УДК 517.9

Е.В. Пантелеева

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА, ПОРОЖДЁННЫХ ОТОБРАЖЕНИЯМИ ТИПА МОРСА–СМЕЙЛА В ПРОСТРАНСТВАХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

В работе получены необходимые и достаточные условия правосторонней обратимости операторов взвешенного сдвига в пространстве вектор-функций $L_2\left(X,\mathbb{C}^m,\mu\right)$ и формулы для соответствующих правых обратных. Операторы взвешенного сдвига порождены отображениями типа Морса-Смейла. Условия односторонней обратимости оператора $B-\lambda I$ ранее были получены только для одного класса отображений с простыми динамическими свойствами. Такие отображения имеют одну притягивающую точку, одну отталкивающую и не имеют седловых точек. Отображений типа Морса-Смейла обладают более сложной динамикой, т.к. имеют седловые точки, которые существенно влияют на свойства оператора. В статье доказано, что необходимым и достаточным условием правосторонней обратимости операторов взвешенного сдвига является существование разложения векторного расслоения $E = X\times C^m$ в прямую сумму устойчивого в положительном направлении и устойчивого в отрицательном направлении векториальных подмножеств. Ранее при исследовании спектральных свойств операторов взвешенного сдвига векториальные подмножества не использовались.

Введение

Данная работа связана с исследованием односторонней обратимости $B-\lambda I$ в случае, когда B есть оператор взвешенного сдвига в пространстве вектор-функций $L_2\left(X,\mathbb{C}^m,\mu\right)$, т.е. функций со значениями в m-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^m$.

Линейный ограниченный оператор B, действующий в банаховом пространстве вектор-функций F(X) на произвольном множестве X, называется *оператором взвешенного сдвига (ОВС)*, если он может быть представлен в виде

$$Bu(x) = A_0(x)u(\alpha(x)),\ x\in X ,$$

где $\alpha : X\to X$ – некоторое отображение, $A_0(x)$ заданная матрично-значная функция на X.

Мы рассматриваем случай, когда X – компактное метрическое пространство, а $\alpha : X\to X$ есть обратимое непрерывное отображение.

Описание спектра таких операторов в классических пространствах известно, т.е. получены условия обратимости операторов вида $B-\lambda I$ [1–3]. Однако интерес представляют также и условия правосторонней обратимости таких операторов, поскольку это есть условия существования решений соответствующих функциональных уравнений.

Сложность исследования операторов взвешенного сдвига зависит от сложности динамики отображения α, т.е. от поведения траекторий. Напомним, что *траекторией точки x_0* называется двусторонняя последовательность точек, заданная правилом

$$x_k = \alpha(x_{k-1}) = \alpha_k(x_0),\ \alpha_k(x) = \alpha(\alpha_{k-1}(x)),\ k\in\mathbb{Z} .$$

Поэтому обычно сначала исследовались операторы, порожденные отображениями с достаточно простыми динамическими свойствами, а затем результаты переносились на общую ситуацию. Одним из классов отображений со сравнительно простой динамикой являются т.н. отображения типа Морса-Смейла.

Непрерывное отображение $\alpha : X\to X$ компактного метрического пространства называется *отображением типа Морса-Смейла*, если оно обратимо, имеет конечное число неподвижных точек и для каждой точки из X траектория стремится к одной из неподвижных точек при $k \to +\infty$ и стремится к другой неподвижной точке при $k \to -\infty$.

Условия правосторонней обратимости $B-\lambda I$ для операторов взвешенного сдвига в пространствах вектор-функций ранее были получены только для одного очень специального класса отображений [4, с. 18], однако правосторонняя резольвента не строилась.

В данной работе получены необходимые и достаточные условия правосторонней гиперболичности оператора взвешенного сдвига B и построена правосторонняя резольвента для операторов, порожденных более широким классом отображений, чем рассмотренные в [4]. Эти отображения имеют более сложную динамику, так как у них имеются седловые точки, которые существенно влияют на свойство обратимости.

1. Правосторонне гиперболические операторы

Пусть B есть линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве F. Оператор B будем называть *правосторонне гиперболическим*, если операторы $B-\lambda I$ правосторонне обратимы для любого λ из некоторой окрестности единичной окружности и при этом существует семейство правых обратных $R_r(B;\lambda)$ для $B-\lambda I$, аналитически зависящее от λ.

