УДК 517.925

Е.В. Грицук[1], А.Н. Мартинович[2]
[1]канд. физ.-мат. наук,
доц. каф. математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[2]магистрант физико-математического факультета
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЕРАРХИИ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ НА СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ

В работе проводится исследование иерархии дифференциальных уравнений Риккати методом резонансов. Получена структура уравнений иерархии, найден порядок подвижного полюса решения, указан явный вид резонансного многочлена и определены его корни. Для первых пяти уравнений найдены ряды Лорана с необходимым числом произвольных параметров.

Введение

Задача определения условий наличия свойства Пенлеве [1; 2] у обыкновенных дифференциальных уравнений порядка выше двух является актуальной в связи с гипотезой о возможности применения к задачам с уравнениями в частных производных метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [3] в случае их редукции к уравнениям Пенлеве типа. При возрастании порядка дифференцирования самый универсальный метод – метод малого параметра – приводит к многочисленным уравнениям, требующих дальнейших исследований.

Поэтому возник способ построения дифференциальных уравнений высших порядков посредством воздействия специальных операторов на уравнения Пенлеве типа в надежде получить уравнения того же свойства. Однако получаемые уравнения, хотя и сохраняют из-за специфики применяемых операторов некоторые свойства стартовых уравнений, требуют исследований на свойство Пенлеве. Одной из таких последовательностей уравнений является иерархия уравнения Риккати.

1. Структура уравнений иерархии Риккати

Иерархия уравнений Риккати может быть записана в виде

$$D_R^n w = 0, n = 1, 2, 3, \dots, \tag{1}$$

где оператор D_R имеет вид

$$D_R = \frac{d}{dx} + w. \tag{2}$$

Получаем:
при $n = 1$

$$w' + w^2 = 0, \tag{3}$$

при $n = 2$

$$w'' + w^3 + 3ww' = 0, \tag{4}$$

при $n = 3$

$$w''' + w^4 + 6w^2w' + 4ww'' + 3w'^2 = 0, \tag{5}$$

при $n = 4$

$$w^{(4)} + w^5 + 10w^3w' + 10w^2w'' + 15ww'^2 + 5ww''' + 10w'w'' = 0. \tag{6}$$

Относительно вида уравнения (1) можно сформулировать и доказать теорему.

Теорема 1. *Уравнение* (1) при $n \geq 2$ *имеет вид:*

$$w^{(n)} + w^{n+1} + P_n\left(w, w', ..., w^{(n-1)}\right) = 0, \tag{7}$$

где P_n – *полином от* $w, w', ..., w^{(n-1)}$ *степени n вида*

$$P_n\left(w, w', ..., w^{(n-1)}\right) = \sum\nolimits_{k_{0 \leq n-1} \langle k \rangle = n+1} a_{k_0 k_1 ... k_{n-1}} w^{k_0} \left(w'\right)^{k_1} ... \left(w^{(n-1)}\right)^{k_{n-1}}, \tag{8}$$

$a_{k_0 k_1 ... k_{n-1}}$ – *константы, через k обозначен мульти индекс* $k = (k_0, k_1, ..., k_{n-1})$ с нормой

$$\langle k \rangle = \sum\nolimits_{p=0}^{n-1} (p+1) k_p. \tag{9}$$

Доказательство. Осуществим доказательство теоремы методом математической индукции по n-порядку дифференциального уравнения (1). Для случая $n = 2$ первые два слагаемые в уравнении (4) совпадают с первыми двумя слагаемыми в формуле (7), а третье слагаемое уравнения (4) представляет собой полином $P_2 = 3ww'$. В силу формулы (9) норма мультииндекса k монома, входящего в P_2, равна $1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2 + 1 = 3$, т.е. $n + 1$. Значит, первый пункт метода математической индукции выполняется. Предположим, что формула (7) верна при $n = m$, докажем её истинность при $n = m + 1$. При $n = m + 1$ из формул (1) и (7) получим

$$\begin{aligned} D_R^{m+1} w &= \left(\frac{d}{dz} + w\right)\left(w^{(m)} + w^{m+1} + P_m\left(w, w', ..., w^{(m-1)}\right)\right) = \\ &= w^{(m+1)} + w^{m+2} + ww^{(m)} + (m+1) w^m w' + wP_m + P_m'. \end{aligned} \tag{10}$$

