

УДК 917.948

В.М. Мадорский

канд. физ.-мат. наук, доц. каф. прикладной математики и технологий программирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

**О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ
НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ**

Для решения нелинейного операторного уравнения с гладким оператором рассматривается не-локальный нерегуляризованный итерационный процесс и на его примере исследуется общий подход для получения выпуклой области, где решение существует и единственно.

Для анализа проблемы рассмотрим уравнение

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

где $f(D \subset R^n \rightarrow R^n)$, для решения которого предлагается следующий квазиньютоновский нерегуляризованный итерационный процесс:

Шаг 1: Решается линейная система для определения поправки Δx_n

$$f'(x_n)\Delta x_n = -\sqrt{\beta_n} f(x_n), \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (2)$$

Шаг 2: Вносится поправка в x_n и определяется очередное приближение

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n. \quad (3)$$

Шаг 3: Проверяется условие окончания итерационного процесса:

если $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$, ε – параметр останова, то конец просчетов, иначе переход на

Шаг 4: Определяется новая шаговая длина: если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1} := 1$, иначе производится пересчет β_{n+1} по формуле

$$\beta_{n+1} = \min \left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|^2}{\|f(x_{n+1})\|^2 \beta_n} \right), \quad \gamma_{n+1} = \gamma_n \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}, \quad \gamma_0 = \beta_0^2, \quad \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}] \quad (4)$$

и осуществляется переход на шаг 1.

Пусть оператор f в интересующей нас области D удовлетворяет условиям: отображение f является G -дифференцируемым на выпуклом множестве D ,

$$\|f'(x)\| \leq M < +\infty \quad \forall x \in D, \quad \|[f'(x)]^{-1}\| \leq B, \quad \forall x \in D, \quad (5)$$

производная $f'(x)$ удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой L и в D существует решение x^* уравнения (1). Тогда относительно процесса (2)–(4) справедлива

Теорема 1. Пусть выполняются условия (5). Тогда итерационный процесс (2)–(4) при $\varepsilon_0 = LB^2 \sqrt{\beta_0} \|f(x_0)\| < 1$, со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^* – решению уравнения (1). Оценка погрешности n -ого при-

ближения имеет вид $\|x_n - x^*\| \leq \frac{B \|f(x_0)\| q_0^n}{1 - q_0}$.

Доказательство. Докажем релаксационность процесса (2)–(4). Используя условия теоремы, имеем

$$\begin{aligned} \|f(x_{n+1})\| &\leq \|f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\| + \sup_{0 \leq t \leq 1} \|f'(x_n + t\Delta x_n) - f'(x_n)\| \|x_{n+1} - x_n\| \leq \\ &\leq \|f(x_n) - \sqrt{\beta_n} f(x_n)\| + LB^2 \beta_n \|f(x_n)\|^2 = (1 - \sqrt{\beta_n}(1 - \varepsilon_n)) \|f(x_n)\| = q_n \|f(x_n)\|, \end{aligned} \quad (6)$$

здесь $\varepsilon_n = LB^2 \sqrt{\beta_n} \|f(x_n)\|$, $q_n = 1 - \sqrt{\beta_n}(1 - \varepsilon_n)$.

Покажем, что имеет место равенство $\sqrt{\beta_{n+1}} \|f(x_{n+1})\| = \sqrt{\beta_n} \|f(x_n)\|$, для чего рассмотрим отношение

$$\frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}} = \frac{\gamma_{n+1} \|f(x_0)\|^2}{\|f(x_{n+2})\|^2 \beta_{n+1}^2} = \frac{\gamma_n \beta_{n+1} \|f(x_0)\|^2}{\beta_{n+1} \|f(x_{n+2})\|^2 \beta_{n+1}^2}.$$

После несложных преобразований имеем, что

$$\sqrt{\beta_{n+2}} \|f(x_{n+2})\| = \sqrt{\beta_{n+1}} \|f(x_{n+1})\|. \quad (7)$$

