2+A}{z-1}\right)f=0. \tag{9}$$

При A и B, выбранных согласно (обращаем внимание, что под корнем стоят положительные параметры – см. (6))

$$A=0,\frac{1}{2}, \qquad B=\pm\sqrt{-\gamma}=\pm\frac{\sqrt{1-(E-K/2)^2}}{2}, \tag{10}$$

уравнение (9) упрощается

$$f''+\left(\frac{2A+1/2}{z}+\frac{2B+1}{z-1}\right)f'+$$

$$+\left(\frac{\alpha-2AB-B/2-A}{z}+\frac{\beta+2AB+B/2+A}{z-1}\right)f=0 \tag{11}$$

и является вырожденным уравнением Гойна [1; 2]

$$\frac{d^2H}{dz^2}+\left(-t+\frac{c}{z}+\frac{d}{z-1}\right)\frac{dH}{dz}+\frac{\lambda-az}{z(z-1)}H=0 \tag{12}$$

с параметрами

$$t=0, \qquad c=2A+1/2, \qquad d=2B+1,$$
$$a=-(\alpha+\beta), \quad \lambda=2AB+A+B/2-\alpha. \tag{13}$$

Заметим, что уравнение (8) определяет квадрат обобщенного импульса

$$p^2(z)=\frac{\alpha}{z}+\frac{\beta}{z-1}+\frac{\gamma}{(z-1)^2} \tag{14}$$

со следующим поведением около особых точек:

$$z\to 0\ (r\to 0), \qquad p^2\sim\frac{E^2-1}{z} \to +\infty\ (E^2>1);$$
$$z\to 1\ (r\to\infty), \quad p^2\sim\frac{\gamma}{(z-1)^2}=\frac{[(E-\frac{K}{2})^2-1]}{4(1-z)^2}\to+\infty \quad \left(\left(E-\frac{K}{2}\right)^2>1\right)$$

Исследуем поведение кривой для (эффективного) квадрата обобщенного импульса

$$p^2(z)=\frac{(E-Kz/2)^2-1}{4z(1-z)^2}. \tag{15}$$

Точки поворота – решения уравнения $p^2\ (z)=0$ – задаются равенствами

$$z_1=\frac{2(E-1)}{K}, \qquad z_1=\frac{2(E+1)}{K}. \tag{16}$$

Отмечаем, что два положительных корня могут возникнуть только при $E>1$ – это согласуется с тем, что уровни энергии в нерелятивистском приближении положительные.

Найдем условия того, что точки поворота лежат в физической области переменной y:

$$y_1=\frac{2(E-1)}{K}<1 \quad \Rightarrow \quad (E-1)<\frac{K}{2}, \qquad y_1=\frac{2(E+1)}{K} \quad \Rightarrow \quad (E+1)<\frac{K}{2}.$$

На рисунке 3 приведен типичный график квадрата обобщенного импульса.

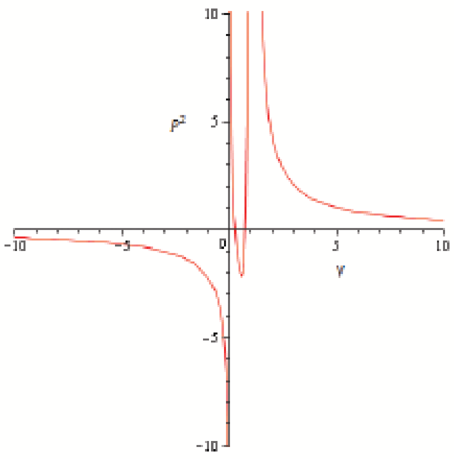

Рисунок 3. – График функции $p^2(r)$, $K=8,\ E=2$

Релятивистская частица в поле осциллятора в пространстве Минковского

Для сравнения рассмотрим аналогичную задачу в плоском пространстве. В безразмерных единицах ее можно описать уравнением

$$p^2 = (E - \frac{Kr^2}{2})^2 - 1. \tag{17}$$

Соответствующий полином 4-й степени раскладывается на множители

$$p^2 = \left(E - \frac{Kr^2}{2} - 1\right)\left(E - \frac{Kr^2}{2} + 1\right).$$

