УДК 519.652+517.548.5

А.П. Худяков, Л.А. Янович

ЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ, ЗАДАННЫХ НА МНОЖЕСТВЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Рассматривается задача построения и исследования интерполяционных матричных многочленов лагранжева типа невысоких степеней для операторов, заданных на множестве непрерывно дифференцируемых функциональных матриц. В рамках данного исследования построены новые алгебраические матричные многочлены второй и третьей степени, содержащие дифференциалы Гато интерполируемой функции, а также определен класс многочленов, относительно которых они точны. Данные интерполяционные формулы содержат значения функции не только в узлах интерполяции, но и в промежуточных матрицах. Применение одной из формул рассмотрено на конкретном примере.

При решении многих практических задач обычно используются интерполяционные формулы невысоких порядков. Это относится как к случаю интерполяции скалярных функций, так и к задаче операторного интерполирования и вызвано в значительной степени тем, что при увеличении порядка интерполяционных формул, значительно усложняется их общий вид, что приводит соответственно к более сложной структуре получаемых на их основе алгоритмов. Многие вопросы теории интерполирования операторов изложены в монографиях [1; 2].

Данная статья посвящена задаче построения и исследования алгебраических интерполяционных многочленов невысокого порядка для функций, заданных на множестве функциональных матриц.

Случай двух узлов. Рассмотрим пространство $C^m[T]$ квадратных матриц $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]$, для которых производная $A^{(m)}(t)=\left[a_{ij}^{(m)}(t)\right]$ порядка m непрерывна на отрезке $[a, b]$ и матричный многочлен первой степени вида

$$\mathrm{P}_1(A)=B+\sum_{j=0}^{n}A(t_j)C_j+\sum_{k=0}^{m}\int_T A^{(k)}(s)P_k(t,s)ds, \tag{1}$$

где $t_0, t_1, ..., t_n$ – фиксированные точки отрезка $T=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, $B=B(t)$, $C_j=C_j(t)$ $\left(j=\overline{0,n}\right)$, $P_k(t,s)$ $\left(k=\overline{0,m}\right)$ – заданные матрицы той же размерности, что и матрица $A(t)$. Пусть $F(A)$ – заданная на $C^m[T]$ функция матричного аргумента A. Имеет место следующая

Теорема 1. *Для формулы*

$$L_1(A)=F(A_0)+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left[A(t_i)-A_0(t_i)\right]\left[A_1(t_i)-A_0(t_i)\right]^{-1}\left[F(\sigma_{1i})-F(A_0)\right]+$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1\delta F[\sigma_{1i}(\cdot)+\tau\left(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot)\right);H_i(\cdot)]d\tau, \tag{2}$$

где $A_0 = A_0(t),\ \ A_1 = A_1(t)$ *– узлы интерполирования,*

$$\sigma_{1i}(t) = A_0(t) + A_1(t_i) - A_0(t_i), \tag{3}$$

$$H_i(t) = A(t) - A_0(t) - A(t_i) + A_0(t_i), \tag{4}$$

выполняются условия

$$L_1(A_i) = F(A_i)\ \ (i = 0{,}1), \tag{5}$$

и она точна для матричных многочленов вида (1).

Доказательство. Покажем, что матричный многочлен (2) удовлетворяет интерполяционным условиям (5). Равенство $L_1(A_0) = F(A_0)$ имеет место, так как второе и третье слагаемые в правой части (2) обращаются в нуль. Так как $L_1(A)$ при $A = A_1$ принимает вид

$$L_1(A_1) = F(A_0) + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left[F(\sigma_{1i}) - F(A_0)\right] +$$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau\big(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)\big); A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)]d\tau,$$

то, учитывая, что $\delta F[x+\tau h; h] = \dfrac{d}{d\tau}F[x+\tau h],$ получим

$$L_1(A_1) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}F(\sigma_{1i}) + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1 \frac{d}{d\tau}F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau\big(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)\big)]d\tau = F(A_1).$$

Докажем инвариантность формулы (2) относительно многочленов вида (1). Проведем доказательство для каждой из трех групп слагаемых в (1).

