УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. Матысик
канд. физ.-мат. наук, доц.,
зав. каф. прикладной математики и технологий программированния
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

ИТЕРАЦИОННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ НОРМЕ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

В гильбертовом пространстве для решения некорректных уравнений первого рода с положительно определённым ограниченным самосопряжённым оператором предлагается явный итерационный метод с попеременно чередующимся шагом. Исследована сходимость метода в энергетической норме гильбертова пространства, при этом для получения априорных оценок погрешности не требуется знания истокопредставимости точного решения. Получены достаточные условия, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость итерационного метода в обычной норме гильбертова пространства. Проведено сравнение оценок погрешности рассматриваемого итерационного метода и явного метода простой итерации.

Введение

Как известно, погрешность метода простой итерации с постоянным шагом [1–6]

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right),\ x_{0,\delta} = 0 \tag{1}$$

зависит от итерационного шага, и притом так, что для сокращения числа итераций желательно, чтобы итерационный шаг был как можно большим. Однако на этот шаг накладываются ограничения сверху $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$. Возникла идея попытаться ослабить эти ограничения. Это удалось сделать, выбирая для шага два значения α и β попеременно, где β уже не обязано удовлетворять прежним требованиям.

В данной статье исследуется сходимость предлагаемого явного итерационного метода с попеременно чередующимся шагом в случае единственного решения некорректного уравнения в энергетической норме гильбертова пространства.

1. Постановка задачи

В действительном гильбертовом пространстве H решается некорректное уравнение первого рода

$$Ax = y, \tag{2}$$

где A – положительно определённый ограниченный и самосопряжённый оператор, для которого нуль не является собственным значением. Предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, и, следовательно, задача некорректна. Пусть $y \in R(A)$, т.е. при точной правой части y уравнение (2) имеет единственное решение x. Для отыскания этого решения применим явную схему метода итераций с попеременно чередующимся шагом

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y),\quad x_0 = 0,\quad \alpha_{2n+1} = \alpha,\quad \alpha_{2n+2} = \beta,\quad n = 0,1,2,\dots. \tag{3}$$

Здесь E – единичный оператор. В случае приближённой правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ соответствующие методу (3) итерации примут вид:

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}(Ax_{n,\delta} - y_\delta),\quad x_{0,\delta} = 0,\quad \alpha_{2n+1} = \alpha,\quad \alpha_{2n+2} = \beta,\quad n = 0,1,2,\dots. \tag{4}$$

Далее, под сходимостью метода (4) понимается утверждение о том, что приближения (4) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения (2) при подходящем выборе n и достаточно малых δ. Иными словами, итерационный метод (4) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_{n}\left\|x-x_{n,\delta}\right\|\right)=0$ [7]. Далее будем считать, что $\|A\|=1$.

2. Сходимость метода в случае априорного и апостериорного выбора числа итераций в исходной норме гильбертова пространства

Методы (3) и (4) были рассмотрены в работе [7], в которой изучена сходимость обоих методов в исходной норме гильбертова пространства. Для их сходимости в [7] требуется, чтобы при $0<\alpha<2,\ \beta>0$ было

$$\left|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)\right|<1 \tag{5}$$

для любого $\lambda\in(0,1]$. Условие (5) равносильно совокупности двух условий

$$(\alpha+\beta)^2<8\alpha\beta, \tag{6}$$

$$\alpha\beta<\alpha+\beta. \tag{7}$$

Для метода (4) изучен априорный выбор числа итераций. Доказано, что итерационный процесс (4) сходится при условиях (6), (7) и $0<\alpha<2$, если выбирать число итераций n в зависимости от δ так, чтобы $n\delta\to 0$, при $n\to\infty,\ \delta\to 0$. В предположении, что точное решение x является истокообразно представимым, т.е. $x=A^s z,\ s>0$ и при условиях $0<\alpha<2$, (6),

$$\alpha+\beta<\frac{3}{2}\alpha\beta, \tag{8}$$

$$\frac{1}{16}+\alpha\beta\le\alpha+\beta. \tag{9}$$

Получена следующая оценка погрешности метода (4) (см. [7]):

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\|\le s^s\left[n(\alpha+\beta)\right]^{-s}\|z\|+\frac{n}{2}(\alpha+\beta)\delta. \tag{10}$$

Для нахождения оптимальной по n оценки погрешности производную по n от правой части неравенства (10) приравняем к нулю. Тогда оптимальная по n оценка погрешности имеет вид $\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}}\le(1+s)\,2^{-s/(s+1)}\delta^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}$ и получается при $n_{\text{опт}}=s\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{-1}2^{-s/(s+1)}\delta^{-1/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}$.

