УДК 517.983.54+519.6

В.Ф. Савчук

О ГРАДИЕНТНОМ МЕТОДЕ С ПЕРЕМЕННЫМ ШАГОМ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

В гильбертовом пространстве для решения некорректных задач с положительным ограниченным самосопряженным оператором исследуется явный итерационный метод. Даются условия сходимости метода в исходной норме гильбертова пространства. Приводится оценка погрешности предложенного метода в случае априорного выбора числа итераций. Обоснована возможность применения правила останова по невязке. Доказана сходимость метода. Получена оценка для момента останова и оценка погрешности метода.

1. Введение

Для некорректных задач условия корректности не выполняются, тем не менее такого рода задачи постоянно возникают в математической физике. Суть дела состоит в том, что некорректно поставленные задачи «плохо» поставлены, множества их приближенных решений очень широки, даже не ограничены, поэтому необходима дополнительная (априорная) информация, позволяющая сформулировать критерий отбора приближенного решения и построить регуляризующий алгоритм. Такой информацией могут служить априорные сведения о гладкости искомого решения, его монотонности, выпуклости и т.п.

Для итеративных методов решения операторных уравнений таким дополнительным условием является требование истокопредставимости точного решения. Его знание является обязательным для априорного выбора числа итераций (для получения оценки погрешности метода и определения момента останова). В работах М.А. Красносельского, И.В. Емелина [4; 5], Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенникова [3] впервые обоснована возможность применения правил останова по невязке и по соседним приближениям, что делает итеративные методы эффективными и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения.

В настоящее время теория некорректных задач успешно применяется для решения широкого круга обратных задач оптики и спектроскопии, электродинамики, диагностики плазмы, геофизики, теории потенциала и гравиметрии. Поскольку некорректные задачи постоянно возникают в приложениях математической физики, то проблема изучения таких задач и построения методов их решения является актуальной. В работе изучается итеративный метод для решения некорректных задач.

2. Постановка задачи

В работе рассматривается уравнение I-го рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с действующим в гильбертовом пространстве H ограниченным положительнным самосопряжённым оператором $A: H \to H$, в предположении, что нуль принадлежит спектру этого оператора, но не является его собственным значением. При сделанных предположениях задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если решение уравнения (1) все же существует, то для его отыскания естественно пытаться применить различные итерационные методы (см., например, [1– 9]). В настоящей работе изучается итеративный метод, впервые предложенный в [7]

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y), \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

Обычно правая часть уравнения известна с некоторой точностью δ, т.е. известен y_δ, для которого $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Поэтому вместо (2) приходится рассматривать приближения

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}\left(Ax_{n,\delta} - y_\delta\right), \quad x_{0,\delta} = 0. \qquad (3)$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения при подходящем выборе n и достаточно малых δ. Иными словами, метод (3) является сходящимся, если

$$\lim_{\delta \to 0}\left(\inf_n \left\|x - x_{n,\delta}\right\|\right) = 0 \cdot$$

3. Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций

Априорный выбор числа итераций для метода (3) был изучен в работе [7]. Там показано, что итеративный метод (3) сходится к точному решению при условии $0 < \alpha_i < \dfrac{2}{M}$, $M = \|A\|$, если число итераций n выбирать в зависимости от уровня погрешности δ так, чтобы $(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$. При условии, что точное решение истокопредставимо, т.е. $x = A^s z$, $s > 0$, получена оценка погрешности

$$\|x - x_n\| \le s^s\left(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n\right)^{-s} e^{-s}\|z\| + \left(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n\right)\delta.$$

Как видно, метод (3) не дает преимущества в мажорантных оценках по сравнению с методом простых итераций [8]. Но он дает выигрыш в следующем. Поскольку объем вычислительной работы зависит от α, то для уменьшения его следует брать α возможно большим и таким, чтобы n было целым. В методе простых итераций с постоянным шагом [8] $0 < \alpha < 1{,}25$, а в этом же методе с переменным шагом (3) допускается более широкий диапазон $0 < \alpha_i < 2$, поэтому предпочтительнее метод (3). В работе [7] получена погрешность в счёте и погрешность в операторе.