Такое семейство $R_r(B;\lambda)$ будем называть *правосторонней резольвентой* для B.

В рассматриваемом случае единичная окружность принадлежит спектру оператора B, поэтому для таких операторов существует много различных правосторонних резольвент.

Пусть оператор B обратим. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. [5] *Пусть обратимый оператор B является правосторонне гиперболическим и пусть $R_r(B;\lambda)$ – некоторая его правосторонняя резольвента. Разложение правосторонней резольвенты $R_r(B;\lambda)$ в операторный ряд Лорана в окрестности единичной окружности имеет вид*

$$R_r(B;\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}(I-P) - \sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P, \tag{1}$$

где оператор P связан с резольвентой той же формулой, что и проектор Рисса:

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} R_r(B;\lambda)\, d\lambda .$$

Формула (1) имеет тот же вид, что и формула для резольвенты гиперболического оператора, в случае гиперболического оператора оператор P есть известный проектор Рисса. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2. [5] *Пусть оператор B обратим. Если существует такой ограниченный оператор P, что операторный ряд (1) сходится по норме, то сумма этого ряда является правосторонней резольвентой.*

Рассмотрим векторные подпространства

$$F^+ = \left\{ u \in F : \overline{\lim_{n\to+\infty}} \left\| B^n u \right\|^{1/n} < 1 \right\},$$

$$F^- = \left\{ u \in F : \overline{\lim_{n\to+\infty}} \left\| \left[B^{-1} \right]^n u \right\|^{1/n} < 1 \right\}.$$

Из теоремы 2 следует, что для того, чтобы построить правостороннюю резольвенту, достаточно получить соответствующий оператор P. Свойства оператора P, которые необходимы для сходимости ряда (1), описаны в следующей лемме:

Лемма 1. [5] *Пусть F – гильбертово пространство и для введённых подпространств F^+ и F^- выполнено условие*

$$F^+ + F^- = F, \tag{2}$$

то операторы $B-\lambda I$ *правосторонне обратимы для всех* λ *из окрестности единичной окружности.*

Если для ограниченного линейного оператора P выполнены включения

$$\operatorname{Im} P \subset F^{+},\ \operatorname{Im}(I-P) \subset F^{-}, \tag{3}$$

то ряд (1) сходится, его сумма является правосторонней резольвентой и B есть правосторонне гиперболический оператор.

Значит, необходимо построить подпространства F^{+} и F^{-}, для которых выполняется условие (2), а затем построить оператор P, для которого выполнены включения (3).

Отметим, что может существовать много различных операторов, удовлетворяющих условию (3), и, соответственно существует много различных правосторонних резольвент.

2. Локальные свойства устойчивых подмножеств

Неподвижная точка τ отображения α называется *притягивающей*, если для любой ее окрестности W существует инвариантная окрестность $U \subset W$, такая, что для всех $x \in U$ траектория $\alpha_k(x) \to \tau$ при $k \to +\infty$.

Точка, притягивающая для обратного отображения, называется *отталкивающей* для α.

Неподвижная точка τ отображения α называется *седловой*, если в любой ее окрестности W существует точка, траектория которой стремится к τ при $k \to +\infty$, и существует точка, траектория которой стремится к τ при $k \to -\infty$.

Будем рассматривать операторы взвешенного сдвига, порожденные отображениями $\alpha : X \to X$ в пространствах вектор-функций $L_2\left(X, \mathbb{R}^m, \mu\right)$. Для каждого из классов зададим функцию $\rho_d(x)$ соответственно

$$\rho(x) = \sqrt{\psi'(x_1)\psi'(x_2)...\psi'(x_d)}\,.$$

Тогда оператор $T_\alpha u(x) = \rho(x) u(\alpha(x))$ является унитарным в соответствующем пространстве. Оператор B удобно записывать в *стандартном виде* $B = AT_\alpha$, где матрица-функция $A(x) = \rho_d^{-1}(x) A_0(x)$ называется *приведенным коэффициентом*. Ниже считаем, что приведенный коэффициент является невырожденной непрерывной матрично-значной функцией.