Из условий теоремы и (7) следует, что все $\varepsilon_i = \varepsilon_0$ и если β_0 и x_0 таковы, что $\varepsilon_0 = LB^2 \sqrt{\beta_0} \|f(x_0)\| < 1$, то $q_0 < 1$ и $\varepsilon_i = \varepsilon_0 < 1$. Пусть $n = 0$, тогда из (6) следует, что

$$\|f(x_1)\| \leq q_0 \|f(x_0)\| \leq \|f(x_0)\|, \quad (8)$$

а из (7) имеем, что

$$\sqrt{\beta_1} \|f(x_1)\| = \sqrt{\beta_0} \|f(x_0)\|. \quad (9)$$

Сравнивая (9) и (8), имеем $\sqrt{\beta_1} > \sqrt{\beta_0}$ и $q_1 = 1 - \sqrt{\beta_1}(1 - \varepsilon_1) < 1 - \sqrt{\beta_0}(1 - \varepsilon_0) = q_0$.

Применяя метод математической индукции, получим, что последовательность $\{\beta_i\} \uparrow 1$, а последовательность $\{q_i\} \downarrow 0$.

Переходя к пределу в (6) при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x_n)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^n q_i \|f(x_0)\| = 0. \quad (10)$$

Таким образом, из (10) следует, что $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x^*) = 0$, тем самым сходимость итерационного процесса к решению доказана.

Покажем, что в процессе счёта существует номер k_0 , что при $i \geq k_0$ все $\beta_i := 1$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_n \|f(x_0)\|^2}{\|f(x_{n+1})\|^2 \beta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{n-1} \|f(x_0)\|^2}{\beta_{n-1} \|f(x_{n+1})\|^2} = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_0 \|f(x_0)\|^2}{\beta_0 \|f(x_{n+1})\|^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_0 \|f(x_0)\|^2}{\|f(x_{n+1})\|^2} > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_0 \|f(x_0)\|^2}{\prod_{i=0}^n q_i \|f(x_0)\|} \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) и (4) следует, что $\exists k_0$ такое, что для всех $i \geq k_0$, $\beta_i := 1$. С этого момента процесс (2)–(4) переходит в классический метод Ньютона, с характерной для последнего квадратичной скоростью сходимости. Теорема 1 доказана.

Пусть при некотором i $\beta_i := 1$ тогда в силу условий теоремы

$$\begin{aligned} \|f(x_{i+1})\| &= \|f(x_i - [f'(x_i)]^{-1} f(x_i))\| \leq \|f'(x_n + t\Delta x_n) - f'(x_n)\| \|x_{n+1} - x_n\| \leq \\ &\leq L \|\Delta x_i\|^2 = l_i \|\Delta x_i\| / B; l_i = LB \|\Delta x_i\|. \end{aligned}$$

$$\|f(x_{i+2})\| = l_{i+1} \|\Delta x_{i+1}\| / B \leq BL \|\Delta x_{i+1}\| l_i \|\Delta x_i\| / B \leq l_i^3 \|\Delta x_i\| / B.$$

Индуктивно получим оценку

$$\|f(x_{i+n})\| \leq l_i^{2n-1} \|\Delta x_i\| / B.$$

Нетрудно найти радиус сферы с центром x_i . Если $l_i < 1$, то

$$\begin{aligned} r_{\exists} &\leq \sum_{j=i}^{\infty} \|\Delta x_j\| = \|\Delta x_i\| + B \|f(x_{i+1})\| + B \|f(x_{i+2})\| + \dots \leq \\ &\leq \|\Delta x_i\| + l_i \|\Delta x_i\| + l_i^3 \|\Delta x_i\| + \dots < \|\Delta x_i\| / (1 - l_i). \end{aligned} \tag{12}$$

