УДК 512.542

Д.В. Грицук[1], Д.Д. Даудов[2], А.А. Трофимук[3]

[1]канд. физ.-мат. наук,
старший преподаватель каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[2]магистрант специальности «Математика»
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[3]канд. физ.-мат. наук,
доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

ИНВАРИАНТЫ π -РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП С СИЛОВСКИМИ ПОДГРУППАМИ МАЛОГО НОРМАЛЬНОГО РАНГА

Получены оценки производной π -длины и нильпотентной π -длины π -разрешимой группы G, у которой нормальный ранг силовских p-подгрупп, $p \in \pi$ не превышает 2. В частности, производная π -длина такой группы G не превышает 9, а нильпотентная π -длина группы G не превышает 6.

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

Пусть P – множество всех простых чисел, а π – некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве P обозначается через π'. Группа называется π-группой, если все простые делители порядка группы принадлежат множеству π, и π'-группой – в противном случае.

Напомним, что группа G называется π-разрешимой, если она обладает нормальным рядом

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_m = G, \tag{1}$$

факторы которого являются либо разрешимыми π-группами, либо π'-группами. Данный ряд будем называть (π',π)-рядом группы G. Наименьшее число π-факторов среди всех нормальных (π',π)-рядов группы G называется π-длиной π-разрешимой группы и обозначается через $l_\pi(G)$.

Очевидно, что всякая π-разрешимая группа G обладает нормальным (π',π)-рядом, у которого все π-факторы нильпотентны. Наименьшее число нильпотентных π-факторов среди всех таких нормальных рядов группы G называется нильпотентной π-длиной и обозначается через $l_\pi^n(G)$. Если $\pi(G)=\pi$, то π-разрешимая группа разрешима и нильпотентная π-длина группы G совпадает с нильпотентной длиной группы G. Здесь $\pi(G)$ – это множество простых делителей порядка группы G.

Одной из первых работ по нильпотентной π-длине π-разрешимой группы была статья М. Нумата [2]. В.С. Монахов и О.А. Шпырко [3] для нильпотентной π-длины получили аналог результата К. Дёрка ($n(G)-n(M)\le 2$, где G – произвольная разрешимая группа, а M – ее максимальная подгруппа). Обзор результатов по нильпотентной π-длине и другим инвариантам частично разрешимых групп приведен в работе [4].

Аналог производной длины для π-разрешимой группы был предложен В.С. Монаховым. Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом, факторы которого являются либо π'-группами, либо абелевыми π-группами для всех i. Наименьшее число абелевых π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной π-длиной π-разрешимой группы G

и обозначается через $l_\pi^a(G)$. Если $\pi(G)=\pi$, то значение $l_\pi^a(G)$ совпадает со значением производной длины группы G.

В работах [5; 6] изучены свойства производной π-длины π-разрешимой группы и получены ее оценки в зависимости от строения силовских p-подгрупп, $p\in\pi$. В частности, если G – π-разрешимая группа с бициклическими силовскими p-подгруппами для всех $p\in\pi$, то $l_\pi^a(G)\le 6$, $l_\pi^n(G)\le 4$, $l_\pi(G)\le 4$.

Из этого результата вытекают оценки производной и нильпотентной длин для разрешимых групп с бициклическими силовскими подгрупами. В частности, такие группы имеют нильпотентную длину не выше 4, а производную длину не выше 6.

Напомним, что нормальный ранг $r_n(P)$ конечной p-группы P определяется следующим образом:

$$r_n(P)=\max_{X\lhd P}\log_p|X/\Phi(X)|,$$

где X пробегает все нормальные подгруппы группы P, в том числе и P. Здесь $\Phi(X)$ – подгруппа Фраттини группы X.

В работе [7] была установлено, что если G – разрешимая группа с силовскими подгруппами нормального ранга ≤ 2, то нильпотентная длина группы G не превышает 4.

Очевидно, что p-группа P имеет нормальный ранг 1 тогда и только тогда, когда P циклическая. Из теоремы III.11.5 [8] следует, что нормальный ранг примарной бициклической группы нечетного порядка не превышает 2. Однако обратное неверно. Так, $r_n(S)=2$ для экстраспециальной группы S порядка 27, но S не является бициклической. Кроме того, из леммы 5 всякая 2-группа нормального ранга ≤ 2 является бициклической.

Развитием результатов работ [6; 7] является следующая

Теорема. *Пусть G – π-разрешимая группа такая, что $r_n(P)\le 2$ для любой силовской p-подгруппы P, $p\in\pi$. Тогда:*

1) если $\{2,3\}\not\in\pi$, то $l_\pi^a(G)\le 3$, $l_\pi^n(G)\le 2$, $l_\pi(G)\le 2$;

2) если $\{2,3\}\in\pi$, то $l_\pi^a(G)\le 9$, $l_\pi^n(G)\le 6$, $l_\pi(G)\le 6$.