Ассоциированное линейное расширение

Оператор $B-\lambda I$ может быть записан в виде $B-\lambda I = \lambda\left(\frac{1}{\lambda}B - I\right)$, где оператор $\frac{1}{\lambda}B$ также является оператором взвешенного сдвига. Поэтому в дальнейшем будем исследовать операторы вида $B - I$.

Произведение $E = X \times \mathbb{R}^m$ рассматривается как векторное расслоение над X с естественной проекцией [5]; слоем E_x над точкой $x \in X$ является множество

$$E_x = \left\{(x,\xi) : \xi \in \mathbb{R}^m\right\} = \{x\} \times \mathbb{R}^m,$$

изоморфное $\mathbb{R}^m$. В каждом слое определена норма, ниже используется обозначение $\|(x,\xi)\| := \|\xi\|$.

Каждое подмножество $K \subset E$ разбивается на слои $K_x = K \cap E_x$. Подмножество K называется *векториальным*, если для любого x слой K_x является векторным подпространством в E_x и измеримо зависит от x.

Векториальное подмножество $K \subset E$ называется *векторным подрасслоением*, если слои K_x непрерывно зависят от x.

Ассоциированное с оператором B отображение $\beta : E \to E$ задается формулой

$$\beta\left(x,\xi\right)=\left(\alpha^{-1}\left(x\right),A\left(\alpha^{-1}\left(x\right)\right)\xi\right),\ x\in X\ ,\ \xi\in\square^{m}\ . \tag{4}$$

При отображении β слой над точкой x линейно отображается в слой над точкой $\alpha^{-1}\left(x\right)$; действующие таким образом отображения векторного расслоения называются *линейными расширениями* отображения α^{-1} на векторное расслоение E.

Из предшествующих результатов [4] следует, что ассоциированное с оператором B линейное расширение β является наиболее простым объектом, к рассмотрению которого можно свести исследование оператора взвешенного сдвига в пространстве вектор-функций.

Устойчивые подмножества в окрестности притягивающей и отталкивающей точек

Подмножество $K\subset E$ называется *устойчивым в положительном направлении* относительно β, если существуют $\tilde{N}^{+}>0$ и $\gamma^{+}<1$ такие, что для всех $(x,\xi)\in K$ выполняется неравенство

$$\left\|\beta^{k}(x,\xi)\right\|\le C^{+}\left(\gamma^{+}\right)^{k}\left\|(x,\xi)\right\|,k>0\ . \tag{5}$$

Подмножество $K\subset E$ называется *устойчивым в отрицательном направлении* относительно β, если существуют $\tilde{N}^{-}>0$ и $\gamma^{-}<1$ такие, что для всех $(x,\xi)\in K$ выполняется неравенство

$$\left\|\beta^{-k}(x,\xi)\right\|\le C^{-}\left(\gamma^{-}\right)^{k}\left\|(x,\xi)\right\|,k\ge 0.$$

Введём обозначения. Для неподвижной точки τ_j обозначим через $\lambda_l\left(\tau_j\right)$ собственные значения матрицы $A\left(\tau_j\right)$. Пусть $m(j)$ есть количество собственных значений (с учётом кратности) матрицы, которые по модулю меньше 1.

Локальные свойства устойчивых подмножеств вблизи неподвижных точек описаны в следующей лемме:

Лемма 2. [7] *Пусть β есть линейное расширение (4), точка τ есть отталкивающая точка и для матрицы $A\left(\tau\right)$ выполнено условие гиперболичности:* $\left|\lambda_l\left(\tau\right)\right|\ne 1$.

Тогда над достаточно малой окрестностью $U\left(\tau\right)$ точки τ существует однозначно определённое максимальное подмножество, устойчивое в положительном направлении. Это подмножество является инвариантным относительно β векторным подрасслоением с размерностью слоя $m\left(\tau\right)$. Проектор на это подрасслоение является оператором умножения на непрерывную проекторно-значную матрицу-функцию, которая может быть построена в виде явно заданного ряда.

Множеством асимптотической устойчивости для β на $\pm\infty$ будем называть подмножество $E^{\pm}\subset E$, состоящее из пар $\left(x,\xi\right)\in E$, для которых $\lim\left\|\beta^{n}\left(x,\xi\right)\right\|<1$ при $n\to\pm\infty$.