Очевидно, что $L_1(A) = F(A)$ для $F(A) = B.$

Пусть $F(A) = \sum_{j=0}^{n} A(t_j)C_j$. Так как $F(\sigma_{1i}) - F(A_0) = \left[A_1(t_i) - A_0(t_i)\right]\sum_{j=0}^{n} C_j,$

а $\delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau\big(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)\big); H_i(\cdot)] = \sum_{j=0}^{n}\big(A(t_j) - A_0(t_j) - A(t_i) + A_0(t_i)\big)C_j,$

то после несложных вычислений получим

$$L_1(A) = \sum_{j=0}^{n} A_0(t_j)C_j + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left[A(t_i) - A_0(t_i)\right]\sum_{j=0}^{n} C_j +$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\big(A(t_j) - A_0(t_j) - A(t_i) + A_0(t_i)\big)C_j = \sum_{j=0}^{n} A(t_j)C_j \equiv F(A).$$

Пусть $F(A)=\sum\limits_{k=0}^{m}\int\limits_{T}A^{(k)}(s)P_k(t,s)ds.$ Так как для $k\geq 1$ $\sigma_{1i}^{(k)}(s)=A_0^{(k)}(s),$ а $H_i^{(k)}(s)=A^{(k)}(s)-A_0^{(k)}(s),$ то будем иметь $F(\sigma_{1i})-F(A_0)=\left[A_1(t_i)-A_0(t_i)\right]\int\limits_{T}P_0(t,s)ds,$

$$\delta F[\sigma_{1i}(\cdot)+\tau\left(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot)\right);H_i(\cdot)]=$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\int_{T}\left(A^{(k)}(s)-A_0^{(k)}(s)\right)P_k(t,s)ds-\left[A(t_i)-A_0(t_i)\right]\int_{T}P_0(t,s)ds.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (2), после некоторых преобразований будем иметь $L_1(A)=\sum\limits_{k=0}^{m}\int\limits_{T}A^{(k)}(s)P_k(t,s)ds\equiv F(A).$

В силу линейного вхождения в формулу (2) функции $F(A)$ данная формула точна также для многочленов вида (1). Теорема 1 доказана.

Случай данной формулы при $n=0$ рассмотрен в [1].

В частности, если узлы интерполирования A_i имеют вид $A_i=H+\alpha_i I,$ где $H=H(t)$ – фиксированная матрица, $\alpha_i=\alpha_i(t)$ $\left(i=0,1\right)$ – заданные числовые функции, причем $\alpha_0(t_i)\neq\alpha_1(t_i)$ $\left(i=\overline{0,n}\right),$ I – единичная матрица, то формула (2) примет вид

$$L_1(A)=F(A_0)+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\frac{A(t_i)-A_0(t_i)}{\alpha_1(t_i)-\alpha_0(t_i)}\left[F(\sigma_{1i})-F(A_0)\right]+$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_{0}^{1}\delta F[\sigma_{1i}(\cdot)+\tau\left(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot)\right);H_i(\cdot)]d\tau,$$

где $\sigma_{1i}(t)=A_0(t)+\left(\alpha_1(t_i)-\alpha_0(t_i)\right)I=H(t)+\left(\alpha_0(t)+\alpha_1(t_i)-\alpha_0(t_i)\right)I,$ $H_i(t)=A(t)-A(t_i)-$ $-H(t)+H(t_i)-\left(\alpha_0(t)-\alpha_0(t_i)\right)I.$

Случай трех узлов. Построим аналогичную формулу второго порядка. Рассмотрим матричные многочлены первой и второй степени вида

$$\widetilde{\mathrm{P}}_1(A)=B+\sum_{j_1,j_2=0}^{n}C_{j_1j_2}\left[A(t_{j_1})-A(t_{j_2})\right]D_{j_1j_2}+$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\int_{T^2}P_k(t,s_1,s_2)\left[A^{(k)}(s_1)-A^{(k)}(s_2)\right]Q_k(t,s_1,s_2)ds_1ds_2; \qquad (6)$$

$$\widetilde{\mathrm{P}}_2(A)=\widetilde{\mathrm{P}}_1(A)+\sum_{j=0}^{n}C_{3,j}\left[A(t_{j_1})-A(t_{j_2})\right]C_{4,j}\left[A(t_{j_3})-A(t_{j_4})\right]C_{5,j}+$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\int_{T^4}P_{k,3}(t,s)\left[A^{(k)}(s_1)-A^{(k)}(s_2)\right]P_{k,4}(t,s)\left[A^{(k)}(s_3)-A^{(k)}(s_4)\right]P_{k,5}(t,s)ds, \qquad (7)$$

