УДК 539.12

Е.М. Овсиюк[1], О.В. Веко[2], Я.А. Войнова[3], В.В. Кисель[4], В.М. Редьков[5]

[1]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. общей физики и методики преподавания физики Мозырского государственного университета имени И.П. Шамякина

[2]учитель физики гимназии г. Калинковичи

[3]учитель физики Качищанской средней школы Ельского района

[4]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники

[5]д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник лаборатории теоретической физики Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси

ОБ ОТРАЖЕНИИ ЧАСТИЦ СПИНА ½ «ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СРЕДОЙ» ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО, УЧЕТ ВНЕШНЕГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Ранее было показано, что геометрия пространства Лобачевского может рассматриваться в электродинамическом контексте как основа для моделирования эффективной среды, действующей как распределенное в пространстве и ориентированное перпендикулярно оси z идеальное зеркало. В настоящей работе аналог этого эффекта исследован для поля со спином ½. В явном виде построены решения уравнения Дирака, описывающие ситуацию, когда поле отражается от (геометрического) эффективного потенциального барьера, не проникая за него. Глубина проникновения в такую «среду» определяется характеристиками квантовых состояний фермиона и радиусом кривизны пространства Лобачевского; для решений с $k_1 = 0,\ k_2 = 0$ эффективный отражающий барьер исчезает. Проведен учет внешнего ориентированного вдоль оси z электрического поля. Задача приводится к дифференциальному уравнению второго порядка с четырьмя особыми точками, причем одна особая точка на бесконечности – нерегулярная ранга 3. При устранении электрического поля выведенное уравнение упрощается до вырожденного уравнения Гойна, при этом появляется возможность построить его решения в терминах вырожденных гипергеометрических функций.

Введение

Неевклидовая геометрия пространства Лобачевского может рассматриваться как основа для моделирования эффективной среды в электродинамическом контексте [1]. В частности, геометрия Лобачевского при использовании квазидекартовых координат эффективно описывает вполне определенную материальную среду; эффективные материальные уравнения имеют вид

$$D^i = \varepsilon_0 \varepsilon^{ik} E_k\,, \qquad B_i = \mu_0 \mu^{ik} H^k\,, \quad \varepsilon^{ik}(x) = \mu^{ik}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2z} \end{vmatrix}; \qquad (1)$$

среда неоднородна вдоль оси z. Уравнения Максвелла в этих координатах пространства Лобачевского можно привести к задаче исследования одного дифференциального уравнения [2; 3], которое можно сопоставить с одномерным уравнением Шредингера

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon - U(z) \right) \varphi(z) = 0 \qquad (2)$$

с потенциальной функцией $U(z) = (a^2 + b^2) e^{2z}$, описывающей эффективную силу отталкивания налево $F_z = -2(a^2 + b^2) e^{2z}$. В контексте квантовой механики такое уравнение описывает движение частицы в потенциальном поле, плавно растущем до бесконечности при устремлении координаты z к бесконечности; частица отражается от этого барьера, не проникая за него.

Аналогичная ситуация реализуется и в электродинамике. Таким образом, геометрия Лобачевского действует эффективно как распределенное в пространстве, ориентированное перпендикулярно оси z идеальное зеркало.

Этот анализ был обобщен [4] на случай нерелятивистской шредингеровской частицы в пространстве Лобачевского; закономерности отражения такой частицы в поле эффективной (геометрической) среды похожи на те, которые имеют место для электромагнитного поля. Некоторое неполное исследование такой задачи было сделано в [5–7] для релятивистского уравнения Дирака: формальные решения уравнения в пространстве Лобачевского были построены в терминах вырожденных гипергеометрических функций, хотя явно описать эффект отражения дираковских частиц такой средой не удалось. В настоящей работе этот эффект отражения спинорных частиц доказан. Кроме того, ранее была решена задача о поведении шредингеровской частицы в пространстве Лобачевского с учетом внешнего электрического поля [8; 9]. В настоящей работе проведено обобщение этого исследования для случая частицы со спином ½. В частности, удается привести задачу к сложному обыкновенному дифференциальному уравнению с четырьмя особыми точками, причем одна особенность иррегулярная ранга 3. При устранении внешнего электрического поля выведенное уравнение упрощается до вырожденного уравнения Гойна с учетом результатов [5–7] появляется возможность построить решения этого уравнения в терминах вырожденных гипергеометрических функций.