Искомое векториальное подмножество V_x^{+} должно принадлежать E^{+}, а векториальное подмножество V_x^{-} должно принадлежать E^{-}. Также очевидно, что в неподвижных точках должно быть $V^{\pm}=E^{\pm}$.

Основная сложность построения связана с тем, что множество E^{+} является векториальным, но не является устойчивым, а максимальное устойчивое подмножество, т.е. подмножество вида

$$S(C,\gamma)=\left\{\left(x,\xi\right)\in E^{+}:\left\|\beta^{k}\left(x,\xi\right)\right\|\le C\gamma^{k}\left\|\left(x,\xi\right)\right\|,k\ge 0\right\},$$

где $C>0$ и $\gamma<1$, не является векториальным. В [7] показано, что если векториальное подмножество содержится в $S(C,\gamma)$, то в окрестности неподвижной точки τ_j размерность слоя не превосходит числа $m(\tau_j)$. При подходящем выборе $C>0$ и $\gamma<1$ множество $S(C,\gamma)$ содержит хотя бы одно векториальное подмножество, достаточно большое в том смысле, что в окрестности каждой неподвижной точки τ_j размерность слоя есть $m(\tau_j)$.

3. Условия правосторонней обратимости

Теорема 3. [8] *Пусть α – отображение типа Морса-Смейла. Оператор $B-I$ правосторонне обратим тогда и только тогда, когда для множеств асимптотической устойчивости $E^{\pm}$ выполнено условие трансверсальности:*

$$E_x = E_x^+ + E_x^- \text{ для всех } x \in X.$$

Будем говорить, что векторное расслоение E есть прямая сумма векториальных подмножеств (обозначаем $E=V^+ \oplus V^-$), если для каждого $x \in X$ выполнено $E_x = V_x{}^+ \oplus V_x{}^-$ и существует постоянная M, такая, что $\|p(x)\| \le M$ для всех $x \in X$, где $p(x)$ есть проектор на V_x^+ в слое E_x с ядром V_x^-. Если подмножества V_x^+ и V_x^- являются векторными подрасслоениями, то в силу компактности X условие ограниченности в совокупности норм проекторов $p(x)$ выполнено автоматически.

Теорема 4. [9] *Пусть B есть оператор взвешенного сдвига, порождённый произвольным обратимым отображением. Пусть существуют устойчивое в положительном направлении векториальное подмножество V^+ и устойчивое в отрицательном направлении векториальное подмножество V^-, такие, что*

$$E = V^+ \oplus V^-$$

и P есть проектор в $L_2\left(X,\mathbb{R}^m\right)$, порождённый этим отображением, действующий по правилу $Pu(x)=p(x)u(x)$. Тогда подпространство $\operatorname{Im} P$ инвариантно относительно B, подпространство $\operatorname{Im}(I-P)$ инвариантно относительно B^{-1} и формула (1) задаёт одну из правосторонних резольвент, определённую в некотором кольце, содержащем единичную окружность.

Отметим, что в рассматриваемом случае существует много правосторонних резольвент, им соответствуют различные операторы P и только некоторые из них есть проекторы, порожденные разложениями на устойчивые векториальные подмножества. Поэтому такие подмножества приходится строить непосредственно.

Построение устойчивых векториальных подмножеств для модельного класса отображений

В качестве X будем рассматривать d-мерный куб $X_d \subset R^d : X_d = \{(x_1,x_2,...,x_d) : 0 \le x_j \le 1\}$ и будем рассматривать отображения $\alpha : X \to X$, заданные формулой

$$\alpha(x_1,x_2,...,x_d) = (\psi(x_1),\psi(x_2),...,\psi(x_d)).$$

Особенности динамики рассматриваемых отображений заключаются в том, что эти отображения имеют конечное число неподвижных точек и для каждой точки из X (не являющейся неподвижной) траектория стремится к одной из неподвижных точек при $k \to +\infty$ и стремится к другой неподвижной точке при $k \to -\infty$.

При $d=1$ такие отображения имеют одну отталкивающую точку $\tau_0 = 0$ и одну притягивающую точку $\tau_1 = 1$ и не имеют седловых точек.

При $d=2$ такие отображения имеют четыре неподвижные точки: отталкивающую точку $\tau_0=(0,0)$, притягивающую точку $\tau_3=(1,1)$, и две седловые точки $\tau_1=(0,1)$ и $\tau_2=(1,0)$.

