УДК 517.9

В.Г. Самойленко[1], Т.В. Тищук[2]
[1]д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. каф. математической физики Киевского национального университета имени Т. Шевченко
[2]аспирант каф. математической физики Киевского национального университета имени Т. Шевченко

КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В качестве феноменологической модели широкополосного генератора цифровых сигналов рассматривается краевая задача для линейного дифференциального уравнения первого порядка с частными производными и нелинейным краевым условием. Введено понятие типа обобщенного кусочно-постоянного n-периодического решения этой задачи и исследован вопрос о сосуществовании таких решений. Для некоторого класса краевых задач получен аналитический вид обобщенного кусочно-постоянного n-периодического решения.

Введение

На сегодняшний день основными типами генерируемых, передаваемых и принимаемых различными средствами связи сигналов являются аналоговые и цифровые (digital) сигналы. Если в конце XIX столетия для передачи информации применялся аналоговый сигнал, то с 70-х гг. XX в. для этой цели все чаще используется цифровой сигнал. Это же касается и средств хранения информации. Основное различие между аналоговым и цифровым сигналами заключается в структуре сигнального потока [1]. Если аналоговый сигнал можно представить в виде непрерывной волны, то графиком цифрового сигнала является кусочно-постоянная функция.

В связи с широким распространением цифровых сигналов приобретает важное значение задача построения широкополосных генераторов таких сигналов, причем простейших как с инженерной точки зрения, так и с точки зрения возможности полного исследования математических моделей этих генераторов. Естественно ограничить класс рассматриваемых кусочно-постоянных функций периодическими. Тогда функции из этого класса могут быть определены подстановками, с помощью которых можно классифицировать периодические кусочно-постоянные функции. Классификация дискретных периодических функций с помощью перестановок широко используется в теории одномерных динамических систем, в частности, для изучения сосуществования циклов одномерных непрерывных отображений [2]. Хотя периодические кусочно-постоянные функции определены на действительной оси, а дискретные периодические функции определены на множестве натуральных чисел, но и для первого, и для второго класса функций применима классификация по циклическим перестановкам. Поскольку традиционными моделями генераторов сигналов являются дифференциальные уравнения, феноменологические модели генераторов цифровых сигналов будем искать в классе дифференциальных уравнений, исследование которых редуцируется [3–6] к изучению свойств одномерных динамических систем. Но при этом, поскольку кусочно-постоянные функции разрывные, их надо рассматривать не как классические решения дифференциальных уравнений, а в качестве обобщенных решений уравнений. Хорошо известно, что существуют классы краевых задач для уравнений в частных производных, исследование которых редуцируется к разностным уравнениям первого порядка с непрерывным аргументом, а свойства решений последних определяются динамической системой порожденной одномерным непрерывным отображением [3; 5–8].

Одномерным динамическим системам, теория которых является одним из наиболее эффективных инструментов нелинейной динамики, с одной стороны, свойственен широкий спектр динамического поведения траекторий, в частности, система может иметь много различных циклов одновременно, а с другой стороны, свойства таких систем могут быть детально исследованы [2]. Именно эти особенности одномерных динамических систем позволяют использовать их для построения простейших феноменологических моделей генераторов цифровых сигналов.

Поскольку большинство инженерных задач использует устойчивость решений по Ляпунову, применение полученных в данной работе результатов для таких задач требует использования следующего замечания. На устойчивости полученных обобщенных периодических решений в данной работе внимание не акцентируется в связи с тем, что для произвольного отображения с краевого условия рассматриваемой краевой задачи, имеющей неустойчивые обобщенные периодические решения, существует близкое в пространстве непрерывных функций отображения, такое, что краевая задача имеет периодическое решение того же типа, но устойчивое по Ляпунову.

Исследованиями краевых задач для линейных уравнений в частных производных и нелинейными краевыми условиями путем их редукции к разностным уравнениям с непрерывным аргументом уже много лет занимаются в Институте математики НАН Украины [3–4]. Особые успехи достигнуты для уравнений гиперболического типа, что объясняется существованием формулы Д'Аламбера и метода характеристик получения общего решения уравнения. Разностные уравнения с непрерывным аргументом, полученные в результате редукции краевых задач, демонстрируют иногда очень сложное поведение траекторий, в частности, автостохастичность [7]. Найдены классы краевых задач, для которых имеют место те же качественные и количественные универсальные свойства бифуркаций решений, что и для соответствующих одномерных динамических систем [8].

В статье рассмотрена нелинейная краевая задача для линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка с хаотическим поведением решений, которая допускает широкий спектр кусочно-постоянных периодических решений. Поскольку кусочно-постоянная функция не является дифференцируемой, в статье введено понятие обобщенного кусочно-постоянного n-периодического решения с очень «разреженным» множеством точек разрыва. Исследование таких обобщенных кусочно-постоянных n-периодических решений происходит путем сведения краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных к разностному уравнению с непрерывным временем, а краевые условия и исходные данные обеспечивают редукцию полученного разностного уравнения к непрерывному отображению интервала. Заметим, что примененный метод позволяет получить решение некоторых классов краевых задач в аналитическом виде. В отличие от асимптотической устойчивости по Ляпунову, при которой спектр решений является узким, ведь все решения в определенной окрестности имеют одинаковые асимптотические свойства, построенные решения имеют разные асимптотические свойства даже в случае близости начальных условий, что связано с хаотичностью системы.

