УДК 512.542

А.А. Трофимук, В.О. Лукъяненко

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, У КОТОРЫХ НОРМАЛЬНЫЙ РАНГ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП ИЗ ПОДГРУППЫ ФИТТИНГА ≤ 2

Получены оценки производной длины и нильпотентной длины разрешимой группы G, у которой нормальный ранг силовских подгрупп из подгруппы Фиттинга ≤ 2. В частности, производная длина такой группы G не превышает 7, а нильпотентная длина группы G не превышает 4. Кроме того, если группа G A_4-свободна, то нильпотентная длина группы G не превышает 3, а производная длина группы G не превышает 5; если группа G имеет нечетный порядок, то G метанильпотентна, а производная длина группы G не превышает 4.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1; 2].

Напомним, что нормальный ранг $r_n(P)$ p-группы P определяется следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X \lhd P} \log_p |X/\Phi(X)|,$$

где X пробегает все нормальные подгруппы группы P, в том числе и P. Здесь $\Phi(X)$ – подгруппа Фраттини группы X.

В.С. Монаховым в [3] были исследованы разрешимые группы с силовскими подгруппами нормального ранга ≤ 2. В частности, доказано следующее утверждение:

Если G – разрешимая группа с силовскими подгруппами нормального ранга ≤ 2, то нильпотентная длина группы G не превышает 4.

Бициклической называют группу, являющуюся произведением двух циклических подгрупп. Метациклическая группа всегда является бициклической. Обратное утверждение верно для примарных групп нечетного порядка [2, теорема III.11.5]. Кроме того, нормальный ранг бициклической группы нечетного порядка ≤ 2. Однако хорошо известно, что бициклические 2-группы имеют нормальный ранг ≤ 3.

А.А. Трофимук в работе [4] заметил, что для оценки производной длины разрешимой группы достаточно рассматривать порядки силовских подгрупп только ее подгруппы Фиттинга. Доказано следующее утверждение:

Пусть G – разрешимая непримарная группа и $F(G)$ – ее подгруппа Фиттинга. Если силовские подгруппы в $F(G)$ бициклические, то производная длина группы G не превышает 6.

Поэтому возникает вполне естественная задача: получить оценки производной и нильпотентной длины разрешимой группы, у которой нормальный ранг силовских подгрупп из подгруппы Фиттинга не превышает 2. Доказана следующая теорема.

Напомним, что группа G называется A_4-свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе A_4.

Теорема. *Пусть G – разрешимая группа и $r_n(P) \leq 2$ для любой силовской подгруппы P из подгруппы Фиттинга $F(G)$. Тогда нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина группы G не превышает 7. В частности, если:*

1) *группа* G A_4*-свободна, то нильпотентная длина группы* G *не превышает 3, а производная длина группы* G *не превышает 5;*

2) группа G *имеет нечетный порядок, то* G *метанильпотентна, а производная длина группы* G *не превышает 4.*

1. Вспомогательные результаты

Конкретные группы обозначаются следующим образом: 1 – единичная группа; A_n – знакопеременная группа степени n.

В доказательствах основной теоремы будут использоваться фрагменты теории формаций [1]. Формацией называется класс групп $\mathfrak{X}$, который удовлетворяет следующим требованиям:

1) если $G \in \mathfrak{X}$ и $N \lhd G$, то $G / N \in \mathfrak{X}$;

2) если $G / N_1 \in \mathfrak{X}$ и $G / N_2 \in \mathfrak{X}$, то $G / N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{X}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{FH} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{FF}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотетных и абелевых групп обозначают через $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно.

Для доказательства основной теоремы нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация. Тогда* $\mathfrak{NF}$ *– насыщенная формация.*

Доказательство. Согласно [5, с. 36], произведение $\mathfrak{NF}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация – эквивалентные понятия, то $\mathfrak{NF}$ – насыщенная формация.

Обозначим через $d(G)$ – число минимальных образующих p-группы G.

Лемма 2 *([6, теорема 44.12]). Пусть* N *– подгруппа* p*-группы* G*, такая, что* $d(N) = 2$*. Если* $N \le \Phi(G)$*, то* N *метациклическая.*

Лемма 3 *Пусть* P *–* p*-группа и* $r_n(P) \le 2$*. Тогда производная длина группы* P *не превышает 3.*

Доказательство. Если $\Phi(P) = 1$, то P – абелевая группа. Предположим, что $\Phi(P) \ne 1$. Так как $\Phi(P)$ нормальна в P, то $d(\Phi(P))$ не превышает 2. Если $d(\Phi(P)) = 1$, то $\Phi(P)$ – циклическая и P – метабелевая группа. Если $d(\Phi(P)) = 2$, то $\Phi(P)$ – метациклическая по лемме 2. Значит, производная длина группы P не превышает 3.