1. Разделение переменных

Рассмотрим дираковскую частицу в электрическом поле на фоне пространства Лобачевского на основе квазидекартовых координат

$$dS^2 = dt^2 - e^{-2z}(dx^2 + dy^2) - dz^2 , \quad \sqrt{-g} = e^{-2z} , \quad z \in (-\infty, +\infty). \tag{3}$$

Найдем описание электрического поля как решения уравнений Максвелла в этом пространстве:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \sqrt{-g} F^{\alpha\beta} = 0, \quad A_{\alpha} = (A(z), 0, 0, 0), \quad F^{30} = -\frac{dA}{dz} ;$$

получаем уравнение с простым решением

$$\frac{1}{e^{-2z}} \frac{d}{dz} e^{-2z} \frac{dA}{dz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dz} = e^{2z} c_1, \quad A = \frac{c_1}{2} e^{2z} + c_2 .$$

Из требования, чтобы в пределе малых значений z получалось известное представление однородного электрического поля, находим следующее представление:

$$A(z) = \frac{E}{2}(e^{2z} - 1), \quad F_{30} = E e^{2z} . \tag{4}$$

Будем исходить из общековариантной формы уравнения Дирака [10]

$$\left[\gamma^{a} \left(e_{(a)}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} + \frac{1}{2} \Big(\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \sqrt{-g} e_{(a)}^{\alpha} \Big) + ieA_{(a)} \right) - m \right] \Psi(x) = 0; \tag{5}$$

используем тетраду $e_{(a)}^{\beta} = \text{diag}\,(1, e^{z}, e^{z}, 1)$; уравнение (5) принимает вид (x, y, z – безразмерные)

$$\left[i\gamma^0\left(\frac{\partial}{\partial t}+ieA(z)\right)+i\gamma^1 e^z\,\frac{\partial}{\partial x}+i\gamma^2 e^z\,\frac{\partial}{\partial y}+i\gamma^3\left(\frac{\partial}{\partial z}-1\right)-M\right]\Psi=0\,. \qquad (6)$$

С оператором из (6) коммутируют следующие три: $i\partial_t, -i\partial_x, -i\partial_y$; решения ищем в виде

$$\Psi^{\varepsilon,k_1,k_2}=e^{-i\varepsilon t}\;e^{ik_1x}\;e^{ik_2y}\begin{vmatrix} f_1(z)\\ f_2(z)\\ f_3(z)\\ f_4(z)\end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Используя матрицы Дирака в спинорном базисе, находим 4 уравнения для функций $f_i(z), i=1,2,3,4$ (используем обозначения: $k_1=a,\ k_2=b$; также пусть $f_i=e^zF_i$):

$$D_-F_3=MF_1-e^z(a-ib)F_4\,,\quad D_-F_2=e^z(a+ib)F_1+MF_4\,; \qquad (8)$$

$$D_+F_4=MF_2-e^z(a+ib)F_3\,,\quad D_+F_1=e^z(a-ib)F_2+MF_3\,, \qquad (9)$$

где $D_-=-i\dfrac{d}{dz}+\varepsilon-eA(z),\quad D_+=i\dfrac{d}{dz}+\varepsilon-eA(z)$.

Решения систем (8) и (9) выглядят так:

$$F_1=\frac{1}{\varphi}[MD_-F_3+e^z(a-ib)D_-F_2]\,,\quad F_4=\frac{1}{\varphi}[MD_-F_2-e^z(a+ib)D_-F_3]\,, \qquad (10)$$

$$F_2=\frac{1}{\varphi}[MD_+F_4+e^z(a+ib)D_+F_1]\,,\quad F_3=\frac{1}{\varphi}[MD_+F_1-e^z(a-ib)D_+F_4]\,, \qquad (11)$$

где $\varphi=M^2+e^{2z}(a^2+b^2)$. Дальше получаем

$$D_+\left[\frac{MD_-F_2}{M^2+e^{2z}(a^2+b^2)}-\frac{e^z(a+ib)D_-F_3}{M^2+e^{2z}(a^2+b^2)}\right]=MF_2-e^z(a+ib)F_3\,,$$

$$D_+\left[\frac{e^z(k_1-ib)D_-F_2}{M^2+e^{2z}(a^2+b^2)}+\frac{MD_-F_3}{M^2+e^{2z}(a^2+b^2)}\right]=e^z(a-ib)F_2+MF_3\,.$$

Отсюда следует система зацепляющихся уравнений второго порядка:

$$\left\{\varphi\frac{d^2}{dz^2}-e^{2z}(a^2+b^2)\frac{d}{dz}+\varphi[(eA-\varepsilon)^2-ieA']+ie^{2z}(a^2+b^2)(eA-\varepsilon)-\varphi^2\right\}F_3=$$

$$=Me^z\left(-\frac{d}{dz}+i(eA-\varepsilon)\right)(a-ib)F_2\,,$$

$$\left\{\varphi\frac{d^2}{dz^2}-e^{2z}(a^2+b^2)\frac{d_2}{dz}+\varphi[(eA-\varepsilon)^2-ieA']+ie^{2z}(a^2+b^2)(eA-\varepsilon)-\varphi^2\right\}F_2=$$

$$=Me^z\left(\frac{d}{dz}-i(eA-\varepsilon)\right)(a+ib)F_3\,.$$

2. Построение решений

Обозначив оператор второго порядка слева как Δ, уравнения можно представить так:

$$\Delta F_2 = +Me^z \left(\frac{d}{dz} - i(eA-\varepsilon) \right)(a+ib)F_3, \quad \Delta F_3 = -Me^z \left(\frac{d}{dz} - i(eA-\varepsilon) \right)(a-ib)F_2 .$$