1. Вспомогательные результаты

Из определений π-длины, нильпотентной и производной π-длин вытекает, что $l_\pi(G)\le l_\pi^n(G)\le l_\pi^a(G)$.

В леммах 1 и 2 под $l_\pi^*(G)$ можно понимать либо всюду $l_\pi(G)$, либо всюду $l_\pi^n(G)$, либо всюду $l_\pi^a(G)$.

Лемма 1. *Если G – π-разрешимая группа и $\pi=\pi_1\cup\pi_2$, то $l_\pi^*(G)\le l_{\pi_1}^*(G)+l_{\pi_2}^*(G)$.*

Лемма 2. ([6, лемма 2.3]). *Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда:*

1) если H – подгруппа группы G, то $l_\pi^*(H)\le l_\pi^*(G)$;

2) если N – нормальная подгруппа группы G, то $l_\pi^*(G/N)\le l_\pi^*(G)$ и $l_\pi^*(G)\le l_\pi^*(G/N)+l_\pi^*(N)$;

3) если N – нормальная π'-погруппа группы G, то $l_\pi^*(G/N)=l_\pi^*(G)$;

4) если G и V – π-разрешимые группы, то $l_\pi^*(G\times V)=max\{l_\pi^*(G),l_\pi^*(V)\}$;

5) если N_1 и N_2 – нормальные подгруппы в G, то

$$l_\pi^*(G/(N_1\cap N_2))\le max\{l_\pi^*(G/N_1),l_\pi^*(G/N_2)\}.$$

В монографии Хупперта [8] получено описание p-групп G, у которых каждая абелевая нормальная подгруппа порождается не более, чем двумя элементами. Эти результаты отражены в леммах 3 и 4.

Лемма 3 ([8, теорема III.7.6]). *Пусть G – p-группа и каждая абелевая нормальная подгруппа циклическая. Тогда:*

1) *если $p>2$, то G циклическая;*

2) если $p=2$, то P имеет нормальную циклическую подгруппу индекса 2.

Лемма 4. ([8, теорема III.12.4, замечание III.12.5], [9]). *Пусть G – p-группа, $|G|=p^n$ и каждая абелевая нормальная подгруппа порождается двумя элементами. Тогда G изоморфна одной из следующих групп:*

I. Если $p\geq 3$, то:

1) G метациклическая;

2) либо $G=A\times B$, где A – неабелева группа порядка p^3 и экспоненты p, а B – циклическая группа порядка p^{n-2}, либо $G=[A]B$, где $A=Z_p\times Z_{p^{n-2}}$ – абелева группа, а B – циклическая группа порядка p;

3) $G=[A]B$, где A – абелева группа, $A=C_G(G')$, а B – циклическая группа порядка p;

4) G – 3-группа максимального класса.

II. Если $p=2$, то:

1) G – группа кватернионов порядка 8;

2) G – центральное произведение двух подгрупп Q_8 и D_8, где D_8 – диэдральная группа порядка 8;

3) G – специальная группа такая, что $|G/Z(G)|=2^4$ и $|Z(G)|=2^2$.

Лемма 5. *Пусть P – p-группа и $r_n(P)\leq 2$. Тогда производная длина группы P не превышает 2. В частности, если $p=2$, то P бициклическая.*

Доказательство. Так как $r_n(P)\leq 2$, то каждая абелевая нормальная подгруппа порождается не более, чем двумя элементами. Если каждая абелевая нормальная подгруппа циклическая, то из леммы 3 следует, что P бициклическая и производная длина группы P не превышает 2. Для случая, когда число порождающих элементов каждой абелевой нормальной подгруппы равно двум, будем использовать лемму 4. Очевидно, что группы из п. I_1, I_3 и II_1 являются метабелевыми. Так как неабелева группа A порядка p^3 и экспоненты p является метабелевой, то группа P из п. I_2 метабелева. Из теоремы 14.17 [8] производная длина 3-группы максимального класса (п. I_4) равна 2. Группа P из п. II_2 имеет порядок 16 и номер 8 в библиотеке SmallGroups [10]. Кроме того, эта группа является бициклической и имеет производную длину равную 2. Вычисления в компьютерной системе GAP [10] показывают, что группа из п. II_3 имеет нормальный ранг равный 4, поэтому исключается из рассмотрения.

