УДК 513.82

А.Ф. Завадский[1], А.А. Юдов[2]
[1]магистрант физико-математического факультета Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[2]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математическогомоделирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

ИНВАРИАНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОДГРУПП ЛИ ГРУППЫ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Работа посвящена исследованию свойств подгрупп Ли группы Ли движений четырехмерного евклидова пространства R_4. Для всех подгрупп Ли группы Ли вращений пространства R_4 находятся все инвариантные подпространства и все инвариантные прямые и k-плоскости.

Одной из важных задач геометрии является задача исследования подгрупп Ли преобразований различных пространств. Особое место в ряду этих исследований занимает задача изучения подгрупп Ли групп Ли движений различных (псевдо)евклидовых пространств. Значимость этой задачи вытекает из того, что геометрия (псевдо)евклидовых пространств находит широкое применение в различных разделах математики и теоретической физики. Исследованиями в этом направлении занимались А.С. Феденко, И.В. Белько, В.Г. Копп, Р.Ф. Билялов, А.А. Юдов и др. В данной работе исследуется группа Ли движений четырехмерного евклидова пространства.

Рассмотрим четырехмерное евклидово пространство, т.е. пространство R_4. Пусть $G-$ группа Ли движений пространства R_4, $H-$группа Ли вращений пространства R_4, $\overline{G}-$алгебра Ли группы Ли G, $\overline{H}-$алгебра Ли группы Ли H.

Рассмотрим в пространстве R_4 ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, т.е.

$$\overline{e_1^2} = \overline{e_2^2} = \overline{e_3^2} = \overline{e_4^2} = 1, \left(\overline{e_i} = \overline{e_j}\right) = 0, i \neq j.$$

Группа Ли G является полупрямым произведением группы Ли H вращений пространства R_4 и группы T_4 параллельных переносов этого пространства: $G = H * T_4$. Алгебра Ли $\overline{G}$ является прямой суммой алгебр Ли $\overline{H}$ и τ_4, где τ_4 алгебра Ли группы Ли $T_4 : \overline{G} = \overline{H} \oplus \tau_4$. Для векторов пространства $\overline{H}$ определяется операция $[a,b]-$ коммутирование, а сам результат называется коммутатором. Операция коммутирования в алгебре Ли $\overline{G}$ определяется по правилу

$$[A,B] = AB - BA, \tag{1}$$

где $A, B \in \overline{G}$.

Рассмотрим в алгебре Ли $\overline{G}$ базис:

$$i_1 = E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_5 = E_{23} - E_{32}, i_6 = E_{24} - E_{42}, i_7 = E_{25} - E_{52}, i_8 = E_{34} - E_{43},$$
$$i_9 = E_{35} - E_{53}, i_{10} = E_{45} - E_{54},$$

где $E_{\alpha\beta} - (5 \times 5) -$ матрицы, у которых в α-й строке, β-м столбце стоит 1, а остальные элементы нули. При этом вектора i_1, i_2, i_3, i_4 задают базис алгебры Ли группы Ли параллельных переносов, а вектора $i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}$ задают базис алгебры Ли $\overline{H}$ группы Ли H вращений пространства R_4.

Получим формулы для коммутаторов базисных векторов $i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}$. Согласно формуле (1), получаем:

$$
\begin{array}{lll}
[i_5, i_6] = -i_8, & [i_6, i_7] = -i_{10}, & [i_7, i_9] = -i_5, \\
[i_5, i_7] = -i_9, & [i_6, i_8] = -i_5, & [i_7, i_{10}] = -i_6, \\
[i_5, i_8] = i_6, & [i_6, i_9] = 0, & [i_8, i_9] = -i_{10}, \\
[i_5, i_9] = i_7, & [i_6, i_{10}] = i_7, & [i_8, i_{10}] = i_9, \\
[i_5, i_{10}] = 0, & [i_7, i_8] = 0, & [i_9, i_{10}] = -i_8.
\end{array}
$$

Чтобы вектор a с координатами $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ был инвариантен относительно подгруппы Ли G_i с алгеброй Ли $\overline{G_i}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $a \cdot c = \lambda \cdot c$, где $c-$ любое из $\overline{G_i}$. В частности, вместо c достаточно брать вектора базиса $\overline{G_i}$.