4. Правило останова по невязке

Априорный выбор числа итераций для метода (3) был получен при условии, что точное решение уравнения (1) истокопредставимо, т.е $x = A^s z, s > 0$. Однако не всегда имеются сведения об элементе z и степени истокопредставимости s. Тем не менее метод (3) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться правилом останова по невязке.

Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент m останова итерационного метода условиями

$$\begin{cases} \| Ax_{n,\delta} - y_\delta \| > \varepsilon, & (n < m), \\ \| Ax_{m,\delta} - y_\delta \| \le \varepsilon, & \varepsilon = b_1\delta, \quad b_1 > 1. \end{cases} \qquad (4)$$

Покажем возможность применения правила (4) для метода (3). Считаем, что $\|A\| = 1$.

Рассмотрим семейство функций

$$g_n(\lambda) = [1 - (1 - \alpha_n\lambda)(1 - \alpha_{n-1}\lambda)...(1 - \alpha_1\lambda)]\lambda^{-1}.$$

Используя результаты статьи [7] нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ выполняются условия

$$\sup_{0\le\lambda\le 1} |\, g_n(\lambda) \,| \le \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n \le n\alpha, \quad \alpha = \frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}{n}; \tag{5}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le 1} |\, 1-\lambda g_n(\lambda) \,| \le \gamma_0, \text{ где } \gamma_0 = 1; \tag{6}$$

$$1-\lambda\, g_n(\lambda) \to 0, \quad n\to\infty; \tag{7}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le 1} \lambda^s\, |1-\lambda g_n(\lambda)| \le \gamma_s n^{-s}, n>0, \quad 0\le s<\infty, \tag{8}$$

где $\gamma_s = s^s(\alpha e)^{-s}$. Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $A = A^* \ge 0$, $||A|| \le 1$. Тогда для $\forall w \in H$ $(E - A\,g_n(A))w \to 0$ при $n\to\infty$.

Доказательство.

Воспользуемся интегральным представлением самосопряжённого оператора $A = \int_0^1 \lambda\, dE_\lambda$, где E_λ – спектральная функция. Рассмотрим

$$(E-Ag_n(A))w = \int_0^1 (1-\lambda g_n(\lambda))\, dE_\lambda w = \left\| \int_0^1 (1-\alpha_1\lambda)...(1-\alpha_n\lambda)\, dE_\lambda w \right\|.$$

Так как при $0<\alpha_i<2$, $\lambda\in[\varepsilon_0, 1]$, то имеем $|(1-\alpha_i\lambda)| \le q < 1$. Тогда

$$\left\| \int_\varepsilon^1 (1-\alpha_1\lambda)...(1-\alpha_n\lambda)\, dE_\lambda w \right\| \le q^n \left\| \int_\varepsilon^1 dE_\lambda w \right\| \le q^n \|w\| \to 0, n\to\infty.$$

$\left\| \int_0^\varepsilon (1-\alpha_1\lambda)...(1-\alpha_n\lambda)\, dE_\lambda w \right\| \le \left\| \int_0^\varepsilon dE_\lambda w \right\| \le \|E_\varepsilon w\| \to 0, \varepsilon\to 0,$ в силу свойств спектральной функции. Следовательно, $(E - Ag_n(A))w \to 0, n\to\infty$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $A = A^* \ge 0$, $||A|| \le 1$. Тогда для любого $v \in \overline{R(A)}$ имеет место соотношение

$$n^s \,||\, A^s(E-Ag_n(A))v \,|| \to 0, \quad n\to\infty, \ 0\le s<\infty. \tag{9}$$

Доказательство.