Будем исследовать область $E > 1$ (так как в нерелятивистском пределе уровни энергии положительные). Точки поворота обозначим как

$$r_1 = \sqrt{\frac{E-1}{K/2}}, \quad r_2 = \sqrt{\frac{E+1}{K/2}}, \quad r'_1 = -\sqrt{\frac{E-1}{K/2}}, \quad r'_2 = -\sqrt{\frac{E+1}{K/2}}, \tag{18}$$

$$p^2 = \frac{K^2}{4}(r - r_1)(r - r_2)\,(r - r'_1)(r - r'_2)\,.$$

Опишем точки локального экстремума (см. рисунок 4):

$$\frac{d}{dr}p^2 = 2\left(E - \frac{Kr^2}{2}\right)(-Kr) = 0, \qquad r_{extr} = 0, \pm\sqrt{\frac{2E}{K}}.$$

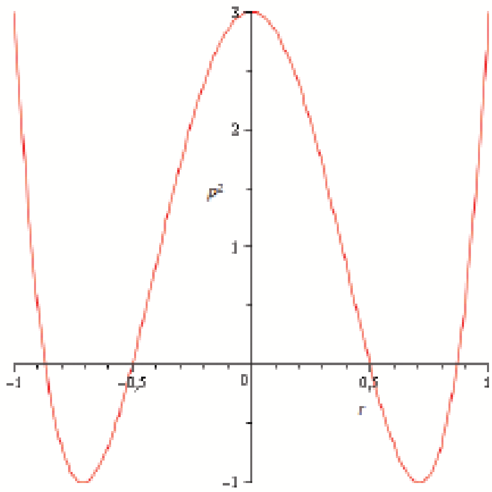

Рисунок 4. – Кривая $p^2(r)$ в плоском пространстве

Здесь мы также имеем квантово-механическую систему с квазистационарными состояниями и возможностью туннельного эффекта. Выясним принадлежность этого уравнения к известным классам. Уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + (\varepsilon - \frac{kr^2}{2})^2 - M^2\right)F_2 = 0$$

в переменной $y = r^2$ примет вид:

$$\left(4y\frac{d^2}{dy^2} + 2\frac{d}{dy} + \varepsilon^2 - M^2 - \varepsilon ky + \frac{k^2y^2}{4}\right)F_2 = 0\,. \tag{19}$$

Пусть для простоты $k = 1$ (в общем случае замена переменной и решение выглядят сложнее). Сделаем замену переменной $y = 3^{-1/3}\,i\,r$:

$$\frac{d^2F_2}{dy^2} - 3^{2/3}\left[\left(\varepsilon + \frac{3^{2/3}y^2}{2}\right)^2 - M^2\right]F_2 = 0. \qquad (20)$$

Ищем решение в виде:

$$F_2(y) = e^{Ay}e^{By^3}\ f(y), \qquad \frac{d^2 f}{dy^2} - (-2A - 6By^2)\frac{df}{dy} +$$

$$+\left[A^2 - 3^{2/3}\varepsilon^2 + 3^{2/3}M^2 + (6AB - 3^{4/3}\varepsilon)y^2 + 6By + (-\frac{9}{4} + 9B^2)y^4\right] f = 0.$$

При A, B, выбранных согласно $A = -3^{1/3}\varepsilon, \quad B = -\dfrac{1}{2},$ уравнение упрощается

$$\frac{d^2 f}{dy^2} - (3y^2 + 2\cdot 3^{1/3}\varepsilon)\frac{df}{dy} - \left[3y - 3^{2/3}M^2\right] f = 0 \qquad (21)$$

и является уравнением для трижды вырожденной функции Гойна $H(\alpha, \beta, \gamma; z)$

$$\frac{d^2H}{dz^2} - (3z^2 + \gamma)\frac{dH}{dz} - [(3-\beta)z - \alpha]\,H = 0$$

с параметрами

$$\alpha = 3^{2/3}M^2, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 2\cdot 3^{1/3}\varepsilon; \qquad (22)$$

при других значениях $k \neq 1$ также будем иметь равенство $\beta = 0$.