Чтобы подпространство $\{a, b\}$ было инвариантно относительно подгруппы G_i необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$
a \cdot c = \lambda \cdot a + \mu \cdot b,
$$

$$
b \cdot c = \nu \cdot a + \sigma \cdot b.
$$

Все подгруппы Ли группы Ли G классифицированы. С точностью до сопряженности существует 6 подгрупп Ли группы Ли вращений пространства R_4: $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$, которые соответствуют алгебрам Ли $\overline{G_1}, \overline{G_2}, \overline{G_3}, \overline{G_4}, \overline{G_5}, \overline{G_6}$, задаваемых соответственно базисами: $\overline{G_1} = \{i_5\}, \overline{G_2} = \{i_5 + \omega i_{10}\}, \overline{G_3} = \{i_5, i_{10}\}, \overline{G_4} = \{i_8, i_9, i_{10}\}$, $\overline{G_5} = \{i_5 - i_7, i_8 - i_{10}, i_6 - \lambda i_9\}, \overline{G_6} = \{i_5, i_{10}, i_6 + i_9, i_7 - i_8\}$.

В данной работе для каждой из групп $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$ находятся все инвариантные одно-, дву- и трехмерные подпространства, а также инвариантные прямые, 2-плоскости и 3-плоскости.

Рассмотрим группу G_1. Найдем одномерные инвариантные подпространства.

Условие инвариантности имеет вид:

$$
a \cdot i_5 = (a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot i_5 = (-a_2, a_1, 0, 0) = \mu \cdot a.
$$

Отсюда следует система

$$
\begin{cases}
-a_2 = \mu a_1, \\
a_1 = \mu a_2, \\
0 = \mu a_3, \\
0 = \mu a_4
\end{cases}
$$

Из первого и второго уравнения системы следует:

$$
-a_2 = \mu^2 a_2.
$$

Решая данную систему, можно сделать вывод, что при $\mu = 0$ получим: $a_1 = 0, a_2 = 0$.

Значит, инвариантные подпространства имеют вид: $\{\lambda \overline{e}_3 + \mu \overline{e}_4\}$.

При $\mu \neq$ получим $a_3 = 0, a_4 = 0$. Из первого и второго уравнения системы следует: $-a_2 = \mu^2 a_2$. Значит, $a_2 = 0$, иначе $\mu^2 = -1$, что является противоречием. А если $a_2 = 0$, то и $a_1 = 0$, а значит, ненулевых решений нет.

Таким образом, инвариантные подпространства относительно оператора i_5 имеют вид $\{\lambda \overline{e_3} + \mu \overline{e_4}\}$.

Найдем двумерные подпространства, инвариантные относительно оператора i_5.

Система инвариантности имеет вид:

$$\begin{cases} a \cdot i_5 = \lambda \cdot a + \mu \cdot b \\ b \cdot i_5 = \nu \cdot a + \sigma \cdot b \end{cases},$$

или в координатном виде:

$$\begin{cases} -a_2 = \lambda \cdot a_1 + \mu \cdot b_1; & -b_2 = \nu \cdot a_1 + \sigma \cdot b_1; \\ a_1 = \lambda \cdot a_2 + \mu \cdot b_2; & b_1 = \nu \cdot a_2 + \sigma \cdot b_2; \\ 0 = \lambda \cdot a_3 + \mu \cdot b_3; & 0 = \nu \cdot a_3 + \sigma \cdot b_3; \\ 0 = \lambda \cdot a_4 + \mu \cdot b_4; & 0 = \nu \cdot a_4 + \sigma \cdot b_4. \end{cases}$$