В общем случае d неподвижными точками являются вершины куба (их количество есть 2^d), при этом точка $\tau_0 = (0,0,...,0)$ - отталкивающая, точка $\tau_{2^d-1} = (1,1,...,1)$ - притягивающая, а остальные вершины являются седловыми точками.

Полученные ниже результаты могут быть перенесены на более широкий класс отображений с аналогичными динамическими свойствами, но в данной работе мы ограничимся рассмотрением указанных модельных классов.

Теорема 5. [9] *Пусть B есть оператор взвешенного сдвига, порожденный модельным отображением d-мерного куба, и выполнены условия трансверсальности*

$$E_x = E_x^+ + E_x^- \text{ для всех } x \in X.$$

Тогда могут быть построены устойчивое в положительном направлении векториальное подмножество V^+ и устойчивое в отрицательном направлении векториальное подмножество V^-, такие, что

$$E = V^+ \oplus V^-$$

и, следовательно, правосторонняя резольвента может быть построена по формуле

$$R_r(B;\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}(I-P) - \sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P.$$

В работе впервые при исследовании операторов взвешенного сдвига использованы векториальные подмножества. Это является новым подходом, так как решение рассматриваемых задач не может быть получено с использованием только векторных подрасслоений, традиционно рассматриваемых в этой тематике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антоневич, А.Б. Линейные функциональные уравнения: операторный подход / А.Б. Антоневич. – Минск : Университетское, 1988. – 231 с.
2. Бронштейн, И.У. Неавтономные динамические системы / И.У. Бронштейн. – Кишинев : Штиинца, 1984. – 290 с.
3. Каток, А.Б. Введение в современную теорию динамических систем / А.Б. Каток, Б. Хасселблат. – Москва : Факториал, 1999. – 765 с.
4. Антоневич, А.Б. Когерентная локальная гиперболичность линейного расширения / А.Б. Антоневич // Функц. анализ и его прил., 2005. – Т. 39, вып.1. – С. 52–69.
5. Antonevich, A.B. Right-Side Hyperbolic Operators / A.B. Antonevich, E.V. Panteleeva // Scientific Publications of the State University of Novi Pazar. Ser. A, Applied Mathematics, Informatics and Mechanics. – 2014. – № 1. – С. 1–9.
6. Karlovich, Yu.I. One -sided invertibility of functional operator with non-Carleman shift in Hölder spaces / Yu.I. Karlovich, R. Mardiev // Sovet Math. (Iz.VUZ), 1987. – 31 (3). – С. 106–110.
7. Пантелеева, Е.В. Локальные свойства подмножеств, устойчивых относительно линейного расширения / Е.В. Пантелеева // Труды института математики. – 2013. – №2 (21). – С. 142–153.
8. Антоневич, А.Б. Правосторонние резольвенты дискретных операторов взвешенного сдвига с матричными весами / А.Б. Антоневич, Е.В. Пантелеева // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – №3 (16). – С. 45–54.
9. Антоневич, А.Б. Правосторонняя гиперболичность операторов, порождённых отображениями типа Морса-Смейла / А.Б. Антоневич, Е.В. Пантелеева // Вестник ГрГУ им. Я.Купалы. Сер. 2, Матем. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. – 2014. – №1 (170). – С. 65–72.

E.V. Panteleeva **Spectral Properties of Weighted Shift Operators Generated by a Morse-Type Display Smail in Spaces of Vector-Valued Functions**

Weighted shift operators B in the space of vector-functions on a set X generated by mapping $\alpha : X \to X$ are considered. Condition of right-side invertibility for operators $B - \lambda I$ was obtained earlier for a special class of mappings having only attracting and repelling fixed points. The goal of the paper is to obtain necessary and sufficient conditions of right-side invertibility of $B - \lambda I$ and to construct the right-side resolvent for more large class of mappings, i.e. Morse-Smail type mappings. These mapping have saddle points and its dynamics is more complicated. Invertibility conditions of $B - \lambda I$ are known and can be formulated as existence of decomposition into sum of vector subbundles, stable and unstable with respect to a linear extension associated with operator. The main result of this paper is the claim that if use vectorial subsets the conditions of the right-side invertibility can be written in the similar form. Moreover by seeing this decomposition we construct a right-side resolvent for B.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 18.11.2014