Первые два слагаемые из (10) соответствуют первым двум слагаемым формулы (7) для $n = m + 1$. Остаётся показать, что оставшиеся слагаемые удовлетворяют заявленным ограничениям (8) на полином P_{m+1}. Так, норма мультииндекса третьего слагаемого, согласно формуле (9), равна $1 \cdot 1 + (m + 1) \cdot 1 = m + 2 = (m + 1) + 1$, т.е. третье слагаемое удовлетворяет ограничениям на мономы входящие в полином P_{m+1}. Четвёртое слагаемое имеет норму $1 \cdot m + (1 + 1) \cdot 1 = m + 2 = (m + 1) + 1$, а значит, также подходит.

Слагаемое wP_m' имеет мономы с нормой мультииндекса равной $1 \cdot (k_0 + 1) + 2 \cdot k_1 + ... + m \cdot k_m = 1 + 1 \cdot k_0 + 2 \cdot k_1 + ... + m \cdot k_m = 1 + \langle k \rangle = 1 + (m + 1)$, т. е. удовлетворяет требованию индукции. Докажем, что слагаемые полинома P_m' также удовлетворяют требованию индукции. Среди мономов полинома P_m' присутствуют два различных типа:

$$k_j a_{k_0 k_1 ... k_{m-1}} w^{k_0} \left(w'\right)^{k_1} ... \left(w^{(j)}\right)^{k_j - 1} \left(w^{(j+1)}\right)^{k_{j+1}+1} ... \left(w^{(m-1)}\right)^{k_{m-1}}, j = 0, ..., m-2, \tag{11}$$

$$k_{m-1} a_{k_0 k_1, ..., k_{m-1}} (w)^{k_0} \left(w'\right)^{k_1} ... \left(w^{(m-1)}\right)^{k_{m-1}-1} w^{(m)}. \tag{12}$$

Вычислим норму мультииндекса монома из формулы (11); она равна

$$1 \cdot k_0 + 2 \cdot k_1 + ... + (j + 1) \cdot (k_j - 1) + (j + 2) \cdot (k_{j+1} + 1) + ... + m \cdot k_{m-1} =$$
$$= 1 \cdot k_0 + 2 \cdot k_1 + ... + (j + 1) \cdot k_j + (j + 2) \cdot k_{j+1} + ... + m \cdot k_{m-1} + 1 = \langle k \rangle + 1 = (m + 1) + 1.$$

Остаётся найти норму мультииндекса монома из формулы (12); она равна

$$1 \cdot k_0 + 2 \cdot k_1 + ... + m \cdot (k_{m-1} - 1) + (m + 1) \cdot 1 = 1 \cdot k_0 + 2 \cdot k_1 + ... + m \cdot k_{m-1} + 1 = \langle k \rangle + 1 = (m + 1) + 1.$$

Таким образом, структура полинома P_{m+1} подтверждается. Для завершения доказательства требуется установить ограничение на k_0. Из условия $\langle k \rangle = m + 2$ теперь обозначается через k мультииндекс из полинома P_{m+1}, получаем

$k_0 = m + 2 - 2 \cdot k_1 - ... - (m + 1) \cdot k_m$; так как целые $k_j \geq 0$, то отсюда следует, что максимально возможное значение $k_0 = m + 2$. Но моном с мультииндексом $k = (m + 2, 0, ..., 0)$ представляет собой второе слагаемое формулы (10), т.е. в полином P_{m+1} не входит. Значение $k_0 = m + 1$ в принципе невозможно, так как не существует мультииндекса k, удовлетворяющего условию $\langle k\rangle = m + 2$. Таким образом, максимальное значение $k_0 = m = (m + 1) - 1$. Теорема доказана.