Таким образом, оптимальная оценка для метода (4) при неточности в правой части уравнения оказывается такой же, как и оценка для метода простой итерации (1). Следовательно, метод (4) не даёт преимущества в мажорантных оценках по сравнению с методом простой итерации (1). Но он даёт выигрыш в следующем. В методе простой итерации с постоянным шагом (1) $0<\alpha\le\frac{5}{4}$, а в методе (4) $0<\frac{\alpha+\beta}{2}<4$ (см. [7]). Значит, выбирая α и β попеременно соответствующим образом можно сделать $n_{\text{опт}}$ в методе (4) примерно втрое меньшим, чем в методе итераций с постоянным шагом (1). Т.е., используя метод (4), для достижения оптимальной точности достаточно сделать итераций в три раза меньше, чем используя метод (1).

В статье [8] для предлагаемого метода при решении уравнения (2) с точным оператором и приближённой правой частью доказана сходимость, получены оценка погрешности и оценка для момента останова в случае апостериорного выбора числа итераций. Справедливы

Теорема 1. *Пусть* $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq 1$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ (m *– чётное*) *в методе* (4) *выбирается по правилу останова по малости невязки* $\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon,\ (n < m),\quad \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq \varepsilon,\ \varepsilon = b\delta,\ b > 1$, *тогда* $x_{m(\delta),\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и пусть* $x = A^s z,\ s > 0$. *Тогда справедливы оценки* $m(\delta) \leq 2 + \frac{s+1}{\alpha+\beta}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}$, $\|x_{m(\delta),\delta} - x\| \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} +$

$$+\frac{\alpha+\beta}{2}\left\{2 + \frac{s+1}{\alpha+\beta}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta.$$

Также в [8] для метода (3) изучен случай неединственного решения уравнения (2): доказана сходимость приближений (3) к решению с минимальной нормой.

3. Сходимость метода в энергетической норме гильбертова пространства при приближенной правой части уравнения

Изучим сходимость итерационного метода (4) в случае единственного решения в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)},\ x \in H$. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем, что $x_{0,\delta} = 0$, и рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \tag{11}$$

По индукции нетрудно показать [7], что $x_n = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^l (E - \beta A)^m\right]y$, где l, m – натуральные показатели и $l + m = n$, $l = m = \frac{n}{2}$ или $l = m + 1$. Тогда запишем первое слагаемое из равенства (11) в виде

$$x - x_n = A^{-1}y - A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^l (E - \beta A)^m\right]y = (E - \alpha A)^l (E - \beta A)^m x.$$

Как было показано в [7] $x - x_n$ бесконечно мало в норме пространства H при $n \to \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки необходима дополнительная информация на гладкость точного решения x – его истокообразная представимость. При использовании энергетической нормы нам это дополнительное предположение не потребуется. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряжённого оператора A имеем

$$\|x - x_n\|_A^2 = (A(x - x_n), x - x_n) = \left(A(E - \alpha A)^l (E - \beta A)^m x, (E - \alpha A)^l (E - \beta A)^m x\right) =$$

$$= \left(A(E - \alpha A)^{2l} (E - \beta A)^{2m} x, x\right) = \int_0^1 \lambda(1 - \alpha\lambda)^{2l} (1 - \beta\lambda)^{2m}\, d(E_\lambda x, x),$$

где E_λ – соответствующая оператору A спектральная функция.

