УДК 517+518.948

В.М. Мадорский
канд. физ.-мат. наук,
доц. каф. прикладной математики и технологий программирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

К ВОПРОСУ О РЯДЕ КВАЗИНЬЮТОНОВСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГЛАДКИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Для решения нелинейных уравнений с гладким оператором в статье рассматривается ряд полулокальных квазиньютоновских итерационных процессов, локально сходящихся с квадратичной скоростью. Доказывается сходимость целого семейства таких процессов неполного и полного прогнозов с «плохого» начального приближения.

Рассматривается уравнение

$$f(x) = 0, f(D \subset R^n \to R^n) \tag{1}$$

с нелинейным гладким оператором f. Относительно f полагаем, что

$$f \in C_D^{(2)}, \|f'(x)\| \le K, \|[f'(x)]^{-1}\| \le B, \forall x \in D, \tag{2}$$

здесь $f'(x), f''(x)$, соответственно, первые и вторые производные оператора f, $[f'(x)]^{-1}$ – оператор, обратный оператору $f'(x)$.

Для решения уравнения (1) применим следующий нерегуляризованный итерационный процесс.

Шаг 1. Решаем СЛАУ относительно Δx_n.

$$f'(x_n)\Delta x_n = -\beta_n f(x_n), n = 0,1,\dots \,. \tag{3}$$

Шаг 2. Уточняем вектор x_n

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n . \tag{4}$$

Шаг 3. Проверяем окончание итерационного процесса:
если $\|f(x_{n+1})\| \le \varepsilon, (\varepsilon << 1 -$ параметр останова), то выход из просчетов, иначе переход на

Шаг 4. Производится пересчет итерационного параметра β_n по одной из формул

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|^p}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|^p}), p = 1,2, \tag{5}$$

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\gamma_n \|f(x_{n-1})\|^p}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|^p}), p = 1,2,$$

γ_n выбирается из условия, чтобы выполнялось соотношение $\beta_n \|f(x_n)\|^p = \beta_{n+1} \|f(x_{n+1})\|^p$ и осуществляется переход на Шаг 1.

В качестве γ_n используем формулу $\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \beta_{n+1} \|f(x_{n-1})\|^p}{\beta_n \|f(x_n)\|^p}), \gamma_0 \quad \beta_0^2, \|f(x_{-1})\| \quad \|f(x_0)\|$.

Для доказательства сходимости итерационного процесса (3)–(5) используем теорему о среднем для гладких операторов.

$$\|f(x_{n+1})\| \le \|f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\| + 0{,}5K\|x_{n+1} - x_n\|^2 . \tag{6}$$

Пусть $p = 1$, тогда с учетом (2) и (3) имеем из (6)

$$\|f(x_{n+1})\| \le (1-\beta_n)\|f(x_n)\| + 0.5KB^2\beta_n^2\|f(x_n)\|^2 =$$
$$= (1-\beta_n(1-0.5KB^2\beta_n\|f(x_n)\|))\|f(x_n)\| =$$
$$= (1-\beta_n(1-\varepsilon_n))\|f(x_n)\| = q_n\|f(x_n)\|, \tag{7}$$
$$\varepsilon_n = 0.5KB^2\beta_n\|f(x_n)\|, q_n = 1-\beta_n(1-\varepsilon_n), n = 0,1,2,...$$

В связи со свойством (5) все ε_i одинаковы. Пусть x_k, β_k таковы, что $\varepsilon_k = 0,5KB^2\beta_k\|f(x_k)\| < 1$, тогда все $\varepsilon_i < 1$, для $i \ge k$. Из (7) имеем: $\|f(x_{k+1})\| \le q_k\|f(x_k)\| < \|f(x_k)\|$, а из (5) имеем, что $\beta_k\|f(x_k)\| = \beta_{k+1}\|f(x_{k+1})\|$. Сравнение двух последних неравенств позволяет утверждать, что $\beta_{k+1} > \beta_k$, в связи с чем $q_{k+1} = 1-\beta_{k+1}(1-\varepsilon_{k+1}) = 1-\beta_{k+1}(1-\varepsilon_k) < q_k$.

Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что последовательность итерационных параметров монотонно возрастает $(\beta_i \nearrow 1)$, а последовательность q_i монотонно убывает ($q_i \searrow 0$).

Переходя к пределу в (7) при $n \to \infty$, имеем, что последовательность элементов x_n, генерируемых итерационным процессом (3) – (5), сходится к решению уравнения (1), если такое решение в области D существует.

Из (5) и (7), переходя к пределу, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{i+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_i\|f(x_i)\|}{\|f(x_{i+1})\|} \ge \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_0\|f(x_0)\|}{\Pi_0^n q_i\|f(x_0)\|} = +\infty. \tag{8}$$

С учетом (5), (8), существует такой номер *k*, что для $i \ge k$ все $\beta_i := 1$.

Таким образом, в процессе счета наступает момент, когда процесс (3) – (5) переходит в метод Ньютона с характерной для метода Ньютона локальной квадратичной скоростью сходимости.