Перейдем к матричной форме

$$\Delta \begin{vmatrix} F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = Me^z \left(\frac{d}{dz} - i(eA-\varepsilon) \right) \begin{vmatrix} 0 & (a+ib) \\ -(a-ib) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_2 \\ F_3 \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Оператор справа можно диагонализировать:

$$G = SF, \quad S\Delta S^{-1} G = A_0 (SAS^{-1}) G = A_0 A' G,$$

$$SA = A'S \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix}, \tag{13}$$

$$P^{-1} A P = J, \quad \begin{vmatrix} A_1 & a-ib \\ a+ib & -A_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A_2 & a-ib \\ a+ib & -A_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{vmatrix} = 0 .$$

Отсюда следует собственные значения для A_1, A_2 и ограничения на элементы матрицы s_{ij}:

$$A_1 = +i\sqrt{(a+ib)(a-ib)}, \quad (a+ib)s_{11} = +i\sqrt{(a+ib)(a-ib)}\; s_{12},$$
$$A_2 = -i\sqrt{(a+ib)(a-ib)}, \quad (a+ib)s_{21} = -i\sqrt{(a+ib)(a-ib)}\; s_{22}.$$

Выберем решение:

$$S = \begin{vmatrix} \sqrt{a-ib} & -i\sqrt{a+ib} \\ -i\sqrt{a-ib} & \sqrt{a+ib} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} G_2 \\ G_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{a-ib} & -i\sqrt{a+ib} \\ -i\sqrt{a-ib} & \sqrt{a+ib} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_2 \\ F_3 \end{vmatrix}. \tag{14}$$

В результате получим два раздельных уравнения второго порядка:

$$\Delta G_2 = Me^z \left(\frac{d}{dz} - i(eA-\varepsilon) \right) \left(i\sqrt{a^2+b^2} \right) G_2, \tag{15}$$

$$\Delta G_3 = Me^z \left(\frac{d}{dz} - i(eA-\varepsilon) \right) \left(-i\sqrt{a^2+b^2} \right) G_3, \tag{16}$$

в явном виде они записываются так:

$$\begin{gathered} \Big\{ \left[M^2 + e^{2z}(a^2+b^2) \right] \frac{d^2}{dz^2} - e^{2z}(a^2+b^2)\frac{d}{dz} + \left[M^2 + e^{2z}(a^2+b^2) \right] [(eA-\varepsilon)^2 - ieA'] + \\ + ie^{2z}(a^2+b^2)(eA-\varepsilon) - \left[M^2 + e^{2z}(a^2+b^2) \right]^2 - \\ - \left(i\sqrt{a^2+b^2} \right) Me^z \left(\frac{d}{dz} - i(eA-\varepsilon) \right) \Big\} G_2 = 0, \end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered} \Big\{ \left[M^2 + e^{2z}(a^2+b^2) \right] \frac{d^2}{dz^2} - e^{2z}(a^2+b^2)\frac{d}{dz} + \left[M^2 + e^{2z}(a^2+b^2) \right] [(eA-\varepsilon)^2 - ieA'] + \\ + ie^{2z}(a^2+b^2)(eA-\varepsilon) - \left[M^2 + e^{2z}(a^2+b^2) \right]^2 + \\ + \left(i\sqrt{a^2+b^2} \right) Me^z \left(\frac{d}{dz} - i(eA-\varepsilon) \right) \Big\} G_3 = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

Различия между уравнениями незначительные, поэтому достаточно исследовать одно из них. В уравнении для G_3 учтем явный вид функции $A(z)$, а затем перейдем к переменной $Z = e^z$:

$$\frac{d^2F_3}{dZ^2} + \left[\frac{1}{Z} + \frac{iM\sqrt{a^2+b^2} - Z\left(a^2+b^2\right)}{Z^2\left(a^2+b^2\right)+M^2}\right]\frac{dF_3}{dZ} +$$

$$+\left[\frac{1}{4}E^2e^2Z^2 - \frac{1}{2}Ee\ \ Ee+i\ \ - Ee\varepsilon - (a^2+b^2) - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{a^2+b^2}\ \ Ee+2\varepsilon}{MZ} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\frac{Ee+2\varepsilon\ \ ^2 - 4M^2}{Z^2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{a^2+b^2}Z - iM\ \ \left[EM^2e + \left(a^2+b^2\right)\ \ Ee+2\varepsilon\ \ \right]}{\left[Z^2\left(a^2+b^2\right)+M^2\right]M}\right]G_3 = 0.$$