Можно проследить за переходом от релятивистского описания к нерелятивистскому. Ограничимся случаем плоского пространства. Релятивистский обобщенный импульс в квадрате равен

$$p^2 = \left(\varepsilon - \frac{Kr^2}{2}\right)^2 - M^2 = \left[M + E - \frac{Kr^2}{2}\right]^2 - M^2 =$$

$$= 2M\left(E - \frac{Kr^2}{2}\right) + 2M\left(E - \frac{Kr^2}{2}\right)\frac{(E - \frac{Kr^2}{2})}{2M}. \qquad (23)$$

Нерелятивистская величина квадрата импульса равна

$$p_0^2 = 2M\left(E - \frac{Kr^2}{2}\right).$$

Чтобы две величины мало различались около $r = 0$, необходимо требовать

$$2ME + 2ME\,\frac{E}{2M} \approx 2ME \qquad \Rightarrow \qquad E << 2M\,. \qquad (24)$$

Чтобы две величины мало различались при других значениях переменной r, нужно предполагать (учитываем и предыдущее неравенство)

$$\frac{(E - \frac{Kr^2}{2})}{2M} << 1 \qquad \Rightarrow \qquad r^2 << \frac{4M}{K}\,. \qquad (25)$$

Конфлюэнтное уравнение Гойна

Исходим из канонической формы уравнения

$$\frac{d^2H}{dz^2} + \left(-t + \frac{c}{z} + \frac{d}{z-1}\right)\frac{dH}{dz} + \frac{-az + \lambda}{z(z-1)}\,H = 0\,. \qquad (26)$$

Точки $z = 0,\ 1$ – регулярные особенности. Точка $z = \infty$ – иррегулярная особенность, ее ранг равен $R(z = \infty) = 2$.

Построим основной степенной ряд в окрестности точки $z=0$. Для этого запишем уравнение в виде:

$$(z^2-z)\frac{d^2H}{dz^2}+[-t\,z^2+(t+d+c)\,z-c]\frac{dH}{dz}+(\lambda-a\,z)H=0\,. \tag{27}$$

При построении решений в виде степенного ряда в уравнении возникнут следующие степени переменной z: z^{k+1}, z^k, z^{k-1}; т. е. возникнут 3-членные рекуррентные соотношения. Найдем их. Для этого учтем равенства:

$$H=\sum_{k=0}^{\infty}d_k z^k\,,\quad H'=\sum_{k=1}^{\infty}kd_k z^{k-1},\quad H''=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)d_k z^{k-2}\,;$$

тогда уравнение для H дает

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)d_n z^n-\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nd_{n+1}z^n-$$

$$-t\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)d_{n-1}z^n+(t+d+c)\sum_{n=1}^{\infty}nd_n z^n-c\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)d_{n+1}z^n+$$

$$+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}d_n z^n-a\sum_{n=1}^{\infty}d_{n-1}z^n=0\,.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при всех степенях переменной z, получаем трехчленные рекуррентные соотношения:

$$n=0,\qquad c\,d_1+\lambda\,d_0=0\,,$$

$$n=1,\qquad -ad_0+(t+c+d+\lambda)-2(1+c)d_2=0\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[t\,(n-1)+a]\,d_{n-1}-[\,n(n-1+t+d+c)+\lambda\,]\,d_n+(n+1)\,(n+c)\,d_{n+1}=0\,.$$

Можно убедиться, что случай $n=1$ уже описывается общей рекуррентной формулой. Таким образом, основной ряд конфлюэнтного уравнения Гойна определяется рекуррентными соотношениями:

$$c\,d_1+\lambda\,d_0=0\,,$$

$$-ad_0+(t+c+d+\lambda)-2(1+c)d_2=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_n d_n-(Q_n+\lambda)\,d_{n+1}+R_n\,d_{n+2}=0\,, \tag{28}$$

где

$$P_n=t\,(n-1+a)\,,\quad Q_n=n(n-1+t+d+c)\,,\quad R_n=(n+1)\,(n+c)\,. \tag{29}$$

Рекуррентное соотношение переписывается в форме:

$$\frac{1}{n^2}P_n-\frac{1}{n^2}(Q_n+\lambda)\,\frac{d_{n+1}}{d_n}+\frac{1}{n^2}R_n\,\frac{d_{n+2}}{d_{n+1}}\frac{d_{n+1}}{d_n}=0\,;$$