Таким образом, производная длина группы P не превышает 2. Кроме того, при $p=2$ группа нормального ранга ≤ 2 является бициклической. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть G – p-разрешимая группа такая, что $r_n(P)\leq 2$, где P – силовская p-подгруппа группы G. Тогда $l_2(G)\leq 2$, $l_3(G)\leq 2$, а $l_p(G)\leq 1$ для $p>3$.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы G. По лемме VI.6.9 [8] можно считать, что $O_{p'}(G) = \Phi(G)$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G) = C_G(F)$ – единственная минимальная нормальная p-подгруппа. Тогда G/F изоморфна подгруппе группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, F$. Так как $|F/\Phi(F)| \le p^2$ и $\Phi(F) = 1$, то $|F| \le p^2$.

Если $|F| = p$, то фактор-группа G/F изоморфна подгруппе циклической группы $\mathrm{Aut}\, F$, порядок которой равен $p-1$. Поэтому $l_p(G) \le 1$. Если $|F| = p^2$, то фактор-группа G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2,p)$, порядок которой равен $(p^2 - p)(p^2 - 1)$. Тогда в группе G силовская p-подгруппа имеет порядок либо p^2, либо p^3. Если силовская p-подруппа абелева, то $l_p(G) \le 1$. Если G_p неабелева, то порядок силовской подгруппы G_p равен p^3 и $l_p(G) \le 2$ по теореме VI.6.6 [8].

По теореме I.14.10 [8] G_p изоморфна либо метациклической группе $M_3(p) = \langle a, b \mid a^{p^2} = b^p = 1, a^b = a^{1+p} \rangle = [\langle a \rangle]\langle b \rangle$, либо группе экспоненты p. В первом случае $l_p(G) \le 1$ для $p \ge 3$. Пусть G_p – группа экспоненты p. Если порядок группы нечетен или p – не простое число Ферма, то, по теореме IX.4.8 [11], $l_p(G) \le 1$. Но теперь, согласно утверждению *b*) теоремы IX.5.5 [11], $l_p(G) \le 1$ для $p > 3$.

Лемма 7 ([8, леммы VI.8.1]). *Пусть H – неприводимая подгруппа нечетного порядка группы $GL(2,p)$. Тогда H циклическая и $|H|$ делит $(p^2 - 1)$.*

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{B} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотентных и абелевых групп обозначаются через $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно.

Лемма 8. *Пусть G – группа нечётного порядка $r_n(P) \le 2$, P – силовская p-подгруппа. Тогда коммутант группы G нильпотентен.*

Доказательство. Очевидно, что условие «коммутант группы нильпотентен» равносильно принадлежности группы к произведению формаций $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

Пусть G – группа наименьшего порядка, удовлетворяющая условиям теоремы, но не принадлежащая $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

Очевидно, что всякая фактор-группа наследует условия теоремы. Тогда $\Phi(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подруппа, которая совпадает с подгруппой Фиттинга $F = F(G)$. Так как G разрешима, то $F = C_G(F)$. Кроме того, $|F| = p^n$ и т.к. $F \le P$, то $\Phi(F) = 1$ и $|F| \le p^2$.

Если $|F| = p$, то G/F циклическая и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Противоречие. Если $|F| = p^2$, то G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2,p)$. По лемме 7, G/F циклическая и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Противоречие. Значит, предположение о группе G неверное и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, т.е. коммутант группы G нильпотентен.

Лемма 9. *Пусть G – разрешимая группа такая, что $r_n(P) \le 2$, P – силовская p-подгруппа, $p \in \{2,3\}$. Тогда $l^a_{\{2,3\}}(G) \le 6$ и $l^n_{\{2,3\}}(G) \le 4$.*

Доказательство. Из леммы 2 следует, что $O_{\{2,3\}'}(G)=1$, в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N такая, что $|N|=p^n$, где $p\in\{2,3\}$. Очевидно, что $O_{p'}(G)=1$. Тогда подгруппа Фиттинга $F(G)=O_p(G)$ и $F(G)\le G_p$. Так как $r_n(G_p)\le 2$, то $|F(G)/\Phi(F(G))|\le p^2$.

Рассмотрим фактор-группу $F(G)/\Phi(G)$. Очевидно, что

$$F(G)/\Phi(G)\cong (F(G)/\Phi(F(G)))/(\Phi(G)/\Phi(F(G))).$$

Тогда $|F(G)/\Phi(G)|\le p^2$. Так как G – разрешима, то $F(G)/\Phi(G)$ – прямое произведение минимальных нормальных подруп группы $G/\Phi(G)$.