Лемма. *Если решение уравнения* (1) *имеет подвижный полюс, то только первого порядка*.

Доказательство. Для определения порядка q подвижного полюса в уравнении (7) произведём замену $w \sim c_0 (z - z_0)^{-q}$. Ведущими членами уравнения (7) являются $w^{(n)}$, слагаемые полинома (8) и, возможно, слагаемое w^{n+1}. В первом случае имеем $q + n = qk_0 + (q+1)k_1 +...+ (q + n - 1)k_{n-1}$, или $q + n = (q - 1)(k_0 + k_1 +...+ k_{2n-2}) + \langle k\rangle$. Так как $\langle k\rangle = n + 1$, то имеем $(q - 1)(k_0 + k_1 +...+ k_{2n-2} - 1) = 0$. Условие $k_0 + k_1 +...+ k_{2n-2} = 1$ вступает в противоречие с ограничением $\langle k\rangle = n + 1$. Значит, $q = 1$. Во втором случае получаем условие $q + n = q(n + 1)$. Откуда находим $q = 1$.

Покажем, что существует $c_0 \neq 0$. Подставим в формулу (1) $w \sim c_0(z - z_0)^{-1}$. Пусть $D_R^n w \sim S_n(c_0)(z - z_0)^{-(n+1)}$. Тогда

$$D_R^{n+1}w = D_R\left(D_R^n w\right) \sim D_R\left(S_n(c_0)(z-z_0)^{-(n+1)}\right) = S_n(c_0)\left(-(n+1)\right)(z-z_0)^{-(n+2)} +$$

$$+ c_0 S_n(c_0)(z-z_0)^{-(n+2)} = S_n(c_0)(c_0 - n - 1)(z-z_0)^{-(n+2)}.$$

Значит, $S_n(c_0)$ удовлетворяет рекурсивному соотношению с

$$S_{n+1}(c_0) = (c_0 - n - 1)S_n(c_0), S_1(c_0) = c_0(c_0 - 1). \qquad (13).$$

Из (13) находим условие на c_0:

$$\prod_{j=0}^{n}(c_0 - j) = 0 \qquad (14)$$

Очевидно, что в (14) есть $c_0 \neq 0$. Лемма доказана.

2. Исследование решений уравнений иерархии Риккати в окрестности подвижного полюса

Получение уравнений иерархии Риккати в случае $n \geq 5$ в силу формул (1) и (2) сводится к нахождению производной от полинома и не представляет технической сложности.

Получим рекуррентное соотношение на резонансный многочлен уравнений иерархии Риккати. Для этого в формулу (1) подставим $w \sim c_0 t^{-1} + \beta t^{r-1}$, получим $D_R^n w \sim S_n(c_0)t^{-(n+1)} + \beta R_n(c_0, r)t^{r-n-1}$. Тогда

$$D_R^{n+1}w = \left(\frac{d}{dz} + w\right)D_R^n(w) \sim \left(\frac{d}{dz} + c_0 t^{-1} + \beta t^{(r-1)}\right)\left(S_n(c_0)t^{-(n+1)} + \beta R_n(c_0, r)t^{r-n-1}\right) =$$

$$= (c_0 - n - 1)S_n(c_0)t^{-(n+1)} + \beta\left(S_n(c_0) + (r - n - 1 + c_0)R_n(c_0, r)t^{r-n-2}\right).$$

Это с одной стороны, а с другой – $D_R^{n+1}w \sim S_{n+1}(c_0)t^{-(n+1)} + \beta R_{n+1}(c_0, r)t^{r-n-2}$, т.е.

$$R_{n+1}(c_0, r) = S_n(c_0) + (r - n - 1 + c_0)R_n(c_0, r) \qquad (15)$$

Теорема 2. *Резонансный многочлен уравнений иерархии Риккати имеет вид*

$$R_n(c_0, r) = \prod_{j=1}^{m}(r + j)\prod_{s=1}^{n-m}(r - s)\ . \qquad (16)$$

Доказательство. В зависимости от c_0 можно убедится, например, с помощью пакета символьных вычислений Maple 9, что рекуррентному соотношению (15) удовлетворяет многочлен (16). Так как при фиксированном c_0 резонансный многочлен дифференциального уравнения единственный, то указанный и есть искомый. Теорема доказана.