Введем сокращающие обозначения и делаем замену переменных (чтобы две сингулярные точки поместить в $\pm i$):

$$K = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{k_1^2+k_2^2}, \quad eE \Rightarrow f\ , \quad Z = \frac{M}{K}x, \quad \frac{M^2}{K^2} \equiv \sigma\ , \tag{19}$$

тогда получим

$$\frac{d^2}{dx^2}G_3 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+i}\right)\frac{d}{dx}G_3 + \left\{\frac{\sigma^2 f^2}{4}x^2 + \frac{\sigma f(f+i)}{2} - \sigma f\varepsilon - M^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{f+2\varepsilon}{2}\frac{1}{x} + \frac{(f+2\varepsilon)^2 - 4M^2}{4}\frac{1}{x^2} + \frac{\sigma f + f + 2\varepsilon}{2}\frac{1}{x+i}\right\}G_3 = 0\,. \tag{20}$$

Чтобы получить результат для функции G_2, нужно в (17) провести формальную замену $K \Rightarrow -K$, а затем перейти к переменной x:

$$\frac{d^2}{dx^2}G_2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-i}\right)\frac{d}{dx}G_2 + \left\{\frac{\sigma^2 f^2}{4}x^2 + \frac{\sigma f(f+i)}{2} - \sigma f\varepsilon - M^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{f+2\varepsilon}{2}\frac{1}{x} + \frac{(f+2\varepsilon)^2 - 4M^2}{4}\frac{1}{x^2} - \frac{\sigma f + f - 2\varepsilon}{2}\frac{1}{x-i}\right\}G_2 = 0\,. \tag{21}$$

У двух уравнений (20), (21) имеем по 4 особых точки: $0, -i, +i, \infty$; причем конечные точки $0, \pm i$ – регулярные, бесконечная $x = \infty$ – нерегулярная. Действительно, делаем замену переменной $X = x^{-1}$, тогда в окрестности точки $X = 0$ уравнение выглядит так:

$$X \to 0, \qquad \left(\frac{d^2}{dX^2} + \frac{3}{X}\frac{d}{dX} + \frac{\sigma^2 f^2}{4}\frac{1}{X^6}\right)F_2 = 0\,,$$

т. е. ранг точки $x = \infty$ равен 3: $\mathrm{Rang}\,(x=\infty) = \mathrm{Max}\left\{1, \frac{6}{2}\right\} = 3$. Анализ ранга сингулярности в точке $x = \infty$ для уравнения (21) ничем не отличается от выполненного. Помня об определении переменной x, отмечаем, что две особые точки $-i,\ +i$ лежат вне физической области изменения переменной $x \in (0, +\infty)$.

Электрическое поле в области $z \to -\infty$ ведет себя так: $A(z) \sim (e^{2z} - 1) \sim \text{const}$; это значит, что в этой области эффект наличия электрического поля должен исчезать. В этой связи рассмотрим случай отсутствия электрического поля во всем пространстве. Этот специальный случай может служить дополнительным контролем корректности вычислений; он представляет и самостоятельный интерес.

Уравнение (21) при $f = eE = 0$ примет существенно более простой вид

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+i} \right) \frac{d}{dx} - M^2 - \frac{\varepsilon}{x} + (\varepsilon^2 - M^2) \frac{1}{x^2} + \frac{\varepsilon}{x+i} \right\} F_3 = 0 . \tag{22}$$

Это уравнение имеет три особые точки $0,\ -i,\ \infty$; точка $x = \infty$ – иррегулярная ранга 2. Действительно, в переменной $X = x^{-1}$ уравнение в окрестности точки $X = 0$ имеет вид

$$\left(\frac{d^2}{dX^2} + \frac{2}{X} \frac{d}{dX} - \frac{M^2}{X^4} + \frac{\varepsilon^2 - M^2}{X^2} \right) F_3 = 0 ;$$

таким образом, речь идет о вырожденном уравнении Гойна [12]. Отмечаем, что в случае нулевой массы $M^2 = 0$ точка $x = \infty$ является регулярной особенностью и тогда уравнение сводится к гипергеометрическому типу.

3. Случай отсутствия электрического поля

Решения свободного уравнения Дирака в квазидекартовых координатах пространства Лобачевского можно построить [5–7] и в гипергеометрических функциях. Исходим из уравнений после разделения переменных

$$-i\varepsilon F_3 - iae^z F_4 - be^z F_4 - \frac{d}{dz} f_3 + iM\ F_1 = 0, \quad -i\varepsilon F_4 - iae^z F_3 + be^z F_3 + \frac{d}{dz} F_4 + iM\ F_2 = 0 ,$$

$$-i\varepsilon F_1 + iae^z F_2 + be^z F_2 + \frac{d}{dz} f_1 + iMF_3 = 0, \quad -i\varepsilon F_2 + iae^z F_1 - be^z F_1 - \frac{d}{dz} F_2 + iMF_4 = 0 .$$