В качестве феноменологической модели генератора кусочно-постоянных сигналов рассмотрим в области нелинейную краевую задачу, состоящую из линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial u(x;t)}{\partial t}=\frac{\partial u(x;t)}{\partial x},\ x\in(0;1),\ t>0, \tag{1}$$

нелинейного краевого условия:

$$u(1;t) = f(u(0;t)), \quad t \in R^+ \cup \{0\}, \tag{2}$$

и начального условия:

$$u(x;0) = \varphi(x), \quad x \in [0;1]. \tag{3}$$

Здесь $u:[0;1]\times(R^+ \cup \{0\}) \to R^1$, $f: R^1 \to R^1$, $\varphi:[0;1] \to R^1$.

Поскольку краевая задача (1)–(3) является феноменологической моделью генератора кусочно-постоянных сигналов, выберем функцию $\varphi(x)$ постоянной (для любого $x \in [0;1]$ выполняется равенство $\varphi(x) = c$, где $c \in R$ – фиксированное число) и будем изучать периодические решения задачи (1)–(3).

Введем понятие периодического кусочно-постоянного решения краевой задачи (1)–(3), которое имеет разрывы, т.е. заранее не является гладкой функцией, как обобщенного кусочно-постоянного периодического решения краевой задачи (1)–(3).

Прямые $x + t = const$ являются характеристиками уравнения (1), однако с краевого условия (2) следует, что поведение решений краевой задачи (1)–(3) определяют прямые $t = -x + i$, где $i \in N$. Учитывая, что краевая задача (1)–(3) определена в области $\{(x;t) \in R^1 \times R^1 \mid 0 \le x \le 1, t \ge 0\}$, вместо прямых $t = -x + i$ уместно рассматривать множества вида $P_i = \{(x;t) \in R^1 \times R^1 \mid 0 < x < 1, t = -x + i\}$, где $i \in N$.

Определение 1. Обобщенным решением краевой задачи (1)–(3) называется функция $u:[0;1]\times R^+ \cup \{0\} \to R$, удовлетворяющая равенства (1)–(3) для произвольных значений $(x;t) \in [0;1]\times R^+ \cup \{0\} \setminus \bigcup_{i \in N} P_i$.

Сформулируем ряд необходимых определений.

Определение 2. Функцию $\psi: R^1 \times R^1 \to \Omega$ будем называть кусочно-постоянной, если множество Ω является конечным.

Определение 3. Функцию $\psi: R^1 \times R^1 \to \Omega$ будем называть n-периодической, где $n \in N$, если для любого фиксированного значения $x \in R^1$ выполняется равенство $\psi(x; t+n) = \psi(x;t)$, где n является наименьшим среди чисел, для которых выполняется последнее равенство.

Во множестве кусочно-постоянных n-периодических функций выделим подмножество функций A вида $u:[0;1]\times R^+ \cup \{0\} \to \Omega$, где $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – множество действительных чисел, таких, что для любых $i \ne j$ выполняется неравенство $a_i \ne a_j$, где $i, j \in N$. В дальнейшем под обобщенным решением краевой задачи (1)–(3) будем понимать кусочно-постоянную n-периодическую функцию, которая принадлежит множеству A и является обобщенным решением краевой задачи (1)–(3).

Наиболее общий ответ на вопрос сосуществования обобщенных кусочно-постоянных n-периодических решений краевой задачи (1)–(3) дает следующая теорема, которая является аналогом теоремы Шарковского о сосуществовании циклов непрерывного отображения [12] и использует только период, чего недостаточно для классификации цифровых сигналов и затрудняет их использование для кодирования информации.

Теорема 1. Пусть задана краевая задача (1), (2), где $f \in C^0(I;I)$ – непрерывная функция, с постоянной начальной функцией (3). Если краевая задача (1)–(3) имеет обобщенное кусочно-постоянное n-периодическое решение, то она также имеет обобщенное кусочно-постоянное n'-периодическое решение, такое, что $n' \lhd n$, где $1 \lhd 2 \lhd 2^2 \lhd 2^3 \lhd \ldots \lhd 2^2 \cdot 5 \lhd 2^2 \cdot 3 \lhd \ldots \lhd 2 \cdot 5 \lhd 2 \cdot 3 \lhd \ldots \lhd 9 \lhd 7 \lhd 5 \lhd 3$.

Доказательство теоремы 1. Используя метод характеристик для нахождения решений краевой задачи (1)–(3), сведем ее к разностному уравнению с непрерывным аргументом [10; 11].

Общее решение уравнения (1) можно представить в виде типа Д'Аламбера:

$$u(x;t) = v(x+t), \tag{4}$$

где $v \in C^1(R^+ \cup \{0\}; R)$ – произвольная функция.