Так как (8) верно, то

$$n^s \left\| A^s(E-Ag_n(A)) \right\| \le n^s \sup_{0\le\lambda\le M} \lambda^s \left|1-\lambda g_n(\lambda)\right| \le s^s(\alpha e)^{-s}, n>0.$$

Воспользуемся теоремой Банаха–Штейнгауза [10, с. 151], по которой сходимость $B_n u \to Bu$ при $n\to\infty$ для $\forall u\in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|, n=1,2,...$ ограничены независящей от n постоянной. Здесь $\|B_n\| = n^s \left\|A^s(E-Ag_n(A))\right\| \le \gamma_s$, т.е. $\|B_n\|$ совокупно ограничены.

В качестве плотного в $\overline{R(A)}$ подмножества возьмём множество $R(A)$. Положим $s_1 = s+1$. Тогда для каждого $v = Aw \in R(A)$ имеем

$$n^s \left\| A^s (E - Ag_n(A))v \right\| = n^s \left\| A^{s+1}(E - Ag_n(A))w \right\| \le$$
$$\le n^s (s+1)^{s+1} (\alpha e)^{-(s+1)} n^{-(s+1)} \|w\| = (s+1)^{s+1} (\alpha e)^{-(s+1)} n^{-1} \|w\| = \gamma_{s_1} n^{-1} \|w\| \to 0, \ \ n \to \infty,$$

так как $s_1 < \infty$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $A = A^* \ge 0$, $||A|| \le 1$. Если для некоторых $n_k < \bar{n} = const$ и $v_0 \in \overline{R(A)}$ при $k \to \infty$ имеем $\omega_k = A(E - Ag_{n_k}(A))v_0 \to 0$, то $v_k = (E - Ag_{n_k}(A))v_0 \to 0$.

Доказательство.

В силу (6) последовательность v_k ограничена $\|v_k\| \le \gamma_0 \|v_0\|$, $k \in N$. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность.

Пусть $v_k - \to v, (k \in N' \subseteq N)$, тогда $Av_k - \to Av, (k \in N')$. Но по условию $w_k = Av_k \to 0$, следовательно, $Av = 0$. Поскольку нуль не является собственным значением оператора A, то $v = 0$. Тогда

$$\|v_k\|^2 = (v_k, (E - Ag_{n_k}(A)v_0) = (v_k, v_0) - (v_k, Ag_{n_k}(A))v_0) =$$
$$= (v_k, v_0) - (Av_k, g_{n_k}(A)v_0) = (v_k, v_0) - (w_k, g_{n_k}(A)v_0) \to (v_k, v_0) = 0,$$

так как $w_k \to 0, v = 0$ и по условиям $\left\| g_{n_k}(A) \right\| \le \alpha n_k \le \alpha \bar{n}$. Следовательно, $\|v_k\| \to 0$. Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности v_k стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность $v_k \to 0, k \to \infty$. Лемма 3 доказана.

Используем эти леммы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $A = A^* \ge 0$, $||A|| \le 1$ и пусть момент останова $m = m(\delta)$ в методе (3) выбран по правилу (4), тогда $m(\delta)\delta \to 0$, $x_{m(\delta),\delta} \to x$, $\delta \to 0$.

Доказательство

Поскольку нуль не является собственным значением оператора A, то $\overline{R(A)} = H$. Так как [7]

$$E - A\,[\alpha_n + \alpha_{n-1}(E - \alpha_n A) + \ldots + \alpha_1 (E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1} A) \ldots (E - \alpha_2 A)] =$$
$$= (E - \alpha_1 A)(E - \alpha_2 A) \ldots (E - \alpha_n A),$$

то

$$A[\alpha_n + \alpha_{n-1}(E - \alpha_n A) + \ldots + \alpha_1 (E - \alpha_n A) \ldots (E - \alpha_2 A)] =$$
$$= E - (E - \alpha_1 A)(E - \alpha_2 A) \ldots (E - \alpha_n A).$$