Учтем, что существует оператор, коммутирующий с оператором волнового уравнения:

$$\Sigma = \frac{1}{2} \left(e^z \gamma^2 \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x} + e^z \gamma^3 \gamma^1 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma^1 \gamma^2 \frac{\partial}{\partial z} \right). \tag{23}$$

Из уравнения $\Sigma\,\Psi = p\,\Psi$ получим

$$ae^z F_2 - ibe^z F_2 - i \frac{d}{dz} F_1 = pF_1 , \quad ae^z F_1 + ibe^z F_1 + i \frac{d}{dz} F_2 = pF_2 ,$$

$$ae^z F_4 - ibe^z F_4 - i \frac{d}{dz} F_3 = pF_3 , \quad ae^z F_3 + ibe^z F_3 + i \frac{d}{dz} F_4 = pF_4 .$$

Две системы дифференциальных уравнений нужно рассматривать совместно, отсюда следует линейные уравнения f_i:

$$-i\varepsilon F_3 - ipF_3 + iMf_1 = 0 , \ -i\varepsilon F_4 - ipF_4 + iMF_2 = 0 ,$$

$$-i\varepsilon F_1 + ipF_1 + iMF_3 = 0 , \ -i\varepsilon F_2 + ipf_2 + iMF_4 = 0 .$$

Из условия равенства нулю определителя системы находим два значения для p и соответствующие ограничения на функции F_i:

$$p = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - M^2}\,, \qquad F_3 = \frac{\varepsilon - p}{M} F_1\,, \qquad F_4 = \frac{\varepsilon - p}{M} F_2\,. \tag{24}$$

Учитывая (24), вместо четырех уравнений получаем только два:

$$\left(\frac{d}{dz} - ip\right) F_1 + ie^z (a - ib) F_2 = 0\,, \quad \left(\frac{d}{dz} + ip\right) F_2 - ie^z (a + ib) F_1 = 0\,.$$

Перейдем к переменной $Z = e^z$, $Z \in (0, +\infty)$:

$$\left(\frac{d}{dZ} - \frac{ip}{Z}\right) F_1 + i(a - ib) F_2 = 0\,, \left(\frac{d}{dZ} + \frac{ip}{Z}\right) F_2 - i(a + ib) F_1 = 0\,. \tag{25}$$

Отсюда следуют уравнения второго порядка

$$\left(\frac{d^2}{dZ^2} + \frac{p^2 + ip}{Z^2} - (a^2 + b^2)\right) F_1 = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dZ^2} + \frac{p^2 - ip}{Z^2} - (a^2 + b^2)\right) F_2 = 0. \tag{26}$$

Это уравнения с одной регулярной особенностью в $Z = 0$ и нерегулярной особенностью ранга 2 в точке $Z = \infty$ (при $a^2 + b^2 \neq 0$); т.е. имеем дело с вырожденным гипергеометрическим уравнением. Можно заметить, что формально уравнения связаны операцией комплексного сопряжения, поэтому достаточно исследовать только одно из них.

Для функции $F_1(Z)$ используем подстановку $F_1(Z) = Z^A e^{BZ} \bar{F}_1(Z)$; в результате получаем

$$\bar{F}''_1 + \left(\frac{2A}{Z} + 2B\right) \bar{F}'_1 + \frac{2AB}{Z} \bar{F}_1 + \left(\frac{A(A-1)}{Z^2} + \frac{p^2 + ip}{Z^2}\right) \bar{F}_1 + [B^2 - (a^2 + b^2)] \bar{F}_1 = 0.$$

Фиксируем A, B: $A = +ip,\ 1 - ip,\ B = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$; уравнение для $\bar{F}_1$ упрощается

$$Z \bar{F}''_1 + \ 2A + 2BZ \ \bar{F}'_1 + 2AB \bar{F}_1 = 0.$$

Не теряя в общности, выбираем значения $A = +ip,\ B = -\sqrt{a^2 + b^2}$. Перейдя к переменной y: $2BZ = -y,\ y = +2\sqrt{a^2 + b^2} e^z$, получим уравнение

$$y \frac{d^2}{dy^2} \bar{F}_1 + (2A - y) \frac{d}{dy} \bar{F}_1 - A \bar{F}_1 = 0,$$

которое можно отождествить с вырожденным гипергеометрическим уравнением

$$\Phi'' + (\gamma - y)\Phi' - \alpha\Phi = 0, \quad \alpha = A = ip, \quad \gamma = 2A = 2ip\,.$$

В качестве двух линейно независимых решений можно выбрать следующие [11]:

$$\bar{F}_1^{(1)}(y) = \Phi(\alpha, \gamma; y) = \Phi(ip, 2ip; y),$$
$$\bar{F}_1^{(2)}(y) = y^{1-\gamma} \Phi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma; y) = y^{1-2ip} \Phi(1 - ip, 2 - 2ip; y)\,, \tag{27}$$