Получив решение уравнения (1) в виде (4), сведем краевую задачу (1)–(3) к разностному уравнению с непрерывным временем. Подставляя (4) в краевое условие (2), получим автономное разностное уравнения с непрерывным аргументом:

$$v(\tau+1) = f(v(\tau)), \tag{5}$$

где $\tau \in R^+ \cup \{0\}$. Используя (4) и (3), получим начальное условие для разностного уравнения (5):

$$v(\tau) = \varphi(\tau), \tag{6}$$

где $\tau \in [0;1)$.

Общее решение уравнения (5) с начальным условием (6) следующее:

$$v(\tau) = f^n(\varphi(\{\tau\})), \tag{7}$$

где $\tau \in [n; n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Используя формулу (4), которая связывает решение краевой задачи (1)–(3) и разностного уравнения с непрерывным аргументом (5) с начальным условием (6), из (7) получим общее решение задачи (1)–(3):

$$u(x;t) = f^{[x+t]}(\varphi(\{x+t\})), \tag{8}$$

где $x \in [0;1]$, $t \in R^+ \cup \{0\}$.

Поскольку функция φ с начального условия (3) является постоянной, т.е. для любого $x \in [0;1]$ имеет место равенство $\varphi(x) = c$, где $c \in R$ – фиксированное число, разностное уравнение с непрерывным аргументом (5) с начальным условием (6) определяется дискретным разностным уравнением вида:

$$v(n+1) = f(v(n)), \tag{9}$$

где $n \in N \cup \{0\}$, с начальным условием:

$$v(0) = c. \tag{10}$$

Для непрерывной функции f с правой части уравнения (9) выполняется теорема Шарковского о сосуществовании циклов [12], согласно которой из наличия в непрерывном отображении отрезка цикла порядка n следует наличие цикла периода n', такого, что $n' \lhd n$, где $\lhd$ обозначает порядок вида $1 \lhd 2 \lhd 2^2 \lhd 2^3 \lhd \ldots \lhd 2^2 \cdot 5 \lhd 2^2 \cdot 3 \lhd \ldots \lhd 2 \cdot 5 \lhd 2 \cdot 3 \lhd \ldots \lhd 9 \lhd \ \lhd 7 \lhd 5 \lhd 3$ на множестве натуральных чисел. Поскольку разностное уравнение с дискретным аргументом (9) и начальным значением (10) определяет разностное уравнение с непрерывным аргументом (5) и начальной функцией (6), которые являются результатами редукции краевой задачи (1)–(3), то из существования цикла периода n', где $n' \lhd n$, для дискретного отображения следует существование обобщенного кусочно-постоянного n'-периодического решения краевой задачи (1)–(3), где $n' \lhd n$.

Теорема 1 доказана.

Информации о том, что краевая задача (1)–(3) имеет обобщенное кусочно-постоянное n-периодическое решение, недостаточно для передачи информации с помощью кусочно-постоянных функций. Нам необходима более детальная классификация периодических решений уравнения (9) с начальным условием (10). Эта задача равносильна классификации циклов отображения f, поэтому для дальнейшего исследования нам понадобится ряд определений и утверждений из теории циклических перестановок как типов циклов одномерных отображений.

Пусть $I=[0;1]$, $g\in C^0(I;I)$ – некоторая непрерывная функция. В дальнейшем используются следующие определения [13].

Определение 4. Пусть $B=\{\beta, g(\beta),\ldots, g^{n-1}(\beta)\}$ – цикл периода n отображения $g\in C^0(I;I)$, где $\beta=\min\limits_{1\le i\le n} g^{i-1}(\beta)$ и $g^n(\beta)=\beta$. Упорядоченный набор чисел $r=(r_1,\ldots,r_i,\ldots,r_n)$, каждый элемент которого определяется по формуле $r_i=\#\{k\,|\,1\le k\le n,\, g^{k-1}(\beta)\le g^{i-1}(\beta)\}$, $1\le i\le n$, где “$\# A$” обозначает количество элементов множества A, называется типом цикла B.

Определение 5. Типом произвольной периодической точки цикла называется тип этого цикла.

Из определения 4 следует, что $r_1=1$ и для любых различных номеров $1\le i\le n$, $1\le j\le n$ выполняется неравенство $r_i\ne r_j$.

Любому циклу одномерного отображения можно поставить в соответствие некоторую циклическую перестановку. Точки цикла B обозначим теперь $\beta_1,\ldots,\beta_i,\beta_{i+1},\ldots,\beta_n$, где $\beta_1<\ldots<\beta_i<\beta_{i+1}<\ldots<\beta_n$. Пусть $g(\beta_i)=\beta_{j_i}$, где $1\le j_i\le n, 1\le i\le n$. Тогда соответствующую циклу B циклическую перестановку можно записать следующим образом: $\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n\end{pmatrix}$. Если цикл имеет тип π, то будем считать π типом любой точки этого цикла.