где $t_0, t_1, ..., t_n$ – те же фиксированные точки отрезка $T=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, $B=B(t)$, $C_{j_1 j_2}=C_{j_1 j_2}(t)$, $D_{j_1 j_2}=D_{j_1 j_2}(t)$, $C_{i,j}=C_{i,j}(t)$ $(i=3,4,5)$, $\left(j, j_1, j_2, j_3, j_4=\overline{0,n}\right)$ – заданные фиксированные матрицы, $P_k(t,s_1,s_2)$, $Q_k(t,s_1,s_2)$, $P_{k,i}(t,s)$ $(i=3,4,5)$, $\left(k=\overline{0,m}\right)$ – также заданные матрицы той же размерности, что и $A(t)$, а $s=(s_1,s_2,s_3,s_4)$, $ds=ds_1 ds_2 ds_3 ds_4$.

Заметим, что формула (2) инвариантна также относительно многочленов вида (6). Действительно, очевидно, что $\sigma_{1i}(t_{j_1})-\sigma_{1i}(t_{j_2})=A_0(t_{j_1})-A_0(t_{j_2})$ и $\sigma_{1i}^{(k)}(s_1)-\sigma_{1i}^{(k)}(s_2)=A_0^{(k)}(s_1)-A_0^{(k)}(s_2)$, поэтому для

$$F(A)=\sum_{j_1,j_2=0}^{n}C_{j_1 j_2}\left[A(t_{j_1})-A(t_{j_2})\right]D_{j_1 j_2} \qquad (8)$$

и

$$F(A)=\sum_{k=0}^{m}\int_{T^2}P_k(t,s_1,s_2)\left[A^{(k)}(s_1)-A^{(k)}(s_2)\right]Q_k(t,s_1,s_2)ds_1 ds_2, \qquad (9)$$

при $i=0,1,\dots,n$ справедливы равенства $F(\sigma_{1i})-F(A_0)=0$.

Для функций (8), (9) и любых матриц $A(t)$ и $H(t)$ из пространства $C^m[T]$ по определению дифференциала Гато справедливы, соответственно, равенства

$$\delta F[A(\cdot);H(\cdot)]=\sum_{j_1,j_2=0}^{n}C_{j_1 j_2}\left[H(t_{j_1})-H(t_{j_2})\right]D_{j_1 j_2}, \qquad (10)$$

$$\delta F[A(\cdot);H(\cdot)]=\sum_{k=0}^{m}\int_{T^2}P_k(t,s_1,s_2)\left[H^{(k)}(s_1)-H^{(k)}(s_2)\right]Q_k(t,s_1,s_2)ds_1 ds_2. \qquad (11)$$

Из (10) и (11) при $A(t)=\sigma_{1i}(t)+\tau\left(A_1(t)-\sigma_{1i}(t)\right)$ и $H(t)=H_i(t)$ для функций (8), (9) будем иметь $\delta F[\sigma_{1i}(\cdot)+\tau\left(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot)\right);H_i(\cdot)]=F(A)-F(A_0)$. Следовательно, $L_1(A)\equiv F(A)$ при $F(A)=\widetilde{\mathrm{P}}_1(A)$, т.е. формула (2) точна также и для многочленов первой степени вида (6).