В [7] показано, что

$$x_{n,\delta} = [\alpha_n + \alpha_{n-1}(E - \alpha_n A) + \ldots + \alpha_1 (E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1} A) \ldots (E - \alpha_2 A)]\, y_\delta,$$

следовательно,

$$x_{n,\delta} - x = A^{-1}[E - (E - \alpha_1 A)(E - \alpha_2 A) \ldots (E - \alpha_n A)](y_\delta - y) - (E -$$
$$- \alpha_1 A)(E - \alpha_2 A) \ldots (E - \alpha_n A)x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x.$$

Значит,

$$x_{n,\delta} - x = -(E - Ag_n(A))x + g_n(A)(y_\delta - y). \tag{10}$$

Отсюда $Ax_{n,\delta} - y = -A\ (E - Ag_n(A))x + Ag_n(A)\ (y_\delta - y)$ и, следовательно,

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A\ (E - Ag_n(A))x - [E - Ag_n(A)]\,(y_\delta - y). \quad (11)$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|\ (E - Ag_n(A))x\| \to 0, \quad n \to \infty, \quad (12)$$

$$\sigma_n = n\,\|A(E - Ag_n(A))x\| \to 0, \quad n \to \infty. \quad (13)$$

Кроме того, из (5) и (6)

$$\|\,g_n(A)\,(y_\delta - y)\| \le \alpha n\delta, \quad (14)$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \le \gamma_0 = 1. \quad (15)$$

Рассмотрим случай правила останова (4). Тогда $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le b_1\delta$ и из (11) и (15) получим при $n = m$

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \le \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| +$$
$$+ \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \le b_1\delta + \delta = (b_1 + 1)\delta.$$

Следовательно,

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \le (b_1 + 1)\delta. \quad (16)$$

Для любого $n < m$ получим

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \ge \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| -$$
$$- \|(E - Ag_n(A))(y_\delta - y)\| \ge b_1\delta - \delta = (b_1 - 1)\delta,$$

т.е. для $\forall\, n < m$

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \ge (b_1 - 1)\delta. \quad (17)$$

Из (13) и (17) получим при $n = m - 1$

$$\frac{\sigma_{m-1}}{m-1} = \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| \ge (b_1 - 1)\delta \ \text{ или } \ (m-1)\,\delta \le \frac{\sigma_{m-1}}{b_1 - 1} \to 0, \quad \delta \to 0$$

(так как из (13) $\sigma_m \to 0,\ m \to \infty$), следовательно, $m\delta \to 0,\ \delta \to 0$.

Если при этом $m \to \infty$, то, используя (10), получим

$$\|x_{m,\delta} - x\| \le \|(E - Ag_m(A))x\| + \|(g_m(A))(y_\delta - y)\| \le$$
$$\le \|(E - Ag_m(A))x\| + \gamma m\delta \to 0,\ m \to \infty,\ \delta \to 0$$

в силу (12). (Здесь $\gamma = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m}{m}$).

Если же для некоторых $\delta_n \to 0$ последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \to x,\ \ \delta_n \to 0$. Действительно, из (16) $\|A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| \le (b_1 + 1)\delta_n \to 0, \delta_n \to 0$, следовательно, $A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \to 0$, $\delta_n \to 0$, и по лемме 3 $(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \to 0,\ \delta_n \to 0$. Отсюда $\|x_{m(\delta_n),\delta_n} - x\| \le$ $\le \|(E - \mathrm{A}\,\mathrm{g}_{\mathrm{m}(\delta_\mathrm{n})}(A))x\| + \gamma\, m(\delta_n)\,\delta_n \to 0,\ \delta_n \to 0$. Теорема 1 доказана.

Имеет место

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и пусть $x = A^s z,\quad s > 0$, тогда справедливы оценки

$$m \le 1 + \frac{s+1}{\beta e}\left[\frac{\|z\|}{(b_1 - 1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}},$$

$$\| x_{m,\delta} - x \| \le [(b_1+1)\delta]^{s/(s+1)} \, \| z \|^{1/(s+1)} + $$
$$+ \gamma \left\{ 1 + \frac{(s+1)}{\beta e} \left[\frac{\| z \|}{(b_1-1)\delta} \right]^{\frac{1}{s+1}} \right\} \delta. \qquad (18)$$

Доказательство.