Циклическое изображения перестановки π имеет следующий вид: $(1,\pi(1),\pi^{i-1}(1),\ldots,\pi^{n-1}(1))$, следовательно, в силу того, что цикл $B=\{\beta, g(\beta), ..., g^{n-1}(\beta)\}$, получим $r_i=\pi^{i-1}(1)$ для произвольного $1\le i\le n$. Из последнего следует, что определение типа цикла через соответствующую циклическую перестановку и упорядоченный набор $(r_1,\ldots,r_i,\ldots,r_n)$ эквивалентны, т.е. этот упорядоченный набор совпадает с циклическим изображением перестановки π цикла B. В связи с эквивалентностью циклической перестановки π, что соответствует циклу B, и типа цикла B как строки $(r_1,\ldots,r_i,\ldots,r_n)$, в дальнейшем под типом цикла мы будем понимать один из этих объектов в зависимости от контекста.

Рассмотрим обобщенное кусочно-постоянное n-периодическое решение $u(x;t)$ краевой задачи (1)–(3). Постоянную c с начального условия (3) выбираем так, чтобы c была периодической точкой отображения f с краевым условием (2). Определим области D_{i+kn}, где $i, k\in N\cup\{0\}$, $0\le i\le n-1$, следующим образом: $D_{i+kn}=\{(x;t)\in[0;1]\times R^+\cup\{0\}\,|\quad x+t=\alpha+i+kn,\ \alpha\in[0;1)\}$. Из начального условия (3) следует, в частности, равенство $u(0;0)=c$, из которого, используя представления решения (8), получим аналитическое представление обобщенного n-периодического решения краевой задачи (1)–(3):

$$u(x;t) = \begin{cases} c, & (x;t) \in D_{kn}; \\ f(c), & (x;t) \in D_{1+kn}; \\ \dots & \\ f^{i}(c), & (x;t) \in D_{i+kn}; \\ \dots & \\ f^{n-1}(c), & (x;t) \in D_{n-1+kn}. \end{cases} \tag{11}$$

Определение 6. Типом обобщенного кусочно-постоянного n-периодического решения краевой задачи (1)–(3) называется тип периодической точки c.

Из определения 6 следует, что аналитическое представление (11) обобщенного n-периодического решения краевой задачи (1)–(3) имеет тип, равный типу периодической точки c начального условия (3).

Для исследования сосуществования обобщенных кусочно-постоянных периодических решений краевой задачи (1)–(3) с помощью их типов сформулируем следующие определения.

Определение 7. Циклическая перестановка $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$ называется выпуклой вверх [2, 9], если выполняются неравенства $j_i < j_{i+1}$ при $1 \le i < \widehat{i}$ и $j_i > j_{i+1}$ при $\widehat{i} \le i < n$, где $2 \le \widehat{i} \le n-1$ и $\pi(\widehat{i}) = n$.

Аналогично циклическая перестановка $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$ называется выпуклой вниз, если выполняются неравенства $j_i > j_{i+1}$ при $1 \le i < \breve{i}$ и $j_i < j_{i+1}$ при $\breve{i} \le i < n$, где $2 \le \breve{i} \le n-1$ и $\pi(\breve{i}) = 1$.

Очевидно, что два непрерывные отображения отрезка, одно из которых имеет цикл типа выпуклой вверх циклической перестановки, а другое – типа выпуклой вниз циклической перестановки, являются топологически сопряженными, поэтому достаточно рассмотреть свойства только выпуклых вверх циклических перестановок, ведь свойства выпуклых вниз циклических перестановок устанавливаются автоматически, используя их связь с выпуклыми вверх циклическими перестановками. В связи с этим в дальнейшем будем рассматривать только отображение, имеющее циклы, которым соответствуют выпуклые вверх циклические перестановки. Такие перестановки будем называть выпуклыми циклическими перестановками.

Множество всех выпуклых циклических перестановок обозначим Π, а множество всех выпуклых циклических перестановок порядка n обозначим Π_n.

С выпуклыми циклическими перестановками тесно связаны циклы унимодальных непрерывных отображений. Сформулируем определение унимодального отображения.

Определение 8. Пусть $g \in C^0(I;I)$. Отображение g называется унимодальным, если существует значение $c \in (0;1)$, такое, что g монотонно не убывает (монотонно не возрастает) на отрезке $[0;c]$ и монотонно не возрастает (монотонно не убывает) на отрезке $[c;1]$.

Из определения 8 следует, что унимодальное отображения состоит только из двух ветвей монотонности.

Учитывая, что мы рассматриваем выпуклые перестановки, будем считать, что унимодальное отображения g выпуклое вверх. Выкладки для случая, когда g – унимодальное выпуклое вниз отображения, аналогичные выкладкам для случая унимодального выпуклого вверх отображения.

Поскольку ограничение непрерывного отображения на цикл является циклической перестановкой, типом любого цикла унимодального отображения является выпуклая циклическая перестановка, но возможно такое, что двум разным циклам одного периода унимодального выпуклого вверх отображения может соответствовать одна и та же выпуклая циклическая перестановка. Для того, чтобы различать циклы в таком случае, воспользуемся результатами, полученными в работе [17]. Коротко приведем соответствующие рассуждения.