Пусть $F(A)$ – функция от матриц, где $A\in C^m[a,b]$. Введем следующие обозначения

$$l_{21}(A)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[A(t_i)-A_1(t_i)][A(t_i)-A_0(t_i)][A_2(t_i)-A_0(t_i)]^{-1}\left([A_1(t_i)-A_2(t_i)]^{-1}\times\right.$$

$$\left.\times\left[F(\sigma_{1i}^{21})-F(A_2)\right]+[A_0(t_i)-A_1(t_i)]^{-1}\left[F(\sigma_{1i}^{01})-F(A_0)\right]\right), \quad l_{22}(A)=$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1\int_0^1\tau\delta^2 F\left[\sigma_{1i}^{01}(\cdot)+\tau\left(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}^{01}(\cdot)\right)+\tau s\left(A_2(\cdot)-\sigma_{1i}^{12}(\cdot)\right);H_{i1}(\cdot)H_{i0}(\cdot)\right]d\tau ds, \qquad (12)$$

где $\sigma_{1i}^{01}(t)=\sigma_{1i}(t)$, $\sigma_{1i}^{12}(t)=A_1(t)+A_2(t_i)-A_1(t_i)$, $\sigma_{1i}^{21}(t)=A_2(t)+A_1(t_i)-A_2(t_i)$, $H_{i0}(t)=H_i(t)$, $H_{i1}(t)=A(t)-A_1(t)-A(t_i)+A_1(t_i)$, а функции $\sigma_{1i}(t)$ и $H_i(t)$, как и раньше, задаются формулами (3), (4). Имеет место

Теорема 2. *Если существуют матрицы* $[A_1(t_i)-A_0(t_i)]^{-1}$, $[A_2(t_i)-A_0(t_i)]^{-1}$, $[A_1(t_i)-A_2(t_i)]^{-1}$ $\left(i=\overline{0,n}\right)$, *то для формулы*

$$L_2(A)=L_1(A)+l_{21}(A)+l_{22}(A), \tag{13}$$

где $A_i=A_i(t)$ $\left(i=\overline{0,2}\right)$ *– узлы интерполирования,* $L_1(A)$ *– многочлен, определенный формулой* (2)*, выполняются условия*

$$L_2(A_i)=F(A_i)\ \left(i=\overline{0,2}\right), \tag{14}$$

и она инвариантна относительно матричных многочленов вида (7).

Доказательство. Так как $l_{21}(A_0)=l_{21}(A_1)=0$, $H_{i0}(t)=0$ при $A=A_0$, $H_{i1}(t)=0$ при $A=A_1$, то с учетом (5) имеем, что $L_2(A_i)=F(A_i)$ $(i=0,1)$. Проверим далее выполнение условия $L_2(A_2)=F(A_2)$. Введем обозначения

$$l_{11}(A)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[A(t_i)-A_0(t_i)][A_1(t_i)-A_0(t_i)]^{-1}[F(\sigma_{1i})-F(A_0)],$$

$$l_{12}(A)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1\delta F\left[\sigma_{1i}(\cdot)+\tau\left(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot)\right);H_i(\cdot)\right]d\tau. \tag{15}$$

Справедливо равенство

$$l_{11}(A_2)+l_{21}(A_2)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\Big([A_2(t_i)-A_1(t_i)+A_1(t_i)-A_0(t_i)][A_1(t_i)-A_0(t_i)]^{-1}\times$$

$$\times[F(\sigma_{1i})-F(A_0)]-F(\sigma_{1i}^{21})+F(A_2)+[A_2(t_i)-A_0(t_i)+A_0(t_i)-A_1(t_i)]\times$$

$$\times[A_0(t_i)-A_1(t_i)]^{-1}[F(\sigma_{1i})-F(A_0)]\Big)=F(A_2)-F(A_0)+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left[F(\sigma_{1i}^{01})-F(\sigma_{1i}^{21})\right].$$

При $A=A_2$ направления $H_{i0}(t)$ и $H_{i1}(t)$ примут вид $H_{i0}(t)=A_2(t)-\sigma_{1i}^{02}(t)$, $H_{i1}(t)=A_2(t)-\sigma_{1i}^{12}(t)$, где $\sigma_{1i}^{02}(t)=A_0(t)+A_2(t_i)-A_0(t_i)$, поэтому, используя формулу $\delta F[\tilde{A}+s\tau\tilde{H};\tilde{H}]=\frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial s}F[\tilde{A}+s\tau\tilde{H}]$ при $\tilde{A}=\sigma_{1i}^{01}(\cdot)+\tau\left(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}^{01}(\cdot)\right)$ и $\tilde{H}=A_2(\cdot)-\sigma_{1i}^{12}(\cdot)$, будем иметь