В дальнейшем, для простоты, считаем, что $l = m = \frac{n}{2}$ $(n = 2p,\ p \in N)$. Для оценки интересующей нас нормы найдём при $\lambda \in [0,1]$ максимум подынтегральной функции $\varphi(\lambda) = \lambda(1 - \alpha\lambda)^{2l} (1 - \beta\lambda)^{2m} = \lambda(1 - \alpha\lambda)^n (1 - \beta\lambda)^n$. Потребуем, чтобы при $\lambda \in (0,1]$, положительном β выполнялись условия $0<\alpha<2$, (6), (8)–(9). Тогда (см. [7]) для достаточно больших n справедливо $\lambda(1-\alpha\lambda)^{n/2}(1-\beta\lambda)^{n/2}\le[n(\alpha+\beta)]^{-1}$, поэтому имеем $\lambda(1-\alpha\lambda)^{n}(1-\beta\lambda)^{n}\le[2n(\alpha+\beta)]^{-1}$.

Поэтому для таких n справедлива оценка $\max\limits_{\lambda\in[0,1]}|\varphi(\lambda)|\le[2n(\alpha+\beta)]^{-1}$. Следовательно, при условиях $0<\alpha<2$, $\beta>0$, (6), (8) – (9) получим $\|x-x_n\|_A\le[2n(\alpha+\beta)]^{-1/2}\|x\|$.

Оценим второе слагаемое в (11). Как показано в [7], имеет место равенство

$$x_n-x_{n,\delta}=A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^{n/2}(E-\beta A)^{n/2}\right](y-y_\delta)=$$
$$=\int_0^1\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{n/2}(1-\beta\lambda)^{n/2}\right]dE_\lambda(y-y_\delta).$$

Тогда

$$\|x_n-x_{n,\delta}\|_A^2=\left(A(x_n-x_{n,\delta}),\,x_n-x_{n,\delta}\right)=\Big(\left[E-(E-\alpha A)^{n/2}(E-\beta A)^{n/2}\right](y-y_\delta),$$
$$A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^{n/2}(E-\beta A)^{n/2}\right](y-y_\delta)\Big)=$$
$$=\left(A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^{n/2}(E-\beta A)^{n/2}\right]^2(y-y_\delta),\,y-y_\delta\right)=$$
$$=\int_0^1\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{n/2}(1-\beta\lambda)^{n/2}\right]^2\,d\left(E_\lambda(y-y_\delta),y-y_\delta\right).$$

Обозначим через $\xi_n(\lambda)$ подынтегральную функцию и оценим её сверху при условии (5). Сначала при (5) докажем, что $|\omega_n(\lambda)|=$ $=\left|\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{n/2}(1-\beta\lambda)^{n/2}\right]\right|\le\frac{n}{2}(\alpha+\beta)$. Это то же самое, что методом математической индукции доказать неравенство $\left|\lambda^{-1}[1-(1-\alpha_1\lambda)\ldots(1-\alpha_n\lambda)]\right|\le\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$.

Обозначим левую часть последнего неравенства через $z_n(\lambda)$.

При n = 1 получим $z_1(\lambda)=\alpha_1\le\alpha_1$, т.е. при n = 1 рассматриваемое неравенство справедливо. Предположим, что доказываемое неравенство верно при $n=k$, т.е. выполняется $z_k(\lambda)=\left|\lambda^{-1}[1-(1-\alpha_1\lambda)\ldots(1-\alpha_k\lambda)]\right|\le\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i$, и докажем его справедливость при $n=k+1$. Итак, получим

$$z_{k+1}(\lambda)=\left|\lambda^{-1}[1-(1-\alpha_1\lambda)\ldots(1-\alpha_k\lambda)(1-\alpha_{k+1}\lambda)]\right|=$$
$$=\left|\lambda^{-1}[1-(1-\alpha_1\lambda)\ldots(1-\alpha_k\lambda)+(1-\alpha_1\lambda)\ldots(1-\alpha_k\lambda)\alpha_{k+1}\lambda]\right|=$$
$$=\left|\lambda^{-1}[1-(1-\alpha_1\lambda)\ldots(1-\alpha_k\lambda)]+(1-\alpha_1\lambda)\ldots(1-\alpha_k\lambda)\alpha_{k+1}\right|\le$$

$$\le \left|\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha_1\lambda)\ldots(1-\alpha_k\lambda)\right]\right| + \alpha_{k+1}\left|(1-\alpha_1\lambda)\ldots(1-\alpha_k\lambda)\right| \le \sum_{i=1}^{k}\alpha_i + \alpha_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i .$$

Поэтому по индукции справедливость рассматриваемого неравенства доказана. Следовательно, при (5) выполняется $|\omega_n(\lambda)| \le \frac{n}{2}(\alpha+\beta)$.