Наряду с (12) имеем

$$r_{\exists} \leq \|\Delta x_i\| + \|\Delta x_{i+1}\| / (1 - l_i). \tag{13}$$

Найдем радиус области единственности решения уравнения в сфере $S(x_i, r)$, где r – радиус области, где решение единственно, точнее найдем условия, при выполнении которых в области $S(x_i, r)$ не более одного решения. Положим, что $S(x_i, r)$ существуют два решения x^* и x^{**} . Тогда справедлива оценка:

$$\begin{aligned} \|x^* - x^{**}\| &= \|x^* - x^{**} - [f'(x_i)]^{-1} (f(x^*) - f(x^{**}))\| \leq \\ &\leq \|[f'(x_i)]^{-1}\| \cdot \|f'(x_i)(x^* - x^{**}) - (f(x^*) - f(x^{**}))\| \leq \\ &\leq B \sup_{0 \leq \Theta \leq 1} \|f'(x^{**} + \Theta(x^* - x^{**})) - f'(x_i)\| \|x^* - x^{**}\| \leq B Lr \|x^* - x^{**}\|. \end{aligned} \tag{14}$$

Если в (14) потребовать, чтобы $BLr = q < 1$ или

$$r = \frac{q}{BL} = \frac{q \|\Delta x_i\|}{BL \|\Delta x_i\|} = \frac{q \|\Delta x_i\|}{l_i}, \tag{15}$$

то в сфере $S(x_i, r)$ будет не более одного решения.

В условиях сходящегося процесса Ньютона рассмотрим неравенство

$$\|\Delta x_i\| / (1 - l_i) \leq \frac{q}{BL} = q \|\Delta x_i\| / l_i, \tag{16}$$

которое равносильно утверждению $r_{\exists} \leq r$. Из (13) следует оценка l_i :

$$l_i \leq q / (1 + q) = F(q) < 1. \tag{17}$$

Если в качестве r_{\exists} взять правую часть соотношения (13) и потребовать выполнения условия

$$\|\Delta x_i\| + \|\Delta x_{i+1}\| / (1 - l_i) \leq \frac{q \|\Delta x_i\|}{l_i}, \tag{18}$$

то неравенство (18) также равносильно утверждению того, что $r_{\exists} \leq r$.

Из (18) имеем соотношение, связывающее нормы поправок на соседних шагах:

$$\frac{\|\Delta x_{i+1}\|}{\|\Delta x_i\|} \leq \left(\frac{q}{l_i} - 1 \right) \cdot (1 - l_i) = G(l_i). \quad (19)$$

Так как $G'(l_i) < 0$, то имеет место соотношение

$$\frac{\|\Delta x_{i+1}\|}{\|\Delta x_i\|} \leq \left(\frac{q}{F(q)} - 1 \right) \cdot (1 - F(q)), \quad (20)$$

откуда будет следовать соотношение (19), которое является следствием утверждения того, что $r_{\exists} \leq r$.

Пусть выполняется неравенство (20). Тогда соотношение (20) можно переписать в следующем виде:

$$\|\Delta x_i\| + \|\Delta x_{i+1}\| + \frac{F(q)}{1 - F(q)} \cdot \|\Delta x_{i+1}\| + \left(\frac{F(q)}{1 - F(q)} \right)^2 \|\Delta x_{i+1}\| + \dots \leq \frac{q \|\Delta x_i\|}{F(q)}. \quad (21)$$

Левая часть неравенства (21) мажорирует левую часть соотношения (18), а правая часть (21) минорирует правую часть (18). Следовательно, из выполнения (20) следует выполнение (19), которое есть условие того, что $r_{\exists} \leq r$.

Таким образом, для проверки того, что в области D решение существует и единственно, в условиях сходящегося ньютоновского процесса (с $\beta_i = 1 \quad \forall i$) производим проверку выполнимости условия (20) с $q \in (0, 1)$.