Если $|F(G)/\Phi(G)|=p$, то $C_{G/\Phi(G)}(F(G)/\Phi(G))=F(G)/\Phi(G)$ и $G/F(G)\cong (G/\Phi(G))/(F(G)/\Phi(G))$ изоморфна подгруппе группы $\mathrm{Aut}\ F(G)/\Phi(G)$. Поэтому $G/F(G)$ – циклическая и $l^a_{\{2,3\}}(G/F(G))\le 1$. Так как по лемме 5 $d(G_p)\le 2$, то $l^a_{\{2,3\}}(G)\le 2+1=3$, а $l^n_{\{2,3\}}(G)\le 2$.

Пусть $|F(G)/\Phi(G)|=p^2$. Тогда $G/F(G)$ изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2,p)$. Если $p=2$, то $G/F(G)$ изоморфна подгруппе симметрической группы $S_3\cong GL(2,2)$ степени 3, а значит, G – $\{2,3\}$-группа и $l^a_{\{2,3\}}(G)\le l^a_{\{2,3\}}(F(G))+l^a_{\{2,3\}}(S_3)=2+2=4$, а $l^n_{\{2,3\}}(G)\le 1+2=3$. Если $p=3$, то $G/F(G)$ изоморфна подгруппе группы $GL(2,3)$ и $l^a_{\{2,3\}}(G)\le l^a_{\{2,3\}}(F(G))+l^a_{\{2,3\}}(GL(2,3))=2+4=6$, а $l^n_{\{2,3\}}(G)\le 1+3=4$.

2. Доказательство теоремы

1) Применим индукцию по порядку G. Все фактор-группы наследуют условие теоремы. Поэтому $O_{\pi'}(G)=1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N. Очевидно, что $O_{p'}(G)=1$. Тогда $F=F(G)\le G_p$.

Так как $p>3$, то по лемме 6 $l_p(G)\le 1$. Тогда $F(G)=G_p$.

Так как холлова π-подгруппа G_π имеет нечётный порядок, то, по лемме 8, ее коммутант $(G_\pi)'$ нильпотентен и $(G_\pi)'\le F(G_\pi)$. Тогда

$$G_\pi/F(G_\pi)\cong (G_\pi/(G_\pi)')/(F(G_\pi)/(G_\pi)')$$

и $G_\pi/F(G_\pi)$ абелева. Очевидно, что $F(G_\pi)=F(G)$. Таким образом, $G_\pi/F(G)$ – абелева, а значит, $l^a_\pi(G/F(G))\le 1$. Так как $F(G)=G_p$ и $d(G_p)\le 2$, то $l^a_\pi(G)\le 3$, а $l^n_\pi(G)\le 2$. В частности, $l_\pi(G)\le 2$.

2) Из леммы 1 и леммы 9 следует, что $l^a_\pi(G)\le l^a_{\{2,3\}'}(G)+l^a_{\{2,3\}}(G)\le 3+6=9$, $l^n_\pi(G)\le l^n_{\{2,3\}'}(G)+l^n_{\{2,3\}}(G)\le 2+4=6$. В частности, $l_\pi(G)\le 6$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Вышс. шк., 2006.
2. Numata, M. On the π-nilpotent length of π-solvable groups / M. Numata // Osaka J. Math. – 1971. – Vol. 8. – P. 447–451.

3. Monakhov, V. S. The nilpotent π-length of maximum subgroups in finite π-soluble groups / V. S. Monakhov, O. A. Shpyrko // Moscow University Mathematics Bulletin. – 2009. – Vol. 64, № 6. – P. 229–234.

4. Монахов, В. С. Инварианты конечных разрешимых групп / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 63–81.

5. Грицук, Д. В. О производной π-длине π-разрешимой группы / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.

6. Грицук, Д. В. О конечных π-разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (15). – С. 61–66.

7. Монахов, В. С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В. С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 25–28.

8. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1967.

9. Blackburn, N. Generalizations of certain elementary theorems on p-groups / N. Blackburn // Proc. London Math. Soc. – 1961. – Vol. 11. – P. 1–22.

10. GAP (Groups, Algorithms, and Programming) (2014), Version 4.7.6. [Electronic resourse]. – Mode access: www.gap-system.org.

11. Huppert, B. Finite Groups II / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer. – 1982.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 19.05.2016

Gritsuk D.V., Daudov D.D., Trofimuk A.A. **On Invariants of π-Solvable Groups with Sylow Subgroups of Small Normal Rank**

We obtain estimates of the derived π-length and the nilpotent π-length of a π-solvable group G whose normal rank of Sylow p-subgroups, $p \in \pi$ is at most 2. In particular, the derived π-length of such group does not exceed 9 and the nilpotent π-length of such group does not exceed 6.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант № Ф15РМ-025).