Вернемся к оценке положительной функции $\xi_n(\lambda)$, имеем

$$\xi_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{n/2}(1-\beta\lambda)^{n/2}\right]^2 =$$
$$= \left|\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{n/2}(1-\beta\lambda)^{n/2}\right]\right| \left|1-(1-\alpha\lambda)^{n/2}(1-\beta\lambda)^{n/2}\right| \le$$
$$\le \frac{n}{2}(\alpha+\beta)\left(1+\left|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)\right|^{n/2}\right) \le n(\alpha+\beta),$$

так как при условии (5) справедливо $\left|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)\right|^{n/2} < 1$. Итак, для любых $n \ge 1$ $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 \le n(\alpha+\beta)\delta^2$, поэтому $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le n^{1/2}(\alpha+\beta)^{1/2}\delta,\ n \ge 1$.

Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\|_A \le \|x - x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le \|x - x_n\|_A + n^{1/2}(\alpha+\beta)^{1/2}\delta, \quad n \ge 1$ и при $n \to \infty$ $\|x - x_n\|_A \to 0$, то для сходимости $\|x - x_{n,\delta}\|_A \to 0$, $n \to \infty$ достаточно, чтобы $\sqrt{n}\,\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$. Таким образом, если в процедуре (4) выбрать число итераций $n = n(\delta)$, зависящих от δ так, чтобы $\sqrt{n}\,\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$, то получим регуляризующий метод, обеспечивающий сходимость к точному решению уравнения (2) в энергетической норме гильбертова пространства. Итак, доказана

Теорема 3. *Итерационная процедура* (4) *при условиях* $0 < \alpha < 2,\quad \beta > 0$, (6), (8) – (9) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций* n *выбирать так, чтобы* $\sqrt{n}\,\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (4)

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \le \left[2n(\alpha+\beta)\right]^{-1/2}\|x\| + n^{1/2}(\alpha+\beta)^{1/2}\delta,\ n \ge 1. \tag{12}$$

Оптимизируем полученную оценку (12) по n, т.е. при заданном δ найдём такое значение числа итераций n, при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по n от правой части равенства (12), получим $(\alpha+\beta)^{-1/2}2^{-1/2}\|x\| = (\alpha+\beta)^{1/2}\delta n$, отсюда

$$n_{\text{опт}} = (\alpha+\beta)^{-1} 2^{-1/2}\delta^{-1}\|x\|. \tag{13}$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (12), найдём её оптимальное значение

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \le 2^{3/4}\delta^{1/2}\|x\|^{1/2}. \tag{14}$$

Из (14) вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметров α,β. Но $n_{\text{опт}}$ зависит от α,β, и поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать α,β возможно большими, удовлетворяющими условиям $0 < \alpha < 2,\ \beta > 0$, (6), (8) – (9), и так, чтобы $n_{\text{опт}} \in Z$. Таким образом, доказана

Теорема 4. *При условиях* $0 < \alpha < 2,\ \beta > 0$, (6), (8) – (9) *оптимальная оценка погрешности для итерационного процесса* (4) *в энергетической норме гильбертова пространства имеет вид* (14) *и получается при* $n_{опт}$ *из* (13).

Сравним метод (4) в энергетической норме с хорошо известным методом (1). В статье [9] для явного метода простой итерации (1) с $0 < \alpha \le 1{,}25$ при $n_{\text{опт}} = \left(\frac{35}{27}\right)^{-1/2} \alpha^{-1} e^{-1/2}\delta^{-1}\|x\|$ получена оптимальная оценка $\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \le$ $\le \left(\frac{35}{27}\right)^{1/4} e^{-1/4}(2\delta)^{1/2}\|x\|^{1/2}$. Отсюда легко увидеть, что порядки оптимальных оценок погрешности для методов (1) и (4) одинаковы. Более того, используя метод итераций (4), для достижения оптимальной точности потребуется сделать число итераций по крайней мере в 2,5 раза меньше, чем методом итераций (1).