Если это условие при некотором $k \geq i$ выполняется, то мы находимся в сфере $S(x_k, r)$, в которой решение x^* существует и единственно. Радиус этой сферы находим из соотношения $r = \sum_{i=k}^n \|\Delta x_i\|$, где номер n находим из условия

$$\|f(x_n)\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1, \quad \varepsilon \sim (1e - 9) - (1e - 11), \quad \text{или} \quad r = \frac{q \|\Delta x_i\|}{F(q)}.$$

Радиус сферы $D = S(x_i, r)$ и оценку погрешности n -го приближения, используя метод математической индукции, находим стандартным образом:

$$\|x_n - x^*\| \leq \sum_{i=n}^{\infty} \|\Delta x_i\| \leq \sum_{i=n}^{\infty} B \sqrt{\beta_i} \|f(x_i)\| \leq B \|f(x_i)\| (q_i^n + q_i^{n+1} + \dots) < \frac{B \|f(x_i)\| q_i^n}{1 - q_i},$$

при этом радиус сферы, где имеют место соотношения (5), имеет вид

$$r = \frac{B \|f(x_0)\|}{1 - q_0}, \quad q_0 = 1 - \beta_0 (1 - \varepsilon_0).$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 2. Пусть в условиях сходящегося процесса Ньютона и выполнения условий теоремы 1 имеет место соотношение (20) при некотором i . Тогда в сфере

$S(x_i, r)$, $r = \frac{q \|\Delta x_i\|}{F(q)}$ решение уравнения (1) существует и единственно.

Замечание 1. Обратимость оператора $f'(x)$ в области D является также достаточно обременительным условием.

В связи с вышесказанным, следуя идее работы [1], найдем условия, при которых при переходе от точки x_0 , в которой $[f'(x_0)]^{-1}$ существует, к точке x_1 будет существовать ограниченный обратный оператор $[f'(x_1)]^{-1}$. Если $f \in C_D^{(2)}$, имеем оценку

$$\begin{aligned} & \|E - [f'(x_0)]^{-1} f'(x_0)\| = \|[f'(x_0)]^{-1}(f'(x_0) - f'(x_1))\| \leq \\ & \leq \|[f'(x_0)]^{-1}\| \cdot \|f'(x_0) - f'(x_1)\| \leq B_0 K \|x_1 - x_0\| = B_0 K \|\Delta x_0\| = l_0. \end{aligned}$$

Здесь $\|[f'(x_0)]^{-1}\| = B_0$, E – единичный оператор.

Если $l_0 < 1$, то в силу теоремы Банаха существует оператор, обратный оператору $[f'(x_0)]^{-1} f'(x_1)$, и справедлива оценка $\|[f'(x_1)]^{-1}\| \leq B_0(1 - l_0)^{-1}$.

Если для получения элемента x_1 использовать метод Ньютона, имеем оценку

$$\|f(x_1)\| = \left\| f\left(x_0 - [f'(x_0)]^{-1} f(x_0)\right) \right\| \leq L \|\Delta x_0\|^2 < l_0 \|\Delta x_0\| / B_0. \quad (22)$$

Определим l_0 так, чтобы при переходе от точки x_0 к точке x_1 выполнялось неравенство $l_1 \leq l_0$. Имеем

$$\begin{aligned} l_1 = B_1 L \|\Delta x_1\| & \leq B_0(1 - l_0)^{-1} L B_1 \|f(x_1)\| \leq \frac{B_0^2(1 - l_0)^2 L l_0 \|\Delta x_0\|}{B_0} = \\ & = B_0 L \|\Delta x_0\| l_0 / (1 - l_0)^2 = l_0^2 / (1 - l_0)^2. \end{aligned}$$