Поскольку $r_n = n$ – максимальное число среди чисел $1, r_2, \ldots, r_n$, образующих тип $(1, r_2, \ldots, r_n)$ цикла, которому соответствует выпуклая циклическая перестановка π, а число r_{n-1} является прообразом элемента r_n, то последовательно сравним каждое из чисел $1, r_2, \ldots, r_n$ с числом r_{n-1} и разобьем этот тип $(1, r_2, \ldots, r_n)$ на блоки (упорядоченные цепочки чисел, с соблюдением уже установленного в типе порядка) по следующему правилу: каждый блок содержит элементы, которые или все меньше числа r_{n-1}, или все не меньше числа r_{n-1}.

В результате тип $(1, r_2, \ldots, r_n)$ перестановки π можно записать в таком виде:

$$(|1, \ldots, r_{m_1} | r_{m_1+1}, \ldots, r_{m_1+l_1} | \ldots | r_{m_1+l_1+\ldots+m_{s-1}+l_{s-1}+1}, \ldots, r_{m_1+l_1+\ldots+l_{s-1}+m_s} | \\ r_{m_1+l_1+\ldots+l_{s-1}+m_s+1}, \ldots, r_{m_1+l_1+\ldots+l_{s-1}+m_s+l_s} |), \tag{12}$$

где символ $|$ разделяет соседние блоки.

Числа m_i, l_i, где $1 \le i \le s$, для цикла типа $(1, r_2, \ldots, r_n)$ унимодального отображения g имеют следующее значение. Пусть β – наименьшая точка цикла типа r унимодального отображения g. Тогда m_1 – это количество точек в последовательности $(\beta, g(\beta), \ldots, g^{n-1}(\beta))$, принадлежащих интервалу $[0;c)$, то есть $g^{i-1}(\beta) \in [0;c)$, где $1 \le i \le m_1$, l_1 – это количество точек в последовательности $(\beta, g(\beta), \ldots, g^{n-1}(\beta))$, начиная с $g^{m_1}(\beta)$, принадлежащих интервалу $[c;1]$, т.е. $g^{i-1}(\beta) \in [c;1]$, где $m_1 + 1 \le i \le m_1 + l_1$, m_2 – это количество точек в последовательности $(\beta, g(\beta), \ldots, g^{n-1}(\beta))$, начиная с $g^{m_1+l_1}(\beta)$, принадлежащих $[0;c)$, т.е. $g^{i-1}(\beta) \in [0;c)$, где $m_1 + l_1 + 1 \le i \le m_1 + l_1 + m_2$ и т.д.

Аналогичным образом тип $(1, r_2, \ldots, r_n)$ перестановки π можно записать в виде:

$$(|1, \ldots, r_{m'_1} | r_{m'_1+1}, \ldots, r_{m'_1+l'_1} | \ldots | r_{m'_1+l'_1+\ldots+m'_{s-1}+l'_{s-1}+1}, \ldots, r_{m'_1+l'_1+\ldots+l'_{s-1}+m'_s} | \\ r_{m'_1+l'_1+\ldots+l'_{s-1}+m'_s+1}, \ldots, r_{m'_1+l'_1+\ldots+l'_{s-1}+m'_s+l'_s} |), \tag{13}$$

где блоки с нечетными номерами содержат только числа, не больше r_{n-1}, а блоки с четными номерами – только числа, больше r_{n-1}.

Аналогично числам строки (12), числа строки (13) тесно связаны с циклом отображения g. Пусть β – наименьшая точка цикла типа r унимодального отображения g. Тогда m'_1 – это количество точек в последовательности $(\beta, g(\beta), \ldots, g^{n-1}(\beta))$, принадлежащих интервалу $[0;c]$, то есть $g^{i-1}(\beta) \in [0;c]$, где $1 \le i \le m'_1$, l'_1 – это количество точек в последовательности $(\beta, g(\beta), \ldots, g^{n-1}(\beta))$, начиная с $g^{m'_1}(\beta)$, принадлежащих интервалу $(c;1]$, т.е. $g^{i-1}(\beta)\in(c;1]$, где $m_1'+1\le i\le m_1'+l_1'$, m_2' – это количество точек в последовательности $(\beta, g(\beta),\dots, g^{n-1}(\beta))$, начиная с $g^{m_1'+l_1'}(\beta)$, принадлежащих $[0;c]$, т.е. $g^{i-1}(\beta)\in[0;c]$, где $m_1'+l_1'+1\le i\le m_1'+l_1'+m_2'$ и т.д.

Количество блоков в строках (12) и (13) является четным, поскольку $r_n = n > r_{n-1}$, т.е. каждая из строк (12), (13) заканчивается блоком с парным номером $2s$ и $2s'$ соответственно.

При этом выполняются следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^{s}(m_i+l_i)=n,\quad \sum_{i=1}^{s'}(m_i'+l_i')=n.$$

С чисел $m_1,m_2,\dots,m_s$, $l_1,l_2,\dots,l_s$, $m_1',m_2',\dots,m_s'$, $l_1',l_2',\dots,l_s'$, фигурирующих в (12) и (13), образуем числовые наборы вида:

$$(m_1, l_1, m_2, l_2,\dots, m_{s-1}, l_{s-1}, m_s, l_s), \tag{14}$$

$$(m_1', l_1', m_2', l_2',\dots, m_{s'-1}', l_{s'-1}', m_{s'}', 1), \tag{15}$$

где числовой набор (14) соответствует строке (12), а числовой набор (15) – строке (13).