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H.

Из этих условий выходит

Теорема 5. *Если выполнены условия*:

1) $E_\tau x_{n,\delta} = 0$,

2) $E_\tau x = 0$, *где* $E_\tau = \int_0^\tau dE_\lambda$, τ *– фиксированное положительное число* $(0 < \tau < 1)$,

то из сходимости $x_{n,\delta}$ *к* x *в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.*

Доказательство. Из 1) и 2) имеем $\int_0^\tau \frac{1}{\lambda} d\left(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})\right) = 0$. Отсюда получим

$$\|x - x_{n,\delta}\|^2 = \int_0^1 d\left(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), x - x_{n,\delta}\right) = \int_0^1 \frac{1}{\lambda} d\left(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})\right) =$$

$$= \int_0^\tau \frac{1}{\lambda} d\left(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})\right) + \int_\tau^1 \frac{1}{\lambda} d\left(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})\right) =$$

$$= \int_\tau^1 \frac{1}{\lambda} d\left(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})\right) \le \frac{1}{\tau}\int_\tau^1 d\left(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\tau}\int_0^1 d\left(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})\right) = \frac{1}{\tau}\|x - x_{n,\delta}\|_A^2.$$

Поэтому из $\|x - x_{n,\delta}\|_A \to 0$, $n \to \infty$ следует $\|x - x_{n,\delta}\| \to 0$, $n \to \infty$. Теорема 5 доказана.

Замечание 1. *Так как* $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{n/2}(E - \beta A)^{n/2}\right]y_\delta$, *то для того, чтобы* $x_{n,\delta}$ *удовлетворяло условию* $E_\tau x_{n,\delta} = 0$, *достаточно потребовать, чтобы* $E_\tau y_\delta = 0$. *Таким образом, если решение* x *и приближённая правая часть* y_δ *таковы, что* $E_\tau x = 0$ *и* $E_\tau y_\delta = 0$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к* x *в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства и, следовательно, для сходимости при-*

ближений (4) *в исходной норме пространства* H *не требуется предположения истокообразной представимости точного решения.*

Замечание 2. *Считаем, что* $\|A\| = 1$*, но на самом деле все результаты легко переносятся на случай, когда* $\|A\| < \infty$.

Замечание 3. *Уравнение* $Ax = y$ *с действующим в гильбертовом пространстве* H *оператором, не обладающим свойством самосопряжённости или положительной определённости, может быть сведено к решению уравнения* $A^* Ax = A^* y$ *уже с положительно определённым и самосопряжённым оператором* $A^* A$. *Описанные выше результаты для уравнения* (2) *аналогичны результатам для уравнений* $Ax = y$ *уже с произвольным действующим в гильбертовом пространстве оператором* A.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
2. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.
3. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
4. Константинова, Я. В. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I-го рода / Я. В. Константинова, О. А. Лисковец // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. – 1973. – № 1. – С. 9–15.
5. Bialy, H. Iterative behandlung linearer funktions gleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, № 2. – P. 166–176.
6. Samarsky, A. A. Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics / A. A. Samarsky, P. N. Vabishchevitch. – Berlin : De Gruyter, 2007. – 480 p.
7. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест : БрГУ им. А. С. Пушкина, 2008. – 196 с.
8. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space/ O. V. Matysik, M. M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – № 300. – P. 290–299.
9. Лисковец, О. А. Сходимость в энергетической норме итеративного метода для уравнений I–го рода / О. А. Лисковец, В. Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1976. – № 2. – С. 19–23.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 07.03.2016

***Matysik O.V.* The Iterative Regularization of Ill-posed Problems in Energy Norm of Hilbert Space**

In the Hilbert space for solving Ill-posed equations the first kind with positive definite bounded self-adjoint operator the explicit iteration method with alternating step is proposed. Convergence property of procedure in energy norm of Hilbert space has been investigated; here it is not required to know source representability of exact solution in order to get apriori estimations of error. The sufficient conditions are received when convergence of iteration method in ordinary norm of Hilbert space goes out of the convergence in energy norm. The comparison of the error estimations of the given iteration method and the evident method of simple iteration has been done.