$$l_{22}(A_2)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1\int_0^1\frac{\partial}{\partial s}\delta F\left[\sigma_{1i}^{01}(\cdot)+\tau\left(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}^{01}(\cdot)\right)+\tau s\left(A_2(\cdot)-\sigma_{1i}^{12}(\cdot)\right);\ A_2(\cdot)-\right.$$

$$-\sigma_{1i}^{02}(\cdot)\Big]d\tau ds=-l_{12}(A_2)+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1 \delta F\Big[\sigma_{1i}^{01}(\cdot)+\tau\Big(A_2(\cdot)-\sigma_{1i}^{02}(\cdot)\Big);A_2(\cdot)-\sigma_{1i}^{02}(\cdot)\Big]d\tau.$$

Аналогично, пользуясь соотношением $\delta F[\tilde{A}+\tau\tilde{H};\tilde{H}]=\frac{d}{d\tau}F[\tilde{A}+\tau\tilde{H}]$ при $\tilde{A}=\sigma_{1i}^{01}(\cdot)$ и $\tilde{H}=A_2(\cdot)-\sigma_{1i}^{02}(\cdot)$, получим $l_{22}(A_2)=-l_{12}(A_2)+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\Big[F(\sigma_{1i}^{21})-F(\sigma_{1i}^{01})\Big].$
Тогда $L_2(A_2)=F(A_0)+l_{11}(A_2)+l_{12}(A_2)+l_{21}(A_2)+l_{22}(A_2)=F(A_2).$

Таким образом, интерполяционные условия (14) выполняются.

Покажем, что формула (13) точна для многочленов вида (7). Пусть $F(A)=\tilde{\mathrm{P}}_1(A).$ Тогда, как показано было раньше, $L_1(A)\equiv\tilde{\mathrm{P}}_1(A).$ Так как $\sigma_{1i}^{01}(t_{j_1})-\sigma_{1i}^{01}(t_{j_2})=A_0(t_{j_1})-A_0(t_{j_2})$ и $\frac{d^k}{dt^k}\left\{\sigma_{1i}^{01}(t)\right\}\Big|_{t=s_1}-\frac{d^k}{dt^k}\left\{\sigma_{1i}^{01}(t)\right\}\Big|_{t=s_2}=A_0^{(k)}(s_1)-$ $-A_0^{(k)}(s_2)$, то $F(\sigma_{1i}^{01})-F(A_0)=0$ для $F(A)=\tilde{\mathrm{P}}_1(A).$ Аналогично можно показать, что $F(\sigma_{1i}^{21})-F(A_2)=0.$ Следовательно $l_{21}(A)=0.$

Для любых квадратных функциональных матриц $\tilde{A}$, $\tilde{H}_1$, $\tilde{H}_2$ соответствующего порядка и любой матричной функции $F(A)$, дважды дифференцируемой по Гато в точке $\tilde{A}$, выполняется соотношение

$$\delta^2F[\tilde{A};\tilde{H}_2\tilde{H}_1]=\lim_{\lambda_1,\lambda_2\to 0}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\Big(F[\tilde{A}+\lambda_1\tilde{H}_1+\lambda_2\tilde{H}_2]-$$

$$-F[\tilde{A}+\lambda_1\tilde{H}_1]-F[\tilde{A}+\lambda_2\tilde{H}_2]+F[\tilde{A}]\Big). \tag{16}$$

Тогда из (16) при $F(A)=\tilde{\mathrm{P}}_1(A)$ после несложных преобразований будем иметь $\delta^2\tilde{\mathrm{P}}_1[\tilde{A};\tilde{H}_2\tilde{H}_1]\equiv 0.$ Таким образом, $l_{22}(A)=0,$ и значит $L_2(A)\equiv\tilde{\mathrm{P}}_1(A)=F(A).$

Введем в рассмотрение функцию двух матричных переменных

$$\Phi(A,B)=\sum_{j=0}^{n}C_{3,j}\Big[A(t_{j_1})-A(t_{j_2})\Big]C_{4,j}\Big[B(t_{j_3})-B(t_{j_4})\Big]C_{5,j}.$$