что приводит к соответствующим выражениям для полной функции $F_1(Z) = Z^A e^{BZ} \bar{F}_1$:

$$F_1^{(1)} = y^{ip} e^{-y/2}\,\Phi(ip, 2ip; y)\,, \quad F_1^{(2)} = y^{1-ip} e^{-y/2}\,\Phi(1-ip, 2-2ip; y)\,. \qquad (28)$$

Воспользовавшись отмеченной выше симметрией, можно получить линейно независимые решения уравнения и для функции F_2:

$$F_2^{(1)} = y^{-ip} e^{-y/2}\,\Phi(-ip, -2ip; y)\,, \quad F_2^{(2)} = y^{1+ip} e^{-y/2}\,\Phi(1+ip, 2+2ip; y)\,. \qquad (29)$$

Специально отметим, что вопрос о характере связывания отдельных решений из

$$\left\{ F_1^{(1)}, F_1^{(2)};\; F_2^{(1)}, F_1^{(2)} \right\}$$

в пары (с учетом уравнений первого порядка (25)) и вычислении соответствующих относительных коэффициентов требует отдельного анализа ([7]). Но фактически достаточно исследовать функции F_1, сопутствующие им функции F_2 можно затем находить дополнительными вычислениями на основе (25).

Ниже потребуются два разных набора линейно независимых решений:

$$Y^{(1)} = \Phi(A, 2A, y)\,, \quad Y^{(2)} = y^{1-2A}\Phi(1-A, 2-2A, y)\,; \qquad (30)$$

$$Y^{(5)} = \Psi(A, 2A, y)\,, \quad Y^{(7)} = e^{y}\Psi(A, 2A, -y)\,. \qquad (31)$$

Эти пары решений связаны линейными соотношениями Куммера [11]:

$$Y^{(5)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} Y^{(1)} + \frac{\Gamma(2A-1)}{\Gamma(A)} Y^{(2)}\,, \; Y^{(7)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} Y^{(1)} - \frac{\Gamma(2A-1)}{\Gamma(A)} Y^{(2)}\,,$$

которые после умножения на $y^{A} e^{-y/2}$ принимают вид

$$F_1^{(5)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} F_1^{(1)} + \frac{\Gamma(2A-1)}{\Gamma(A)} F_1^{(2)}, \; F_1^{(7)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} F_1^{(1)} - \frac{\Gamma(2A-1)}{\Gamma(A)} F_1^{(2)}. \qquad (32)$$

Обращаем внимание, что решения $F_1^{(1)}$, $F_1^{(2)}$ описывают при $z \to -\infty$, $(y \longrightarrow 0)$ волны с асимптотическим поведением

$$F_1^{(1)} \sim y^{A} e^{-y/2} = \left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{+ip} e^{+ipz}, \quad F_1^{(2)} \sim y^{1-A} e^{-y/2} = \left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{1-ip} e^{(1-ip)z}. \qquad (33)$$

Следовательно, функции $F_1^{(5)}$ и $F_1^{(7)}$ при отрицательных $z \longrightarrow -\infty$ ведут себя как суперпозиция двух «плоских» волн:

$$F_1^{(5)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} \left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{+ip} e^{+ipz} + \frac{\Gamma(2A-1)}{\Gamma(A)} \left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{1-ip} e^{(1-ip)z}\,,$$

$$F_1^{(7)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} \left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{+ip} e^{+ipz} - \frac{\Gamma(2A-1)}{\Gamma(A)} \left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{1-ip} e^{(1-ip)z}\,. \qquad (34)$$

Отмечаем, что вторые слагаемые справа в этих равенствах пренебрежимо малы по сравнению с первыми ввиду присутствия затухающего фактора $e^{z} \to 0$. Это означает, что фактически имеем следующие асимптотики при $z \to -\infty$:

$$F_1^{+(5)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} \left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{+ip} e^{+ipz}, \quad F_1^{+(7)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} \left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{+ip} e^{+ipz}. \qquad (35)$$

В силу очевидной симметрии соответствующие решения в случае противоположной поляризации получаются формальной заменой: $p \Rightarrow -p,\ A = ip \Rightarrow -A$, для этого типа волн имеем следующие асимптотики при ($z \to -\infty$):

$$F_1^{-(5)} = \frac{\Gamma(1+2A)}{\Gamma(1+A)}\left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{-ip} e^{-ipz},\ F_1^{-(7)} = \frac{\Gamma(1+2A)}{\Gamma(1+A)}\left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{-ip} e^{-ipz}. \quad (36)$$

Найдем поведение Y_5 в области больших $y \to +\infty$. Применяя известное [11] асимптотическое соотношение $Y_5 = \Psi(A, 2A, y) \sim y^{-A}$, получим

$$z \to +\infty\,, \quad F_1^{+(5)} = y^A e^{-y/2} Y_5 \sim e^{-y/2} \sim\sim \exp\left(-\sqrt{a^2+b^2}e^z\right) \longrightarrow 0\,. \quad (37)$$

Аналогично находим поведение Y_7 в области больших $y \to +\infty$. Применяя известное асимптотическое соотношение $Y_7 = e^y \Psi(A, 2A, -y) \sim e^y y^{-A}$, получим

$$z \to +\infty\,, \quad F_1^{+(7)} = y^A e^{-y/2} Y_7 \sim e^{+y/2} \sim\sim \exp\left(+\sqrt{a^2+b^2}e^z\right) \longrightarrow \infty\,. \quad (38)$$

Волны с $p = -\sqrt{a^2+b^2}$ имеют то же самое асимптотическое поведение в области $y \to +\infty$.