отсюда при устремлении $n\to\infty$, получаем квадратичное уравнение

$$-r+r^2=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{d_{n+2}}{d_{n+1}}=r\,.$$

Отсюда заключаем, что согласно методу Пуанкаре–Перрона (гарантированный) радиус сходимости степенного ряда равен $R_{conv}=1$. Существует возможность обрывания ряда до полинома. Пусть

$$P_{n+1}=0\,,\qquad a=-n\,,\quad n\in\{0,1,2,\ldots\}\,. \tag{30}$$

Тогда, если λ выбран так, что $d_{n+1}=0$, то из рекуррентных соотношений получаем

$$0 \cdot d_n - (Q_{n+1} + \lambda) \cdot 0 + R_{n+1}\, d_{n+2} = 0 \quad \Rightarrow \quad d_{n+2} = 0\,;$$

следовательно, все последующие коэффициенты при степенях ряда обращаются в ноль, т.е. ряд превращается в полином степени n. Если ограничиться только наложением требования $a = -n$, не добавляя условия $d_{n+1} = 0$, получим (неполиномиальные) трансцендентные конфлюэнтные функции Гойна. Можно убедиться, что второе условие $d_{n+1} = 0$ эквивалентно полиномиальному уравнению степени $(n+1)$ относительно параметра λ. Действительно,

$$\begin{gathered}
n = 0, \qquad c\, d_1 - \lambda\, d_0 = 0\,, \\
P_1 d_0 - (Q_1 + \lambda)\, d_1 + R_1\, d_2 = 0\,, \\
P_2 d_1 - (Q_2 + \lambda)\, d_2 + R_2\, d_3 = 0\,, \\
P_3 d_2 - (Q_3 + \lambda)\, d_3 + R_3\, d_4 = 0\,, \\
P_4 d_3 - (Q_4 + \lambda)\, d_4 + R_4\, d_5 = 0\,, \\
\ldots \\
P_n d_{n-1} - (Q_n + \lambda)\, d_n + R_n\, d_{n+1} = 0\,, \\
P_{n+1} d_n - (Q_{n+1} + \lambda)\, d_{n+1} + R_{n+1}\, d_{n+2} = 0.
\end{gathered} \tag{31}$$

Пусть $a = -n$, $P_{n+1} = 0$, пусть дополнительно $d_{n+1} = 0 \Rightarrow d_{n+2} = 0$. Это обеспечивает обрывание ряда до полинома степени n. Возникающую систему уравнений можно представить в матричном виде

$$\begin{vmatrix}
-\lambda & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\
P_1 & -(Q_1+\lambda) & R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\
0 & P_2 & -(Q_2+\lambda) & R_2 & 0 & 0 & 0 & . & . \\
0 & 0 & P_3 & -(Q_3+\lambda) & R_3 & 0 & 0 & . & . \\
0 & 0 & 0 & P_4 & -(Q_4+\lambda) & R_4 & 0 & 0 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{n-2} & -(Q_{n-2}+\lambda) & R_{n-2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{n-1} & -(Q_{n-1}+\lambda) & R_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_n & -(Q_n+\lambda)
\end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ . \\ d_{n-2}) \\ d_{n-1} \\ d_n \end{vmatrix} = 0\,. \tag{32}$$

Условие существования нетривиальных решений у линейной однородной системы имеет вид равенства нулю ее определителя, что дает алгебраическое уравнение степени $(n+1)$ относительно параметра λ.

Триконфлюэнтное уравнение Гойна

Исходим из канонической формы триконфлюэнтного уравнения Гойна [3]:

$$\frac{d^2H}{dz^2}+(-z^2-t)\frac{dH}{dz}+(\lambda-az)H=0\,. \tag{33}$$

Здесь имеем единственную особую точку $z=\infty$. Пусть $z=y^{-1}$, тогда

$$\frac{d^2H}{dy^2}+\left(\frac{1}{y^4}+\frac{t}{y^2}+\frac{2}{y}\right)\frac{dH}{dy}+\left(\frac{\lambda}{y^4}-\frac{a}{y^5}\right)H=0. \tag{34}$$