Очевидно, что функция $\Phi(A,B)$ обладает свойствами

$$\Phi(A+B,D)=\Phi(A,D)+\Phi(B,D),\quad \Phi(A,B+D)=\Phi(A,B)+\Phi(A,D),$$

$$\Phi(\lambda A,B)=\Phi(A,\lambda B)=\lambda\Phi(A,B),\quad A,B,D\in C^m[a,b],\ \lambda\in R. \tag{17}$$

Пусть $F(A)=\Phi(A,A),$ что совпадает со вторым слагаемым в (7). В силу того, что $\sigma_{1i}^{01}(t_{j_k})-\sigma_{1i}^{01}(t_{j_{k+1}})=A_0(t_{j_k})-A_0(t_{j_{k+1}})$ $(k=1,3),$ для этой функции справедливо равенство $F(\sigma_{1i}^{01})-F(A_0)=0.$ Аналогично показывается, что $F(\sigma_{1i}^{21})-F(A_2)=0.$ Таким образом, учитывая, что $\sigma_{1i}^{01}(t)=\sigma_{1i}(t),$ будем иметь

$$l_{11}(A) = l_{21}(A) = 0. \tag{18}$$

Используя определение дифференциала Гато первого порядка и свойства (17) функции $\Phi(A, B)$, которыми, в частности, обладает и $F(A) = \Phi(A, A)$, получим

$$\delta F[\tilde{A}; \tilde{H}] = \Phi(\tilde{A}, \tilde{H}) + \Phi(\tilde{H}, \tilde{A}). \tag{19}$$

Нетрудно показать, что выполняются равенства

$$\Phi\big(\sigma_{1i}(\cdot), H_i(\cdot)\big) = \Phi\big(A_0(\cdot), A(\cdot) - A_0(\cdot)\big); \quad \Phi\big(H_i(\cdot), \sigma_{1i}(\cdot)\big) = \Phi\big(A(\cdot) - A_0(\cdot), A_0(\cdot)\big);$$

$$\Phi\big(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot), H_i(\cdot)\big) = \Phi\big(A_1(\cdot) - A_0(\cdot), A(\cdot) - A_0(\cdot)\big); \tag{20}$$

$$\Phi\big(H_i(\cdot), A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)\big) = \Phi\big(A(\cdot) - A_0(\cdot), A_1(\cdot) - A_0(\cdot)\big).$$

Тогда из (19) при $\tilde{A} = \sigma_{1i}(\cdot) + \tau\big(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)\big)$, $\tilde{H} = H_i(\cdot)$ и (20), учитывая свойства (17), будем иметь

$$\delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau\big(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)\big); H_i(\cdot)] = \Phi\big(\sigma_{1i}(\cdot), H_i(\cdot)\big) + \Phi\big(H_i(\cdot), \sigma_{1i}(\cdot)\big) +$$

$$+ \tau\big[\Phi\big(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot), H_i(\cdot)\big) + \Phi\big(H_i(\cdot), A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)\big)\big] = \Phi\big(A_0(\cdot), A(\cdot) - A_0(\cdot)\big) +$$

$$+ \Phi\big(A(\cdot) - A_0(\cdot), A_0(\cdot)\big) + \tau\big[\Phi\big(A_1(\cdot) - A_0(\cdot), A(\cdot) - A_0(\cdot)\big) + \Phi\big(A(\cdot) - A_0(\cdot), A_1(\cdot) - A_0(\cdot)\big)\big].$$

Таким образом, вычисляя интеграл в (15) и проводя преобразования, получим

$$l_{12}(A) = \frac{1}{2}\big(\Phi(A_0, A) - 2\Phi(A_0, A_0) + \Phi(A_1, A) -$$

$$- \Phi(A_1, A_0) + \Phi(A, A_0) + \Phi(A, A_1) - \Phi(A_0, A_1)\big). \tag{21}$$