Для решения данной системы достаточно рассмотреть 6 случаев:

$$1^0 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad 4^0 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & \beta \end{pmatrix},$$

$$2^0 : \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}, \quad 5^0 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$3^0 : \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 6^0 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 1^0. Получим систему:

$$\begin{cases} 0 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 & -1 = \nu \cdot 1 + \sigma \cdot 0 \\ 1 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 & 0 = \nu \cdot 0 + \sigma \cdot 1 \\ 0 = \lambda \cdot \alpha + \mu \cdot \gamma & 0 = \nu \cdot \alpha + \sigma \cdot \gamma \\ 0 = \lambda \cdot \beta + \mu \cdot \delta & 0 = \nu \cdot \beta + \sigma \cdot \delta \end{cases}$$

Решая данную систему, получим $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 0$. Значит, инвариантным двумерным подпространством для случая 1^0 является $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$. Аналогичным способом находим двумерные инварианты для случаев 2^0 – 6^0. Получаем, что для случая 2^0 – система противоречива, для случая 3^0 – система противоречива, для случая 4^0 – система противоречива, для случая 5^0 – система противоречива, для случая 6^0 – инвариантным двумерным подпространством является $\{\overline{e_3}, \overline{e_4}\}$.

Трехмерными инвариантными подпространствами для группы Ли G_1 являются подпространства $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, -\mu\overline{e_3} + \lambda\overline{e_4}\}$, которые являются ортогональным дополнением к одномерным подпространствам $\{\lambda\overline{e_3} + \mu\overline{e_4}\}$.

Находя таким, образом инвариантные подпространства относительно остальных подгрупп Ли, получим следующие теоремы.

Теорема 1. Относительно группы G_1 инвариантны только одномерные подпространства $\{\lambda \overline{e_3} + \mu \overline{e_4}\}$, двумерные подпространства $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ и $\{\overline{e_3}, \overline{e_4}\}$ и следующие трехмерные подпространства $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, -\mu\overline{e_3} + \lambda\overline{e_4}\}$.

Теорема 2. Относительно группы G_2 нет инвариантных одномерных подпространств, двумерные подпространства $\{\overline{e_1} + \lambda\overline{e_3} + \mu\overline{e_4}, \overline{e_2} + \mu\overline{e_3} - \lambda\overline{e_4}\}$,

$\left\{\overline{e_1}+\lambda\overline{e_3}+\mu\overline{e_4},\overline{e_2}-\mu\overline{e_3}+\lambda\overline{e_4}\right\}$, $\left\{\overline{e_1},\overline{e_2}\right\}$ и $\left\{\overline{e_3},\overline{e_4}\right\}$, трехмерных инвариантных подпространств не существует.

Теорема 3. Относительно группы G_3 нет инвариантных одномерных подпространств, двумерные подпространства $\left\{\overline{e_1},\overline{e_2}\right\}$ и $\left\{\overline{e_3},\overline{e_4}\right\}$, трехмерных инвариантных подпространств не существует.

Теорема 4. Относительно группы G_4 инвариантны только одномерные подпространства $\left\{\overline{e_1}\right\}$ и следующее трехмерное подпространство $\left\{\overline{e_2},\overline{e_3},\overline{e_4}\right\}$, инвариантных двумерных подпространств не существует.

Теорема 5. Относительно группы G_5 нет инвариантных одномерных, двумерных и трехмерных подпространств.

Теорема 6. Относительно группы G_6 нет одномерных инвариантных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства: $\left\{\overline{e_1},\overline{e_2}\right\}$ и $\left\{\overline{e_3},\overline{e_4}\right\}$, трехмерных инвариантных подпространств не существует.

Образы стационарности групп Ли

Рассмотрим группу $G_1=\left\{i_5\right\}$, где

$$i_5=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Относительно группы G_1 инвариантны только одномерные пространства $\left\{\lambda\overline{e_3}+\mu\overline{e_4}\right\}$ и следующие двумерные пространства $\left\{\overline{e_1},\overline{e_2}\right\}$ и $\left\{\overline{e_3},\overline{e_4}\right\}$.