Лемма 4 *([7, лемма 12]). Пусть* H *– неприводимая разрешимая подгруппа группы* $GL(2,p)$*. Тогда* $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$.

Лемма 5 *([7, лемма 13]). Если* H *– разрешимая* A_4*-свободная подгруппа группы* $GL(2,p)$*, то* H *метабелева.*

Лемма 6 *([2, лемма VI.8.1]). Пусть* H *– неприводимая подгруппа нечетного порядка группы* $GL(2,p)$*. Тогда* H *циклическая.*

2. Доказательство основной теоремы

1. Вначале докажем, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. Воспользуемся индукцией по порядку G. Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Тогда $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$. Пусть F_p – силовская p-подгруппа в $F(G)$, тогда $F_p\Phi(G)/\Phi(G)$ – силовская p-подгруппа в $F(G/\Phi(G))$. Так как $F_p\Phi(G)/\Phi(G) \cong F_p/F_p \cap \Phi(G)$, то $r_n(F_p\Phi(G)/\Phi(G)) \leq r_n(F_p) \leq 2$. Поэтому $G/\Phi(G)$ удовлетворяет условиям теоремы. Так как формация $\mathfrak{F}$ насыщенна, то $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\Phi(G) = 1$.

По теореме III.4.5 [2] подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп N_i группы G, где $1 \leq i \leq k$. По теореме I.4.5 [2] для каждого N_i фактор-группа $G/C_G(N_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(N_i)$. По лемме I.9.6 [2] фактор-группа $G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(N_i)$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп $G/C_G(N_i)$, $1 \leq i \leq k$. Так как в разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает со своим централизатором, то

$$\bigcap_{i=1}^{k} C_G(N_i) = C_G(F) = F \ \text{ и } \ G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(N_i) = G/F.$$

Так как N_i – элементарная абелева p_i-подгруппа порядка p_i^k, то $N_i \leq F_{p_i}$ и $k \leq 2$, поскольку $\Phi(N_i) = 1$ и $r_n(P) \leq 2$ для любой силовской подгруппы P из $F(G)$. Поэтому возможны следующие варианты:

1) $\mathrm{Aut}(N_i)$ изоморфна циклической группе порядка $p_i - 1$;

2) $\mathrm{Aut}(N_i)$ изоморфна подгруппе группы $GL(2, p_i)$;

В первом случае фактор-группа $G/C_G(N_i)$ циклическая. Поэтому $G/C_G(N_i) \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$.

Во втором случае фактор-группа $G/C_G(N_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$ и фактор-группа $G/C_G(N_i) \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$ по лемме 4. Так как $\mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$ – формация, то $G/F \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}$.

Итак, мы доказали, что $G/F \in \mathfrak{A}^4$. Из леммы 1 следует, что $F \in \mathfrak{A}^3$, поэтому производная длина G не превышает 7. Так как $G \in \mathfrak{N}^4$, то нильпотентная длина G не превышает 4.

Пусть группа G является A_4-свободной. Тогда, повторяя доказательство основной части теоремы и используя лемму 5, получим, что $G/F \in \mathfrak{A}^2$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}^3$ и нильпотентная длина группы G не превышает 3, а так как по лемме 1 $F \in \mathfrak{A}^3$, то производная длина группы G не превышает 5.

Пусть группа G имеет нечетный порядок. Тогда, используя лемму 6, получим, что $G/F \in \mathfrak{A}$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}^2$ и нильпотентная длина группы G не превышает 2, а производная длина группы G не превышает 4 по лемме 1.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов // Минск : Вышэйшая школа. – 2006.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York. – 1967.
3. Монахов, В.С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В.С.Монахов // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 25–28.
4. Трофимук, А.А. Производная длина конечных групп с ограничениями на силовские подгруппы / А.А. Трофимук // Математические заметки. – 2010. – Т. 87, № 2. – С. 287–293.
5. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва : Наука, 1978. – 272 с.
6. Berkovich, Y. Groups of Prime Power Order Volume 1 / Yakov Berkovich. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 2008.
7. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сибирский математический журнал – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.

***A.A. Trofimuk, V.O. Lukyanenko* On Finite Groups Whose Normal Rank of Sylow Subgroups of the Fitting Subgroup is at Most 2**

We obtain estimates of the derived length and the nilpotent length of a solvable group G whose normal rank of Sylow subgroups of the Fitting subgroup is at most 2. In particular, the derived length of such group does not exceed 7 and the nilpotent length of such group does not exceed 4. Besides, if G A_4-free then the nilpotent length of G is at most 3 and the derived length of G is at most 5; if G has odd order, then G is metanilpotent and the derived length of G is at most 4.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 06.11.2014