Стандартным образом легко находится сфера $S(x_k, r) \subset D$, где имеют место условия (2).

Теорема 1. Пусть в области *D* существует x^* – решение уравнения (1), выполняются условия (2) и на некотором шаге итерационного процесса (3) – (5) $\varepsilon_n = 0,5KB^2\beta_n\|f(x_n)\| < 1$. Тогда процесс (3) – (5) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^*.

Пусть p = 2. Тогда вместо СЛАУ (3) решается СЛАУ.

$$f'(x_n)\Delta x_n = -\sqrt{\beta_n} f(x_n), n = 0,1,2...,, \tag{3a}$$

а условие $\varepsilon_n = 0,5KB^2\beta_n\|f(x_n)\|$ заменяется на условие $\bar{\varepsilon}_k = 0,5KB^2\sqrt{\beta_k}\|f(x_k)\| < 1$.

Теорема 2. Пусть в области D существует решение x^* уравнения (1), оператор f удовлетворяет условиям (2) и на некотором шаге k вычислительного процесса $\bar{\varepsilon}_k < 1$. Тогда итерационный процесс (3a), (4) – (5) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^k.

Основным слабым местом рассмотренных выше алгоритмов является требование обратимости оператора $f'(x)$ в области D. Для снятия этого достаточно обременительного условия вводим частичную регуляризацию, рассмотрев при p = 1 на шаге 1 СЛАУ

$$(\alpha\beta_n\|f(x_n)\|E + f'(x_n))\Delta x_n = -\beta_n f(x_n), n = 0,1,2,... \tag{9}$$

$\alpha << 1, E$ – единичный оператор.

Пусть

$$\left\|[\alpha\beta_n \|f(x_n)\|E + f'(x_n)]^{-1}\right\| \le B\,. \tag{10}$$

Применяя теорему о среднем для гладких операторов, имеем с учетом (9), (10):

$$\begin{aligned} &\|f(x_{n+1})\| \le \|f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\| + \\ &+ 0.5K\|x_{n+1} - x_n\|^2 \le (1-\beta_n)\|f(x_n)\| + \\ &+ \alpha\beta_n^2\|f(x_n)\|^2 B + 0.5KB^2\beta_n^2\|f(x_n)\|^2 = \\ &= (1-\beta_n(1-\varepsilon_n))\|f(x_n)\| = q_n\|f(x_n)\|, \\ &\varepsilon_n = (\alpha B + 0.5KB^2)\beta_n\|f(x_n)\|, q_n = 1-\beta_n(1-\varepsilon_n). \end{aligned} \tag{11}$$

Из (11) следует при использовании метода математической индукции сходимость последовательности элементов, определяемых процессом (9), (4), (5), к решению уравнения (1), если такое решение в D существует.

Проводя рассуждения, вполне аналогичные тем, которые имели место при доказательстве теоремы 1, нетрудно сформулировать и доказать теорему 3.

Теорема 3. Пусть в интересующей нас области D существует решение x^* уравнения (1), оператор $f \in C_D^{(2)}$, на некотором шаге вычислительного процесса (9), (4) – (5) $\varepsilon_k = (\alpha B + 0.5KB^2)\beta_k\|f(x_k)\| < 1$ (константа B определяется формулой (10)). Тогда процесс (9), (4) – (5) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^*.

Пусть $p = 2$. Тогда на шаге 1 решается СЛАУ

$$(\alpha\beta_n\|f(x_n)\|E + f'(x_n))\Delta x_n = -\sqrt{\beta_n}f(x_n)\,. \tag{9a}$$

В этом случае справедлива

Теорема 4. Пусть в интересующей нас области D существует решение x^* уравнения (1), оператор $f \in C_D^{(2)}$, на некотором шаге вычислительного процесса (9a), (4) – (5) $\bar{\varepsilon}_k = (\alpha B + 0.5KB^2)\sqrt{\beta_k}\|f(x_k)\| < 1$ (константа B определяется формулой (10)). Тогда процесс (9a), (4) – (5) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^*.

Достаточно эффективными являются итерационные процессы, в которых шаговая длина на шаге 4 определяется следующим образом:

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\|f(x_n)\|^p\,\gamma_n}{\beta_n\|f(x_n+\Delta x_n)\|^p}), p = 1{,}2, \tag{12}$$

где $\gamma_0 = \beta_0^2$ и γ_n выбирается из условия, чтобы выполнялось соотношение

$$\beta_n\|f(x_n)\|^p = \beta_{n+1}\|f(x_{n+1})\|^p,$$

после чего, как обычно, осуществляется переход на шаг 1.

В качестве γ_n используем формулу

$$\gamma_{n+1} = \frac{\|f(x_n)\|^p|f(x_{n+1}+\Delta x_{n+1})\|^p\,\gamma_n\beta_{n+1}}{\beta_n\|f(x_n+\Delta x_n)\|^p\,\|f(x_{n+2})\|^p},\ \gamma_{0^2} = \beta_0{}^2\frac{\|f(x_0+\Delta x_0)\|^p}{\|f(x_1)\|^p}.$$

Пусть $p = 1$.