Таким образом, все резонансы, соответствующие паре $(c_0, 1)$, являются целыми и однократными. Количество положительных равно $n - m$.

Для определения номеров коэффициентов c_j, которые, возможно, являются произвольными параметрами в разложении

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^{j-1}, \text{ где } t = z - z_0, z_0 \in C,$$

требуется выписать корни многочлена (16).

Исследуем уравнение (4). В окрестности особой точки z_0 уравнение (4) имеет вид:

$$w'' + w^3 + 3ww' = 0,$$

В первом случае $c_0 = 1$. По формуле (16) при $n = 2$ получаем $R_2(c_0, r) = (r + 1)(r - 1)$. Т.е. имеем один отрицательный резонанс $r_1 = -1$ и один положительный $r_2 = 1$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (4), имеет вид:

$$w = t^{-1} + c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 t^4 + \ldots, \tag{17}$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = -h_1^2, c_3 = h_1^3, c_4 = -h_1^4, c_5 = h_1^5$, коэффициенты c_j, $j > 5$ однозначно определяются через произвольный параметр h_1. В силу теоремы 2 [4] ряд (17) является сходящимся.

Во втором случае $c_0 = 2$. По формуле (16) при $n = 2$ получаем

$$R_2(c_0, r) = (r + 1)(r + 2).$$

Т.е. имеем два отрицательных резонанса $r_1 = -1$ и $r_2 = -2$. Решение, удовлетворяющее уравнению (4), имеет вид:

$$w = 2t^{-1}, \tag{18}$$

где $t = z - z_0$.

Исследуем уравнение (5). В окрестности особой точки z_0 уравнение (5) имеет вид:

$$w''' + w^4 + 6w^2w' + 4ww'' + 3w'^2 = 0.$$

В первом случае $c_0 = 1$. По формуле (16) при $n = 3$ получаем $R_2(c_0, r) = (r + 1)(r - 1)(r - 2)$. Т.е. имеем один отрицательный резонанс $r_1 = -1$ и два положительных $r_2 = 1$, $r_3 = 2$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (5), имеет вид:

$$w = t^{-1} + c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \ldots, \tag{19}$$

где $= z - z_0$, $c_1 = h_1, c_2 = h_2, c_3 = -\frac{3}{2}h_1h_2 - \frac{1}{2}h_1^3$, коэффициенты c_j, $j > 3$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1, h_2.

Во втором случае $c_0 = 2$. По формуле (16) при $n = 3$ получаем

$$R_3(c_0, r) = (r + 1)(r + 2)(r - 1).$$

Т.е. имеем два отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -2$ и один положительный $r_3 = 1$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (5), имеет вид:

$$w = 2t^{-1} + c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 + c_5 t^4 + \ldots, \tag{20}$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1, c_2 = -h_1^2, c_3 = h_1^3, c_4 = -h_1^4$, коэффициенты c_j, $j > 4$ однозначно определяются через произвольный параметр h_1.

В силу теоремы 2 [4] ряды (19) и (20) являются сходящимся.

В третьем случае $c_0 = 3$. По формуле (16) при $n = 3$ получаем

$$R_3(c_0, r) = (r + 1)(r + 2)(r + 3).$$

Т.е. имеем три отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -3$. Решение, удовлетворяющее уравнению (5), имеет вид:

$$w = 3t^{-1}, \tag{21}$$

где $t = z - z_0$.