Ранг этой сингулярности равен

$$R(z=\infty)=\max\left\{4,\frac{5}{2}\right\}=4\,.$$

Делаем подстановку

$$H(y)=y^A\exp^{[By^{-1}+Cy^{-2}+Dy^{-3}]}f(y)\,. \tag{35}$$

Получим следующее уравнение:

$$y^5\frac{d^2f}{dy^2}+\Big[\,2(A+1)\,y^4+(t-2B)\,y^3-4C\,y^2+(1-6D)\,y\,\Big]\frac{df}{dy}+$$
$$+\Big[A(A+1)\,y^3+A(t-2B)\,y^2+(-4AC+B^2-tB+2C+\lambda)\,y+$$
$$+(-6AD+4BC-2tC+A+6D-a)+$$
$$+\frac{6BD+4C^2-3Dt-B}{y}+\frac{2C\,(6D-1)}{y^2}+\frac{3D\,(3D-1)}{y^3}\Big]\,f=0. \tag{36}$$

Занулим коэффициенты при y^{-3},y^{-2},y^{-1},y^0:

$$D(3D-1)=0\,,\quad C(6D-1)=0\,,$$
$$6BD+4C^2-3Dt-B=0\,,$$
$$-6AD+4BC-2tC+A+6D-a=0\,.$$

Из первых двух уравнений следуют два решения:

1) $C_1=0$, $D_1=0$, 2) $C_2=0$, $D_2=1/3$.

Третье уравнение дает $B_1=0,\ B_2=t$; четвертое уравнение дает $A_1=a,\ A_2=2-a$.

Таким образом, находим два решения:

$$1)\qquad A=a\,,\quad B=0\,,\quad C=0\,,\quad D=0\,,\quad H(y)=y^a f(y)\,; \tag{37}$$

$$2)\qquad A=2-a\,,\quad B=t\,,\quad C=0\,,\quad D=1/3\,,$$
$$H(y)=y^{2-a}\exp^{[ty^{-1}+\frac{1}{3}y^{-3}]}f(y)\,. \tag{38}$$

При этом уравнение для $f(y)$ упрощается и принимает соответственно вид:

$$1)\qquad y^4f''+[2(a+1)y^3+ty^2+1]f'+$$
$$+[a(a+1)y^2+aty+\lambda]\,f=0\,; \tag{39}$$

$$2)\qquad y^4f''+[2(3-a)y^3-ty^2-1]f'+$$
$$+[(2-a)(3-a)y^2-t(2-a)y+\lambda]\,f=0\,. \tag{40}$$

Если раскладывать функцию $f(y)$ в степенной ряд, то в уравнениях (39) и (40) возникнут степени

$$y^{n+2},\quad y^{n+1},\quad y^n\,,\quad y^{n-1},$$

что приведет к 4-членным рекуррентным соотношениям. Получим эти соотношения.

Для сокращения записи и большей общности рассмотрим уравнение со структурой (обращаем внимание, что в уравнениях (39) и (40) параметр $\gamma = 0$):

$$y^4 f'' + (\alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta) f' + (\mu y^2 + \sigma y + \lambda) f = 0 .$$

Ищем решение в виде ряда:

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} d_k y^k , \quad f' = \sum_{k=1}^{\infty} k d_k y^{k-1} , \quad f'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) d_k y^{k-2} ;$$

в результате получаем

$$\sum_{n=4}^{\infty} (n-2)(n-3)) d_{n-2} y^n +$$

$$+\alpha \sum_{n=3}^{\infty} (n-2) d_{n-2} y^n + \beta \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) d_{n-1} y^n + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} n d_n y^n + \delta \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) d_{n+1} y^n +$$

$$+\mu \sum_{n=2}^{\infty} d_{n-2} y^n + \sigma \sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1} y^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} d_n y^n = 0 .$$

Приравниваем к нулю коэффициенты при всех степенях:

$$\sum_{n=4}^{\infty} (n-2)(n-3)) d_{n-2} +$$

$$+\alpha \sum_{n=3}^{\infty} (n-2) d_{n-2} + \beta \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) d_{n-1} + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} n d_n + \delta \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) d_{n+1} +$$

$$+\mu \sum_{n=2}^{\infty} d_{n-2} + \sigma \sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} d_n = 0 ,$$