При $F(A) = \Phi(A, A)$ равенство (16) принимает вид $\delta^2 F[\tilde{A}; \tilde{H}_2 \tilde{H}_1] = \Phi(\tilde{H}_1, \tilde{H}_2) + \Phi(\tilde{H}_2, \tilde{H}_1)$. В частности, при $\tilde{A} = \sigma_{1i}^{01}(\cdot) + \tau\Big(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}^{01}(\cdot)\Big) + \tau s\Big(A_2(\cdot) - \sigma_{1i}^{12}(\cdot)\Big)$, $\tilde{H}_1 = H_{i0}(\cdot)$ и $\tilde{H}_2 = H_{i1}(\cdot)$ будем иметь

$$\delta^2 F\Big[\sigma_{1i}^{01}(\cdot) + \tau\Big(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}^{01}(\cdot)\Big) + \tau s\Big(A_2(\cdot) - \sigma_{1i}^{12}(\cdot)\Big); H_{i1}(\cdot) H_{i0}(\cdot)\Big] = \Phi\big(H_{i0}(\cdot), H_{i1}(\cdot)\big) +$$

$$+ \Phi\big(H_{i1}(\cdot), H_{i0}(\cdot)\big) = \Phi\big(A(\cdot) - A_0(\cdot), A(\cdot) - A_1(\cdot)\big) + \Phi\big(A(\cdot) - A_1(\cdot), A(\cdot) - A_0(\cdot)\big).$$

Аналогично предыдущему, вычисляя интеграл в (12), после преобразований будем иметь

$$l_{22}(A) = \frac{1}{2}\big(2\Phi(A, A) - \Phi(A_0, A) - \Phi(A, A_1) +$$

$$+ \Phi(A_0, A_1) - \Phi(A_1, A) - \Phi(A, A_0) + \Phi(A_1, A_0)\big). \tag{22}$$

Так как $L_1(A) = F(A_0) + l_{11}(A) + l_{12}(A)$, то из равенств (13), (18), (21), (22) следует, что

$$L_2(A)=F(A_0)+\Phi(A,A)-\Phi(A_0,A_0)=F(A). \qquad (23)$$

Переобозначим функцию $\Phi(A,B)$ следующим образом

$$\Phi(A,B)=\sum_{k=0}^{m}\int_{T^4}P_{k,3}(t,s)\left[A^{(k)}(s_1)-A^{(k)}(s_2)\right]P_{k,4}(t,s)\left[B^{(k)}(s_3)-B^{(k)}(s_4)\right]P_{k,5}(t,s)ds.$$

Пусть $F(A)=\Phi(A,A)$, что совпадает с третьим слагаемым в (7). Аналогично предыдущим рассуждениям можно показать, что $F(\sigma_{1i}^{01})-F(A_0)=F(\sigma_{1i}^{21})-F(A_2)=0$, следовательно $l_{11}(A)=l_{21}(A)=0$. Очевидно, что переобозначенная функция $\Phi(A,B)$ также удовлетворяет свойствам (17) и соотношениям вида (20), поэтому для $F(A)=\Phi(A,A)$ выполняются равенства (19), (21), (22) и следовательно, (23). Таким образом, формула (13) точна для многочленов вида (7). Теорема 2 доказана.

Пример. Рассмотрим интерполяционную формулу (2) в случае узлов

$$A_0(t)=\begin{bmatrix} t & t^2\\ t^2 & t^3\end{bmatrix},\quad A_1(t)=\begin{bmatrix} -t^3+\alpha & t^2+\beta\\ t^2+\gamma & -t+\delta\end{bmatrix}$$

для функции $F(A)=e^{A(t)}$, заданной на множестве матриц вида $A(t)=\theta A_0(t)+(1-\theta)A_1(t)$, $\theta\in\mathbb{R}$. Здесь $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ – произвольные числа.

Нетрудно заметить, что при $A(t)=\theta A_0(t)+(1-\theta)A_1(t)$ матрицы $\sigma_{1i}(t)+\tau\left(A_1(t)-\sigma_{1i}(t)\right)$ и $H_i(t)$ являются перестановочными, поэтому для $F(A)=e^{A(t)}$ справедливы равенства $\delta F[\sigma_{1i}(\cdot)+\tau\left(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot)\right);H_i(\cdot)]=H_i(t)e^{\sigma_{1i}(t)+\tau\left(A_1(t)-\sigma_{1i}(t)\right)}$.