Теорема 5. Пусть в области D существует x^* – решение уравнения (1), выполняются условия (2) и на некотором шаге k итерационного процесса (3), (4), (12) $\varepsilon_k = 0.5KB^2\beta_k\|f(x_k)\| < 1$. Тогда процесс (3), (4), (12) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^k.

Доказательство теоремы 5 вполне аналогично доказательству теоремы 1.

Пусть $p = 2$. Тогда может быть сформулирована

Теорема 6. Пусть в области D существует решение уравнения (1), выполняются условия (2) и на некотором шаге k вычислительного процесса (3а), (4), (12) справедливо соотношение $\varepsilon_k = 0.5KB^2\sqrt{\beta_k}\,\| f(x_k)\| < 1$.

Тогда процесс (3а), (4), (12) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^*.

К числу эффективных полулокальных квазиньютоновских итерационных процессов можно отнести следующие итерационные процессы, в которых на шаге 1 решаются системы 3а для нерегуляризованных процессов с шаговыми длинами

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\| f(x_n)\| \gamma_n}{\beta_n \| f(x_n)\|}), \gamma_{n+1} = \frac{\| f(x_n)\| \gamma_n \beta_{n+1}}{\beta_n \| f(x_{n+2})\|}, \gamma_0 = \beta_0^{\ 2}$$

или с шаговыми длинами вида

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\| f(x_{n-1})\| \gamma_n}{\beta_n \| f(x_{n+1})\|}),$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\| f(x_{n-1})\| | f(x_{n+1})| \gamma_n \beta_{n+1}}{\beta_n \| f(x_{n+2})\| | f(x_n)|}, \gamma_0 = \beta_0^{\ 2}, \|f(x_{-1})\| = \|f(x_0)\|.$$

Для частично регуляризованных процессов на шаге 1 рассматривается СЛАУ вида (9а).

Ряд других способов введения шаговых длин для квазиньютоновских методов приводится в работах [1; 3–9].

<u>Замечание 1.</u> Поскольку направление $f'(x_n)$ градиентно согласовано с векторами x_n, определяемыми выше итерационными процессами, непременно существует такой номер k, что $\varepsilon_k < 1$ и $\overline{\varepsilon_k} < 1$ [2].

<u>Замечание 2.</u> Условия (2), содержащие глобальные константы B и K, в процессе счёта не используются. Важен лишь факт их существования.

<u>Замечание 3.</u> Частный случай рассмотренного выше алгоритма при $p = 1$ и $\gamma_n = \beta_n^2$ рассмотрен в работе [11].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мадорский, В. М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В. М. Мадорский. – Брест : БрГУ, 2005. – 186 с.
2. Ортега, Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболт. – М. : Мир, 1975. – 558 с.
3. Мадорский, В. М. О регуляризованных методах с обратной связью для решения нелинейных уравнений / В. М. Мадорский // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2000. – Т. 5. – С. 80–91.
4. Мадорский, В. М. Сравнительный анализ эффективности некоторых квазиньютоновских процессов при решении периодических краевых задач / В. М. Мадорский, А. В. Кот // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2001. – Т. 10. – С. 64–68.
5. Мадорский, В. М. О регуляризованных квазиньютоновских процессах для решения нелинейных задач / В. М. Мадорский // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2001. – Т. 10. – С. 69–72.
6. Мадорский, В. М. Локализация решений нелинейных уравнений / В. М. Мадорский // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2002. – Т. 11. – С. 96–103.

7. Мадорский, В. М. Гибридизация при решении нелинейных уравнений / В. М. Мадорский // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2004. – Т. 12, № 2. – С. 125–129.

8. Мадорский, В. М. Об эффективных методах получения приближенных решений нелинейных дифференциальных задач / В. М. Мадорский, Н. Н. Стрилец // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2004. – Т. 12, № 2. – С. 130–132.

9. Мадорский, В. М. Об одном нелокальном итерационном процессе для решения задачи Дуффинга / В. М. Мадорский, А. П. Кондратюк // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2004. – № 2. – С. 91–93.

10. Приближённые решения операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.] – М. : Наука, 1969. – 455 с.

11. Жанлав, Т. О сходимости итераций на основе непрерывного аналога метода Ньютона / Т. Жанлав, И. В. Пузынин // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1992. – Т. 32, № 6. – С. 146–156.

12. Ермаков, В. В. Оптимальный шаг и регуляризация в методе Ньютона / В. В. Ермаков, Н. Н. Калиткин // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1981. – Т. 21, № 2. – С. 491–497.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 13.04.2016

Madorskiy V.M. **To the Problem of Some Quasi-Newton Method for Solving Nonlinear Equations with Smooth Operator**

To solve nonlinear equations with a smooth operator in the article deals with a number semilocal quasi-Newton iterative processes converging locally at a quadratic rate. The convergence of a whole family of such processes is incomplete and full forecasts to the "bad" initial approximation.