Будем считать, что числовой набор длины n состоит только из повторяющихся блоков, если его можно представить в виде:

$$(m_1, l_1, m_2, l_2,\dots,m_s, l_s, m_1, l_1, m_2, l_2,\dots,m_s, l_s,\dots,m_1, l_1, m_2, l_2,\dots,m_s, l_s),$$

где $(m_1, l_1, m_2, l_2,\dots,m_s, l_s)$ – повторяющийся блок (s – произвольный фиксированный делитель числа n, где $n = ps$).

Определение 9. Если числовой набор (14), построенный по выпуклой циклической перестановке π, не состоит только из повторяющихся блоков, которые его образуют, то (14) называется м-моделью типа цикла, которому соответствует выпуклая циклическая перестановка π. Аналогично, если числовой набор (15), построенный по выпуклой циклической перестановке π, не состоит только из повторяющихся блоков, его образующих, то (15) называется р-моделью типа цикла, которому соответствует выпуклая циклическая перестановка π.

Определение 10. Весом модели типа цикла, которая представляется числовым набором $(m_1, l_1, m_2, l_2,\dots,m_s, l_s)$, называется число σ, определяемое из равенства:

$$\frac{3}{2}\sigma=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{s}\left((-2)^{\sum_{j=i+1}^{s} l_j}\,2^{\sum_{j=i+1}^{s} m_j}\,(1-(-2)^{l_i})\right)}{1-(-2)^{\sum_{i=1}^{s} l_i}\,2^{\sum_{i=1}^{s} m_i}}. \tag{16}$$

Определение 11. Если выпуклая циклическая перестановка $\pi\in\Pi$ имеет одну модель типа цикла, то ее весом называется вес этой модели типа цикла. Если выпуклая циклическая перестановка $\pi\in\Pi$ имеет две модели типа цикла, то ее весом называется больший из весов этих моделей типа цикла. Вес выпуклой циклической перестановки π обозначается σ_π.

Определение 12. Весом произвольной точки цикла называется вес выпуклой циклической перестановки, которая является типом этого цикла.

Геометрический смысл веса объясняет следующая лемма [17].

Лемма 1. Координата минимальной точки x цикла типа $\pi \in \Pi_n$ периода n с моделью типа цикла $(m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_s, l_s)$ отображения «тент», которое определено следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le \dfrac{1}{2}; \\ 2(1-x), & \dfrac{1}{2} < x \le 1; \end{cases} \tag{17}$$

равна σ_π. Учитывая, что каждая выпуклая циклическая перестановка имеет по крайней мере одну модель типа цикла, понятие веса выпуклой циклической перестановки определено корректно [17].

На множестве выпуклых циклических перестановок Π введем отношение порядка $\prec$ следующим образом: две произвольные выпуклые циклические перестановки π' и π'' находятся в отношении $\prec$, т.е. $\pi' \prec \pi''$, если $\sigma_{\pi'} \le \sigma_{\pi''}$. Из определения отношения порядка $\prec$ следует, что $\prec$ является отношением линейного порядка на множестве выпуклых циклических перестановок Π.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть задана краевая задача (1), (2), где $f \in C^0(I;I)$ – непрерывное отображение, с постоянной начальной функцией (3). Если значение начального условия (3) является периодической точкой типа $\pi_1 \in \Pi$ отображения f, то краевая задача (1), (2) имеет обобщенное кусочно-постоянное периодическое решение типа $\pi_2 \in \Pi$, где $\pi_1 \prec \pi_2$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $u(x;t)$ – обобщенное кусочно-постоянное периодическое решение краевой задачи (1), (2) с начальным условием (3), таким, что $\varphi(x) = c_1$, где c_1 является периодической точкой типа $\pi_1 \in \Pi$ отображения f. Аналогично доказательству теоремы 1, используя формулу Д'Аламбера и постоянство функции в начальном условии (3), краевую задачу (1)–(3) сведем к разностному уравнению с дискретным аргументом (9) и начальным условием (10), таким, что $v(0) = c_1$, где c_1 – постоянная с начального условия (3). Поскольку π_1 – тип обобщенного кусочно-постоянного периодического решения краевой задачи (1)–(3), то в результате редукции к разностному уравнению (9), (10), π_1 является типом цикла непрерывного отображения f. Используем теорему, которая сформулирована и доказана в [17], о том, что в случае, когда непрерывное отображение отрезка имеет цикл типа выпуклой циклической перестановки, оно также имеет цикл большего типа согласно отношению порядка на множестве выпуклых циклических перестановок. Учитывая, что $\pi_1 \in \Pi$ и $f \in C^0(I;I)$, получим, что непрерывное отображение f также имеет цикл типа $\pi_2 \in \Pi$, где $\pi_1 \prec \pi_2$. Опять используем связь рассматриваемой краевой задачи с динамикой отображения f. Поскольку f имеет цикл типа π_2, то разностное уравнение с дискретным аргументом (9) и начальным условием $v(0) = c_2$, где c_2 – периодическая точка типа π_2 отображения f, соответствует краевой задачи (1), (2) с начальным условием $\varphi(x) = c_2$, где c_2 – периодическая точка типа π_2 отображения f. Из последнего следует, что краевая задача (1), (2) имеет обобщенное кусочно-постоянное периодическое решение типа $\pi_2 \in \Pi$, где $\pi_1 \prec \pi_2$.