Введем новые решения с помощью специальных комбинаций из $F_1^{+(5)}$ и $F_1^{-(5)}$:

$$\psi_1^{\pm(5)} = \left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{-ip} F_1^{+(5)} \pm \left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{+ip} F_1^{-(5)}\ ; \quad (39)$$

асимптотическое поведение этих решений при $z \to \pm\infty$ следующее:

$$\psi_1^{(5)}(z \to -\infty) \sim \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} e^{+ipz} \pm \frac{\Gamma(1+2A)}{\Gamma(1+A)} e^{-ipz}\ , \quad \psi_1^{\pm(5)}(z \to +\infty) \sim 0\,. \quad (40)$$

Для этих решений можно определить коэффициент отражения как квадрат модуля отношения амплитуд в суперпозиции плоских волн

$$\psi_1^{\pm(5)} \sim M_- e^{-ipz} \pm M_+ e^{+ipz}, \quad R = \left|\frac{M_-}{M_+}\right|^2 = \left|\frac{\Gamma(1+2A)}{\Gamma(1-2A)}\frac{\Gamma(1-A)}{\Gamma(1+A)}\right|^2 = 1; \quad (41)$$

учли равенства $A = +ip,\ A^* = -A$.

Таким образом, решения $\psi_1^{\pm(5)}$ описывают ситуации, когда волны падают слева, отражаются с вероятностью 1 от эффективного «барьера», возникающего из-за неевклидовости геометрии пространства; далеко справа за «барьером» решение спадает до нуля.

Прямая интерпретация в терминах «барьер – отражение» затруднена в силу того, что дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции, содержат комплексные члены:

$$\left(\frac{d^2}{dZ^2} + \frac{p^2+ip}{Z^2} - (a^2+b^2)\right)F_1^+ = 0, \qquad \left(\frac{d^2}{dZ^2} + \frac{p^2-ip}{Z^2} - (a^2+b^2)\right)F_1^- = 0. \quad (42)$$

Структура этих уравнений предполагает возможность выполнения условия $F_1^- = \left(F_1^+\right)^*$. Считая это выполненным, можно получить вещественные уравнения для новых функций (39) $R^\pm = c\,F_1^+ \pm c^*\left(F_1^+\right)^*$:

$$\left(\frac{d^2}{dZ^2}+\frac{p^2}{Z^2}-(a^2+b^2)\right)R^+ +\frac{ip}{Z^2}R^- =0\,,\quad \left(\frac{d^2}{dZ^2}+\frac{p^2}{Z^2}-(a^2+b^2)\right)R^- +\frac{ip}{Z^2}R^+ =0\,. \tag{43}$$

Эти уравнения в координате $z=\ln Z$ выглядят так (выделяем простые множители: $R^+ = e^{z/2}f^+,\ R^- = e^{z/2}f^-$):

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+p^2-\frac{1}{4}-(a^2+b^2)e^{2z}\right)f^+ +ipf^- =0\,,\left(\frac{d^2}{dz^2}+p^2-\frac{1}{4}-(a^2+b^2)e^{2z}\right)f^- +ipf^+ =0\,.$$

Легко найти критическую точку, после которой функции должны резко спадать до нуля:

$$p^2-1/4=(k_1^2+k_2^2)\,e^{2z_0}\quad\Rightarrow\quad z_0=\ln\sqrt{\frac{p^2-1/4}{a^2+b^2}}\,. \tag{44}$$

В окрестности точки z_0 уравнения упрощаются до уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2}{dz^2}f^+ +ipf^- =0\,,\quad \frac{d^2}{dz^2}f^- +ipf^+ =0\,. \tag{45}$$

Ее решение может иметь только экспоненциальный вид: $f^+ = Me^{\nu(z-z_0)}$, $f^- = Ne^{\nu(z-z_0)}$; при этом уравнения (45) дают алгебраическую систему с четырьмя решениями:

$$\begin{vmatrix}\nu^2 & ip\\ ip & \nu^2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}M\\ N\end{vmatrix}=0\quad\Rightarrow\quad \nu=-\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\sqrt{p},+\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\sqrt{p}\,. \tag{46}$$

Нужным затухающим справа от точки z_0 решениям отвечают две первые возможности для ν с отрицательной вещественной частью. В обычных единицах точка z_0 описывается соотношением

$$z_0=\rho\ln\sqrt{\frac{(E^2-M^2c^4)/c^2\hbar^2-1/4\rho^2}{(K_1^2+K_2^2)}}\,; \tag{47}$$

здесь волновые числа K_1, K_2 имеют обычную размерность обратного метра; ρ – радиус кривизны пространства Лобачевского. Отмечаем, что при устремлении к нулю величин K_1, K_2 глубина проникновения поля в область положительных z неограниченно увеличивается; это находится в согласии с явным видом уравнений при $a^2+b^2=0$: в них исчезает эффективный потенциал отталкивания.