Исследуем уравнение (6). В окрестности особой точки z_0 уравнение (6) имеет вид:

$$w^{(4)} + w^5 + 10w^3w' + 10w^2w'' + 15ww'^2 + 5ww''' + 10w'w'' = 0.$$

В первом случае $c_0 = 1$. По формуле (16) при $n = 4$ получаем:

$$R_4(c_0, r) = (r + 1)(r - 1)(r - 2)(r - 3).$$

Т.е. имеем один отрицательный резонанс $r_1 = -1$ и три положительных $r_2 = 1$, $r_3 = 2$, $r_4 = 3$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (6), имеет вид:

$$w = t^{-1} + c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4t^3 + c_5t^4 + \ldots, \tag{22}$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = h_2$, $c_3 = h_3$, $c_4 = -\frac{1}{6}h_1^4 - h_1^2h_2 - \frac{4}{3}h_1h_3 - \frac{1}{2}h_2^2$, коэффициенты c_j, $j > 4$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1, h_2, h_3.

Во втором случае $c_0 = 2$. По формуле (16) при $n = 4$ получаем

$$R_4(c_0, r) = (r + 1)(r + 2)(r - 1)(r - 2).$$

Т.е. имеем два отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -2$ и два положительных $r_3 = 1$, $r_4 = 2$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (6), имеет вид:

$$w = 2t^{-1} + c_1 + c_2t + c_3t^2 + \ldots, \tag{23}$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = h_2$ $c_3 = -\frac{1}{2}h_1^3 - \frac{3}{2}h_1h_2$, коэффициенты c_j, $j > 3$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1, h_2.

В третьем случае $c_0 = 3$. По формуле (16) при $n = 4$ получаем $R_4(c_0, r) = (r + 1)(r + 2)(r + 3)(r - 1)$. Т.е. имеем три отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -3$ и один положительный $r_4 = 1$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (5), имеет вид

$$w = 3t^{-1} + c_1 + c_2t + \ldots, \tag{24}$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = -h_1^2$, коэффициенты c_j, $j > 2$ однозначно определяются через произвольный параметр h_1.

В силу теоремы 2 [4] ряды (22) – (24) являются сходящимся.

В четвертом случае $c_0 = 4$. По формуле (16) при $n = 4$ получаем

$$R_4(c_0, r) = (r + 1)(r + 2)(r + 3)(r + 4).$$

Т.е. имеем четыре отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -3$, $r_4 = -4$. Решение, удовлетворяющее уравнению (6), имеет вид

$$w = 4t^{-1}, \tag{25}$$

где $t = z - z_0$.

Исследуем уравнение (1) при $n = 5$. В окрестности особой точки z_0 имеет вид

$$w^{(5)}+w^6+15w^4w'+20w^3w''+45w^2\left(w'\right)^2+15w^2w'''+60ww'w''+6ww^{(4)}+15\left(w'\right)^3+ \\ +15w'w'''+10\left(w''\right)^2=0. \tag{26}$$

В первом случае $c_0 = 1$. По формуле (16) при $n = 5$ получаем

$$R_5(c_0, r) = (r+1)(r-1)(r-2)(r-3)(r-4).$$

Т.е. имеем один отрицательный резонанс $r_1 = -1$ и четыре положительных $r_2 = 1$, $r_3 = 2$, $r_4 = 3$, $r_5 = 4$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (23), имеет вид

$$w = t^{-1} + c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4t^3 + c_5t^4 + \ldots, \tag{27}$$

где $t = z - z_0, c_1 = h_1$, $c_2 = h_2$, $c_3 = h_3$, $c_4 = h_4$, $c_5 = -\frac{25}{42}h_1^2h_3 - \frac{5}{6}h_2h_3 - \frac{5}{21}h_1^3h_2 - \frac{15}{28}h_1h_2^2 - \frac{1}{84}h_1^5$, коэффициенты c_j, $j > 5$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1, h_2, h_3, h_4.