Из (8) при $n = m-1$ имеем

$$\| A(E - Ag_{m-1}(A))x \| = \| A^{s+1}(E - Ag_{m-1}(A))z \| \le$$
$$\le (s+1)^{s+1} \, [(m-1)\beta e]^{-(s+1)} \| z \|, \ \beta = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{m-1}}{m-1}.$$

Воспользовавшись (17), получим

$$(b_1 - 1)\delta \le (s+1)^{s+1} \, [(m-1)\,\beta e]^{-(s+1)} \| z \|,$$

откуда $m \le 1 + \frac{(s+1)}{\beta e} \left[\frac{\| z \|}{(b_1-1)\delta} \right]^{\frac{1}{s+1}}$. При помощи неравенства моментов оценим

$$\| (E - Ag_m(A))\, x \| = \| A^s \, (E - Ag_m(A))\, z \| \le$$
$$\le \| A^{s+1}(E - Ag_m(A))\, z \|^{\frac{s}{s+1}} \, \| (E - Ag_m(A))\, z \|^{\frac{1}{s+1}} \le$$
$$\le \| A\,(E - Ag_m(A))\, x \|^{\frac{s}{s+1}} \, \| z \|^{\frac{1}{s+1}} \le [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \, \| z \|^{\frac{1}{s+1}}.$$

Тогда

$$\| x_{m,\delta} - x \| \le \| (E - Ag_m(A))x \| + \| (g_m(A))(y_\delta - y) \| \le$$
$$\le [(b_1+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \| z \|^{\frac{1}{s+1}} + m\gamma\delta \le [(b_1+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \| z \|^{\frac{1}{s+1}} +$$
$$+ \gamma \left\{ 1 + \frac{(s+1)}{\beta e} \left[\frac{\| z \|}{(b_1-1)\delta} \right]^{\frac{1}{s+1}} \right\} \delta.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Порядок оценки (18) есть $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$ и, как следует из [3], он оптимален в классе решений $x = A^s z$, $s > 0$.

Замечание 2. Используемое в формулировке теоремы 2 предположение, что порядок истокопредставимости точного решения равен $s > 0$, не потребуется на практике, так как при останове по невязке автоматически делается число итераций, нужное для получения оптимального по порядку приближенного решения. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке (4), как показывает теорема 2, обеспечивает сходимость метода, т.е. его регуляризующие свойства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.

2. Бакушинский, А. Б. Один общий приём построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве / А.Б. Бакушинский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1967. – Т. 7, № 3. – С. 672–677.

3. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.

4. Емелин, И.В. К теории некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.

5. Емелин, И.В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.

6. Красносельский, М.А. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко [и др.]. – М. : Наука, 1969. – 456 с.

7. Константинова, Я.В. Градиентный метод с переменным шагом для уравнений I-го рода / Я.В. Константинова, О.А. Лисковец // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1974. – № 2. – С. 45–49.

8. Константинова, Я.В. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I-го рода / Я.В. Константинова, О.А. Лисковец // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. – 1973. – № 1. – С. 9–15.

9. Bialy, H. Iterative Behandlung Linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, № 2. – P. 166–176.

10. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.

V.F. Savchuk **On the Gradient Method with Variable Step Solving Ill-posed Problems**

In the Hilbert space for the solution of ill-posed problems with a positive bounded self-adjoint operator is investigated explicit iterative method. We give conditions for the convergence of the method in the original norm of the Hilbert space. An estimate of the accuracy of the proposed method in the case of a priori choice of the number of iterations. The possibility of applying the rule to stop residual. We prove the convergence of the method. An estimate of the moment stop and error estimate.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 17.10.2014