Неравенство $l_1 \leq l_0$ справедливо при $l_0 \leq \frac{1}{2}$. Нетрудно найти радиус области существования решения уравнения (1) в сфере $S(x_0, r_{\exists})$. Учитывая (22), имеем оценку для сходящегося процесса Ньютона

$$\begin{aligned} r_{\exists} & \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|\Delta x_i\| \leq \|\Delta x_0\| + B_1 \|f(x_1)\| + B_2 \|f(x_2)\| + \dots \leq \\ & \leq \|\Delta x_0\| + \frac{l_0}{1 - l_0} \|\Delta x_0\| + \left(\frac{l_0}{1 - l_0}\right)^2 \|\Delta x_0\| + \dots \leq \frac{1 - l_0}{1 - 2l_0} \|\Delta x_0\|. \end{aligned} \quad (23)$$

Наряду с оценкой (20) может быть получена оценка (23).

$$\begin{aligned} r_{\exists} & \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|\Delta x_i\| \leq \|\Delta x_0\| + \|\Delta x_1\| + \frac{l_1}{1 - l_1} \|\Delta x_1\| + \\ & + \left(\frac{l_1}{1 - l_1}\right)^2 \|\Delta x_1\| + \dots \leq \|\Delta x_0\| + \frac{1 - l_0}{1 - 2l_0} \|\Delta x_1\|. \end{aligned} \quad (24)$$

Условия, при выполнении которых в области $S(x_0, r)$ не более одного решения, рассмотрены нами выше.

В условиях сходящегося процесса Ньютона рассмотрим неравенство

$$\frac{1 - l_0}{1 - 2l_0} \|\Delta x_0\| \leq \frac{q}{B_0 L} = \frac{q \|\Delta x_0\|}{l_0}, \quad (25)$$

которое равносильно утверждению $r_{\exists} \leq r$. Из (25) следует оценка l_0 :

$$l_0 \leq \frac{1+2q - \sqrt{1+4q^2}}{2} = F_1(q) < 1. \quad (26)$$

Если в качестве r_{\exists} взять правую часть соотношения (24) и потребовать выполнения условия

$$\|\Delta x_0\| + \frac{1-l_0}{1-2l_0} \|\Delta x_1\| \leq \frac{q\|\Delta x_0\|}{l_0}, \quad (27)$$

то неравенство (27) также равносильно утверждению того, что $r_{\exists} \leq r$.

Из (27) имеем соотношение, связывающее нормы поправок на соседних шагах:

$$\frac{\|\Delta x_1\|}{\|\Delta x_0\|} \leq \left(\frac{q}{l_0} - 1 \right) \cdot \frac{1-2l_0}{1-l_0} = G(l_0). \quad (28)$$

Так как $G'(l_0) < 0$, тогда из выполнения соотношения

$$\frac{\|\Delta x_1\|}{\|\Delta x_0\|} \leq \left(\frac{q}{F_1(q)} - 1 \right) \cdot \frac{1-2F_1(q)}{1-F_1(q)} \quad (29)$$

будет следовать соотношение (28), которое является следствием утверждения того, что $r_{\exists} \leq r$.

Таким образом, нами доказана

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда если в условиях сходящегося вычислительного процесса (2) – (4) при некотором x_0 выполняется условие

(29), то в сфере $S\left(x_0, \frac{q\|\Delta x_0\|}{F_1(q)}\right)$ решение уравнения (1) существует и единственно.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мадорский, В. М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В. М. Мадорский. – Брест : БрГУ, 2005. – 186 с.
2. Мадорский, В. М. Локализация решений нелинейных граничных задач / В. М. Мадорский // Изв. ВУЗов СССР. Сер. матем. наук. – 1986. – № 12. – С. 45–57.
3. Мадорский, В. М. Локализация решений нелинейных уравнений / В. М. Мадорский // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1987. – № 2. – С. 113–115.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 01.04.2015

Madorski V.M. On the Existence and Uniqueness Solutions of Nonlinear Equations

For solving nonlinear operator equation with a smooth operator is considered a non-local nonregularized iterative process and his example we study the general approach for convex region where a solution exists and is unique.