Во втором случае $c_0 = 2$. По формуле (16) при $n = 5$ получаем

$$R_5(c_0, r) = (r+1)(r+2)(r-1)(r-2)(r-3).$$

Т.е. имеем два отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -2$ и три положительных $r_3 = 1$, $r_4 = 2$, $r_5 = 3$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (23), имеет вид

$$w = 2t^{-1} + c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4t^3 + c_5t^4 + \ldots, \tag{28}$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = h_2$, $c_3 = h_3$, $c_4 = -h_1^2h_2 - \frac{1}{2}h_2^2 - \frac{1}{6}h_1^4 - \frac{4}{3}h_1h_3$,

$c_5 = -\frac{5}{6}h_2h_3 + \frac{5}{6}h_1^2h_3 + \frac{5}{6}h_1^3h_2 + \frac{1}{6}h_1^5$, коэффициенты c_j, $j > 5$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1, h_2, h_3.

В третьем случае $c_0 = 3$. По формуле (16) при $n = 5$ получаем

$$R_5(c_0, r) = (r+1)(r+2)(r+3)(r-1)(r-2).$$

Т.е. имеем три отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -3$ два положительных $r_4 = 1$, $r_5 = 2$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (23), имеет вид

$$w = 3t^{-1} + c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4t^3 + \ldots, \tag{29}$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = h_2$, $c_3 = -\frac{3}{2}h_1h_2 - \frac{1}{2}h_1^3$, $c_4 = \frac{1}{2}h_1^4 + h_1^2h_2 - \frac{1}{2}h_2^2$, коэффициенты c_j, $j > 4$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1, h_2.

В четвертом случае $c_0 = 4$. По формуле (16) при $n = 5$ получаем

$$R_5(c_0, r) = (r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r-1).$$

Т.е. имеем четыре отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -3$, $r_4 = -4$ и один положительный $r_5 = 1$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (5), имеет вид

$$w = 4t^{-1} + c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4t^3 + \ldots, \tag{30}$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = -h_1^2$, $c_3 = h_1^3, c_4 = -h_1^4$, коэффициенты c_j, $j > 4$ однозначно определяются через произвольный параметр h_1.

В силу теоремы 2 [4] ряды (27) – (30) являются сходящимся.

В пятом случае $c_0 = 5$. По формуле (16) при $n = 5$ получаем

$$R_2(c_0, r) = (r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5).$$

Т.е. имеем пять отрицательных резонансов $r_1 = -1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -3$, $r_4 = -4$, $r_5 = -5$. Решение, удовлетворяющее уравнению (23), имеет вид:

$$w = 5t^{-1}, \tag{28}$$

где $t = z - z_0$.

Заключение

В работе доказывается, что порядок подвижного полюса решения каждого уравнения иерархии Риккати равен единице; все резонансы уравнений иерархии Риккати являются целыми и однократными; у первых пяти уравнений иерархии формальные ряды Лорана содержат нужное количество произвольных постоянных; все указанные ряды Лорана являются сходящимися.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. – Л. : ГИТТЛ, 1950. – 436 с.
2. Айнс, Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э. Л. Айнс. – Харьков : ГНТИУ, 1939. – 719 с.
3. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – М. : Мир, 1987. – 478 с.
4. Грицук, Е. В. К теории нелинейных дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве / Е. В. Грицук, В. И. Громак // Дифференц. уравнения. – 2010. – № 10. – С. 1371–1380.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 10.06.2016

Gritsuk E.V., Martinovich A.N. **The Study of the Hierarchy of the Equation of Rikkati on the Painleve Property**

The paper deals with the study of the hierarchy of differential Riccati equations, the resonant method. The resulting structure equations of the hierarchy, found order movable pole solutions, specified the explicit form of the resonance and the polynomial defined by its roots. For the first five equations was found the Laurent series with the desired number of arbitrary parameters.