Заключение

Воспользовавшись приведенным анализом, можно решения G_2, G_3 вырожденного уравнения Гойна выразить через функции F_1, F_2, строящиеся в вырожденных гипергеометрических функциях:

$$G_2=\sqrt{a-ib}\;F_2-i\sqrt{a+ib}\;\frac{\varepsilon-p}{M}\,F_1\,,\quad G_3=-i\sqrt{a-ib}\;F_2+\sqrt{a+ib}\;\frac{\varepsilon-p}{M}\,F_1. \tag{48}$$

Понятно, что учет внешнего электрического поля приводит к более сложной математической задаче, но эффект отражения по-прежнему будет присутствовать – теперь по двум причинам: из-за электростатического поля и неевклидовости пространства.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Maxwell equations in Riemannian space-time, geometry effect on material equations in media / V. M. Red'kov [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2009. – Vol. 12, № 3. – P. 232–250.

2. Овсиюк, Е. М. О решениях уравнений Максвелла в квазидекартовых координатах в пространстве Лобачевского / Е. М. Овсиюк, В. М. Редьков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 4. – С. 99–105.

3. Новые задачи квантовой механики и уравнение Гойна / Е. М. Овсиюк [и др.] // Науч.-техн. ведомости СПбГПУ. Физ.-мат. науки. – 2012. – № 1(141). – С. 137–145.

4. Овсиюк, Е. М. О моделировании потенциального барьера в теории Шредингера геометрией пространства Лобачевского / Е. М. Овсиюк, О. В. Веко // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2011. – № 2. – С. 30–36.

5. Овсиюк, Е. М. Решения типа плоских волн для частицы со спином ½ в пространстве Лобачевского / Е. М. Овсиюк, О. В. Веко // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 4. – С. 80–83.

6. Ovsiyuk, E. M. On simulating a medium with special reflecting properties by Lobachevsky geometry / E. M. Ovsiyuk, O. V. Veko, V. M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2013. – Vol. 16, № 4. – P. 331–344.

7. Овсиюк, Е. М. О моделировании среды со свойствами идеального зеркала по отношению к свету и частицам со спином ½ / Е. М. Овсиюк, О. В. Веко, В. М. Редьков // Вес. НАН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 1. – С. 76–85.

8. Овсиюк, Е. М. О решении уравнения Шредингера для частицы в электрическом поле в пространствах постоянной кривизны / Е. М. Овсиюк, О. В. Веко // Докл. НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 3. – С. 43–47.

9. Ovsiyuk, E. On behavior of quantum particles in an electric field in spaces of constant curvature, hyperbolic and spherical models / E. Ovsiyuk, O. Veko, // Украин. физ. журн. – 2013. – Т. 58, № 12. – С. 1065–1072.

10. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск : Белорус. наука, 2009. – 496 с.

11. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдеи. – М. : Наука, 1973. – Т. 1 : Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. – 298 с.

12. Slavyanov, S. Yu. Special functions. A unified theory based on singularities / S. Yu. Slavyanov, W. Lay. – Oxford, 2000.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 29.03.2016

Ovsiyuk E.M., Veko O.V., Voynova Y.A., Kisel V.V., Red'kov V.M. **On Reflecting Spin ½ Particles by the «Geometric Medium» of the Lobachevsky Space, Taking into Account the External Electric Field**

Previously it was shown that in electrodynamic context the Lobachevsky geometry can simulate an effective medium acting as an ideal mirror, oriented perpendicularly to the axes z. In the present paper, an analogue of that effect is investigated for spin ½ field. In explicit form, solutions of the Dirac equation are constructed which describe waves in space reflected from effective potential barrier without penetrating it. The depth of penetration into the medium is determined by characteristics of the quantum states and by the curvature radius of the Lobachevsky space; for waves with $k_1 = 0,\ k_2 = 0$ the effective reflecting barrier vanishes. When taking into account an external electric field, we reduce the problem to a second order differential equation with four singular points; the singularity at infinity is irregular and of the rank 3. In absence of the electric field, the derived equation become simpler, being the confluent Heun equation, its solutions can be presented in terms of confluent hypergeometric functions.

Авторы признательны сотрудникам лаборатории теоретической физики Института физики НАН Беларуси за полезное обсуждение результатов работы.