Теорема 2 доказана.

Имеет место следующее следствие из теоремы 2.

Следствие 1. Пусть задана краевая задача (1), (2), где f – отображение “тент” вида (17) с постоянной начальной функцией (3). Если значение начального условия (3) является периодической точкой типа $\pi_1 \in \Pi$ отображения f, то краевая задача (1), (2) имеет обобщенное кусочно-постоянное периодическое решение типа $\pi_2 \in \Pi$, где $\pi_1 \prec \pi_2$, вида:

$$u(x;t) = \begin{cases} \sigma_{\pi_2}, & (x;t) \in D_{kn_2}; \\ f(\sigma_{\pi_2}), & (x;t) \in D_{1+kn_2}; \\ \dots & \\ f^i(\sigma_{\pi_2}), & (x;t) \in D_{i+kn_2}; \\ \dots & \\ f^{n_2-1}(\sigma_{\pi_2}), & (x;t) \in D_{n-1+kn_2}. \end{cases} \tag{18}$$

Доказательство следствия 1. Поскольку отображение (17) является непрерывным, то для краевой задачи (1), (2), где f – отображение вида (17) с начальным условием (3), где постоянная является периодической точкой типа $\pi_1 \in \Pi$ отображения f, выполняется теорема 2. Из последнего следует, что краевая задача (1)–(3) имеет обобщенное кусочно-постоянное n_2-периодическое решение типа, где $\pi_1 \prec \pi_2$. Используя лемму 1, получаем, что координата минимальной точки цикла любого типа отображения «тент» равна весу этого цикла. Тогда, используя представление (11), обобщенное кусочно-постоянное n_2-периодическое решение типа π_2 краевой задачи (1)–(3) можно записать в виде (18).

Следствие 1 доказано.

Для формулировки еще одного следствия из теоремы 2 нам понадобятся следующие определения.

Определение 13. Минимальным циклом называется цикл, тип которого является минимальной циклической перестановкой или симметричной ей перестановкой.

Определение 14. Циклические перестановки π_1 и π_2 периода n называются симметричными, если для произвольного $1 \le i \le n$, где $n \in N$, выполняется соотношение $\pi_2(i) = n+1-\pi_1(n+1-i)$.

Минимальные перестановки произвольного периода описаны в [4]. Заметим только, что минимальными циклическими перестановками нечетного периода $2k+1$, где $k>1$, являются следующие циклические перестановки:

$$\pi_{2k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k+1 & k+2 & \dots & 2k & 2k+1 \\ k+1 & 2k+1 & 2k & \dots & k+2 & k & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

а при $k=1$:

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Используя определение 7, получим, что минимальные перестановки, заданные формулами (19) и (20), являются выпуклыми вверх циклическими перестановкаи.

Докажем следующее следствие из теоремы 2.

Следствие 2. Пусть задана краевая задача (1), (2), где $f \in C^0(I;I)$ – непрерывное отображение с постоянной начальной функцией (3). Если значение начального условия (3) является $2k+1$-периодической точкой типа π отображения f, где $k \in N$, то краевая задача (1), (2) имеет обобщенное кусочно-постоянное периодическое решение типа $\pi_{2k'+1}$, где $k' \geq k$, кроме того, если $\pi \in \Pi$, то краевая задача (1), (2) имеет обобщенное кусочно-постоянное периодическое решение типа $\pi' \in \Pi$, такое, что $\sigma_{\pi'} \geq \frac{2}{3}\frac{1-(-2)^{2k}}{1+(-2)^{2k+1}}$.

Доказательство следствия 2. Учитывая порядок Шарковского, из существования у отображения $f \in C^0(I;I)$ цикла периода $2k+1$ следует существование цикла периода $2k'+1$, где $k' \geq k$. Используя утверждение о том, что из наличия в отображения $g \in C^0(I;I)$ цикла периода n, следует наличие у него цикла минимального типа периода n [4], получим, что рассматриваемое отображение имеет минимальный цикл периода $2k'+1$, где $k' \geq k$. Поскольку минимальные циклы нечетного периода имеют вид (19), (20) [4], то отображение $f \in C^0(I;I)$ имеет цикл типа $\pi_{2k'+1}$, где $k' \geq k$.

Если $\pi \in \Pi$, то с выпуклости вверх типа цикла отображения f следует, что можно построить унимодальное отображения такое, что любой цикл построенного отображения является циклом выходного отображения, и такое, что имеет цикл типа минимальной циклической перестановки периода $2k+1$. С унимодальности построенного отображения следует, что тип каждого цикла выпуклый вверх. Поэтому и минимальная циклическая перестановка периода $2k+1$ является выпуклой вверх, т.е. имеет вид π_{2k+1}. Несложно проверить, что вес этой минимальной циклической перестановки для соответствующего k равен $\frac{2}{3}\frac{1-(-2)^{2k}}{1+(-2)^{2k+1}}$. Используя теорему 2, получим, что краевая задача (1), (2) имеет обобщенное кусочно-постоянное периодическое решение типа $\pi' \in \Pi$, где $\sigma_{\pi'} \geq \frac{2}{3}\frac{1-(-2)^{2k}}{1+(-2)^{2k+1}}$.