Зафиксируем $\overline{e_4}$. Рассмотрим вектор (0,0,0,1) и потребуем, чтобы он был инвариантен.

$$(0,0,0,1)\cdot\begin{pmatrix}0 & \alpha & \beta & \gamma\\ \alpha & 0 & \delta & \varepsilon\\ \beta & -\delta & 0 & \omega\\ \gamma & -\varepsilon & -\omega & 0\end{pmatrix}=(\gamma,-\varepsilon,-\omega,0)=\lambda\cdot\overline{e_4}=(0,0,0,\lambda).$$

Из этого следует, что $\gamma=0,\varepsilon=0,\omega=0$.

Зафиксируем $\overline{e_3}$. Рассмотрим вектор (0,0,1,0) и потребуем, чтобы он был инвариантен

$$(0,0,1,0)\cdot\begin{pmatrix}0 & \alpha & \beta & \gamma\\ \alpha & 0 & \delta & \varepsilon\\ \beta & -\delta & 0 & \omega\\ \gamma & -\varepsilon & -\omega & 0\end{pmatrix}=(\beta,-\delta,0,\omega)=\mu\cdot\overline{e_3}=(0,,0\mu,0).$$

Из этого следует, что $\beta=0,\delta=0,\omega=0$.

Таким образом, если зафиксировать плоскость $\left[0,\overline{e_3},\overline{e_4}\right]$ как точечно-неподвижную, то определяется оператор i_5. Это значит, что образом стационарности подгруппы

Ли G_1 является точечно-неподвижная плоскость $\overset{0}{R}_2$ (значок ^{0} означает точечно-неподвижную плоскость).

Получим теорему.

Теорема 7. Образом стационарности для подгруппы Ли G_1 является флаг $\left\{O, \overset{0}{R}_2\right\}$.

Аналогичным способом находим образы стационарности для подгрупп Ли $G_2 - G_6$.

Теорема 8. Среди подгрупп Ли $G_1 - G_6$ образы стационарности имеют только следующие подгруппы: G_1, G_3, G_6. Причем образ стационарности подгруппы Ли G_1 – точечно-неподвижная евклидова плоскость R_2, т.е. флаг $\left\{O, \overset{0}{R}_2\right\}$, образ стационарности подгруппы Ли G_3 – инвариантная евклидова двумерная плоскость с фиксированной точкой на ней, т.е. флаг $\{O, R_2\}$, образ стационарности подгруппы Ли G_4 – инвариантная евклидова прямая с фиксированной точкой на ней, т.е. образ стационарности флаг $\{O, R_1\}$.

Замечание 1. Все инвариантные трехмерные подпространства R_4 относительно группы Ли G_i получаются как ортогональные дополнения к найденным инвариантным одномерным подпространствам.

Замечание 2. Каждому инвариантному подпространству $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ соответствует инвариантная k-плоскость: $[O, \alpha_1, \ldots, \alpha_k]$ и обратно. Таким образом, теоремы 1–6 дают классификацию всех инвариантных прямых и k-плоскостей пространства R_4 относительно подгрупп Ли группы Ли вращений пространства R_4.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копп, В. Г. Классификация бесконечно малых движений и их пучков в четырехмерном пространстве Лоренца / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. – 1963. – Т. 123, кн. 1. – С. 59–77.
2. Белько, И. В. Подгруппы группы Ли / И. В. Белько, А. С. Феденько // Докл. АН БССР. – 1970. – Т. XIV, № 6. – С. 393–395.
3. Зубей, Е. В. Геометрические характеристики связных подгрупп Ли группы Ли вращений пространства Минковского / Е. В. Зубей, А. А. Юдов // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2014. – № 1. – С. 52–59.
4. Юдов, А. А. Исследование однородных пространств с фундаментальной группой $G-$ группой движения пространства R_4^2 / А. А. Юдов, Е. Е. Гурская // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2008. – № 1 (30). – С. 35–41.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 31.03.2016

***Zavadski A.F., Judov A.A.* Invariant Characteristics of Subgroup Li of group Li Movements of Five-Dimensional Euclidean Space**

The work is devoted to the study of the properties of a subgroup of the Lie group of motions of three-dimensional Euclidean space R_4. For all subgroups of the Lie group of rotations of R_4 are all invariant subspaces invariant and all direct and k-plane.