дальше находим рекуррентные соотношения:

$$n = 0, \qquad \lambda d_0 + \delta d_1 = 0,$$

$$n = 1, \qquad \sigma d_0 + (\gamma + \lambda) d_1 + 2\delta d_2 = 0,$$

$$n = 2, \qquad \mu d_0 + (\beta + \sigma) d_1 + (2\gamma + \lambda) d_2 + 3\delta d_3 = 0,$$

$$n = 3, \qquad (\alpha + \mu) d_1 + (2\beta + \sigma) d_2 + (3\gamma + \lambda) d_3 + 4\delta d_4 = 0, \tag{41}$$

т.е.

$$n \geq 2, \qquad [(n-2)(n-3) + \alpha(n-2) + \mu] d_{n-2} +$$

$$+[\beta(n-1) + \sigma] d_{n-1} + (\gamma n + \lambda) d_n + \delta(n+1) d_{n+1} = 0. \tag{42}$$

При $n \to \infty$ рекуррентное соотношение дает

$$R^3 = 0 , \qquad R^3 = \lim_{n\to\infty} \frac{d_{n-2}}{d_{n-1}} \frac{d_{n-1}}{d_n} \frac{d_n}{d_{n+1}} .$$

Это означает, что радиус сходимости степенного ряда равен бесконечности.

Таким образом, в окрестности точки $z = \infty$ строятся два линейно независимых решения (i = 1, 2):

$$H_i(z) = \frac{1}{z^A} \exp^{(Bz + Cz^2 + Dz^3)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_k}{z^n} , \tag{43}$$

где

$$A_1 = a , \quad B_1 = 0 , \quad C_1 = 0 , \quad D_1 = 0 ;$$

$$A_2 = 2 - a , \quad B_2 = t , \quad C_2 = 0 , \quad D_2 = 1/3 . \tag{44}$$

Эти ряды сходятся везде, кроме точки $z = 0$.

Заключение

На основе использования уравнения Клейна – Фока – Гордона выполнено аналитическое исследование релятивистской квантово-механической задачи о частице (со спином ноль) в поле осциллятора на фоне плоского пространства Минковского. Задача сведена к трижды вырожденному уравнению Гойна с одной иррегулярной особой точкой ранга 4 в $z = \infty$. Приведены основные свойства локальных решений в окрестности этой особой точки, описаны 34-членные рекуррентные соотношения для возникающих степенных рядов. Качественный анализ показал, что у этой системы могут быть только квазистационарные состояния с возможностью туннелирования частицы через потенциальный барьер. Аналогичный анализ выполнен в случае использования геометрии гиперболического пространства Лобачевского. В этой системе также возможны только квазистационарные связанные состояния, ее аналитическое описание сводится к вырожденному уравнению Гойна с двумя регулярными и одной иррегулярной ранга 2 особенностями. Выполненный анализ распространен также на случай сферической геометрии Римана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ronveaux, A. Heun's Differential Equations / A. Ronveaux. – Oxford : Oxford Univ. Press, 1995.

2. Slavyanov, S. Yu. Special functions. A unified theory based on singularities / S. Yu. Slavyanov, W. Lay. – Oxford : Oxford Univ. Press, 2000.

3. Квантовая механика в космологических моделях де Ситтера / О. В. Веко [и др.]. – Минск : Беларуская навука, 2015. – 560 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 23.09.2015

Ovsiyuk E.M., Red'ko A.N., Red'kov V.M. **Relativistic Scalar Particle in Oscillator Field, Studying in Terms of Heun Functions**

On the basis of the Klein – Gordon – Fock equation performed analytical study of relativistic quantum-mechanical problem of a particle (with spin zero) in the oscillator on a background of flat Minkowski space. The problem is reduced to triply degenerate Heun equation with one irregular singular point of rank 4 in $z = \infty$. *Shows the basic properties of local solutions in a neighborhood of this singular point, described 34-membered recurrence relations for the emerging power series. Qualitative analysis showed that this system can only be quasi-stationary states of the particle with the ability of tunneling through the potential barrier. A similar analysis was done in the case of the hyperbolic geometry of Lobachevsky space. In this system also possible only quasistationary bound states, its analytical description is reduced to degenerate Heun equation with two regular and one irregular rank 2 singularities.*