Следствие 2 доказано.

Заключение

Исследована феноменологическая модель широкополосного генератора цифровых сигналов, которая представлена краевой задачей для линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка и нелинейным краевым условием. Введено понятие обобщенного кусочно-постоянного n-периодического решения краевой задачи и его типа. Для рассматриваемого класса краевых задач построено обобщенное решение в аналитическом виде и исследованы условия сосуществования таких решений в зависимости от типа.

Авторы благодарны академику НАН Украины Александру Николаевичу Шарковскому за постановку даной задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Premier, R. Introductory Signal Processing / R. Premier. – World Scientific, 1991. – 734 p.
2. Шарковский, А. Н. Динамика одномерных отображений / А. Н. Шарковский [и др.] . – Киев : Наукова думка, 1989. – 216 с.
3. Шарковский, А. Н. Разностные уравнения и их приложения / А. Н. Шарковский, Ю. Л. Майстренко, Е. Ю. Романенко. – Киев : Наукова думка, 1986. – 278 с.

4. Шарковський, О. М. Динамічні системи, породжувані крайовими задачами. Ідеальна турбулентність. Комп'ютерна турбулентність / О. М. Шарковський // Український математичний конгрес, 21–23 серп. 2001 р., Київ : тези доповідей. – Київ, 2001.

5. Герсеванов, Н. М. Итерационное исчисление и его приложения / Н. М. Герсеванов. – М. : Машстройиздат, 1950. – 70 с.

6. Витт, А. А. К теории скрипичной струны / А. А. Витт // Журн. техн. физики. – 1936. – Т. 6. – Вып. 9. – С. 1459–1479.

7. Романенко, О. Ю. Явище автостохастичності в динамічних системах, породжуваних різницевими рівняннями з неперервним аргументом / О. Ю. Романенко // Укр. матем. журн. – 2006. – Т. 58. – № 7. – С. 1079–1105.

8. Sharkovsky, A. N. Universal phenomena in solution bifurcations of some boundary value problems / A. N. Sharkovsky, A. G. Sivak // Journal Nonlinear Math. Phys. – 1994. – Vol. 1, № 2. – P. 147–157.

9. Федоренко, В. В. Канонические периодические траекториии одномерных динамических систем / В. В. Федоренко // Приближенные и качественные методы теории дифференциально-функциональных уравнений. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1983. – С. 106–109.

10. Романенко, О. Ю. Динаміка розв'язків найпростіших нелінійних граничних задач / / О. Ю. Романенко, О. М. Шарковський // Укр. матем. журн. – 1999. – Т. 51, № 6. – С. 810–826.

11. Тищук, Т. В. Узагальнені періодичні розв'язки нелінійної крайової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку гіперболічного типу / Т. В. Тищук // Буковинський матем. журн. – 2014. – Т. 2, № 1. – С. 113–117.

12. Шарковский, А. Н. Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя / А. Н. Шарковский // Укр. матем. журн. – 1964. – Т. 16, № 1. – С. 61–71.

13. Тищук, Т. В. Класифікація періодичних траєкторій неперервних унімодальних опуклих вгору відображень відрізка в себе / Т. В. Тищук // Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Т. Шевченка. Математика. Механіка. – 2013. – Т. 32, № 4. – С. 41–44.

14. Fedorenko, A. D. Solution behaviour in a class of difference-differential equations / A. D. Fedorenko [et all.] // Bulletin of the Australian Mathematical Society. – 1998. – Vol. 57, № 1. – P. 37–48.

15. Fedorenko A. D. Farey's rule for stable periodic waves in a transmission line / A. D. Fedorenko [et all.] // CADSEM Report 96-008, Deakin University, Australia, April, 1996.

16. Шарковський, О. М. Співіснування періодичних орбіт для одного класу розривних відображень / О. М. Шарковський [та ін.] // Доповіді НАН України. – 1996. – № 11. – С. 21–25.

17. Самойленко, В. Г. Співіснування типів унімодальних циклів неперервного відображення відрізка в себе / В. Г. Самойленко, Т. В. Тищук, В. В. Федоренко // Буковинський матем. журн. – 2014. – Т. 2. – № 4. – С. 64–73.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 13.03.2015

Samoylenko V.H., Tyshchuk T.V. **Piecewise Constant Solutions of the Linear Partial Differential Equation of the First Order**

We consider a boundary value problem for the first-order partial differential equation of hyperbolic type with a nonlinear boundary condition, which is used as a phenomenological model for digital signals generator. We introduce the notion of the type of a generalized piecewise constant n–periodic solution of the boundary value problem and study co-existence of the solutions. For a certain class of boundary value problems we obtain an analytic form of generalized piecewise constant n–periodic solution.