Кроме того, так как матрицы $A_1(t)-\sigma_{1i}(t)=\left(t_i+t_i^3-t-t^3\right)I$, где I – единичная матрица второго порядка, являются скалярными, то имеют место соотношения $e^{\sigma_{1i}(t)+\tau\left(A_1(t)-\sigma_{1i}(t)\right)}=e^{(t_i+t_i^3-t-t^3)\tau}e^{\sigma_{1i}(t)}$. Следовательно

$$\int_0^1\delta F[\sigma_{1i}(\cdot)+\tau\left(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot)\right);H_i(\cdot)]d\tau=\int_0^1 e^{(t_i+t_i^3-t-t^3)\tau}d\tau\, H_i(t)e^{\sigma_{1i}(t)}=$$

$$=\frac{1-e^{t_i+t_i^3-t-t^3}}{t+t^3-t_i-t_i^3}\left(A(t)-A(t_i)+A_0(t_i)-A_0(t)\right)e^{\sigma_{1i}(t)}.$$

Тогда, сделав замену $\alpha_i(t)=\dfrac{1-e^{t_i+t_i^3-t-t^3}}{t+t^3-t_i-t_i^3}$, будем иметь

$$L_1(A)=e^{A_0(t)}+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[A(t_i)-A_0(t_i)][A_1(t_i)-A_0(t_i)]^{-1}\left[e^{\sigma_{1i}(t)}-e^{A_0(t)}\right]+\frac{1}{n+1}\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(t)\left(A(t)-A(t_i)+A_0(t_i)-A_0(t)\right)e^{\sigma_{1i}(t)}=A(t)B(t)+\sum_{i=0}^{n}A(t_i)B_i(t)+C(t), \qquad (24)$$

где $B(t)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(t)e^{\sigma_{1i}(t)}$, $B_i(t)=\frac{1}{n+1}\Big([A_1(t_i)-A_0(t_i)]^{-1}\Big[e^{\sigma_{1i}(t)}-e^{A_0(t)}\Big]-\alpha_i(t)e^{\sigma_{1i}(t)}\Big)$,

$$C(t)=e^{A_0(t)}-\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\Big(A_0(t_i)[A_1(t_i)-A_0(t_i)]^{-1}\Big[e^{\sigma_{1i}(t)}-e^{A_0(t)}\Big]+\alpha_i(t)(A_0(t)-A_0(t_i))e^{\sigma_{1i}(t)}\Big).$$

Проверим выполнение интерполяционных условий для формулы (24). При $A=A_0(t)$ получим $L_1(A_0)=A_0(t)B(t)+\sum_{i=0}^{n}A_0(t_i)B_i(t)+C(t)=e^{A_0(t)}=F(A_0)$, а при $A=A_1(t)$ будем иметь

$$L_1(A_1)=A_1(t)B(t)+\sum_{i=0}^{n}A_1(t_i)B_i(t)+C(t)=e^{A_0(t)}+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\Big(\alpha_i(t)[A_1(t)-A_0(t)+A_0(t_i)-$$

$$-A_1(t_i)]e^{\sigma_{1i}(t)}+[A_1(t_i)-A_0(t_i)][A_1(t_i)-A_0(t_i)]^{-1}\Big[e^{\sigma_{1i}(t)}-e^{A_0(t)}\Big]\Big).$$

Далее, так как $\alpha_i(t)[A_1(t)-A_0(t)+A_0(t_i)-A_1(t_i)]=\left(e^{t_i+t_i^3-t-t^3}-1\right)I=e^{A_1(t)-\sigma_{1i}(t)}-I$, то $L_1(A_1)=e^{A_0(t)}+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\Big[e^{A_1(t)}-e^{\sigma_{1i}(t)}+e^{\sigma_{1i}(t)}-e^{A_0(t)}\Big]=e^{A_1(t)}=F(A_1)$. Таким образом, интерполяционные условия выполняются.

Ряд других интерполяционных формул для функций от матриц получен также в [3–8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Makarov, Volodymyr L. Methods of Operator Interpolation / Volodymyr L. Makarov, Volodymyr V. Khlobystov, Leonid A. Yanovich. – К. : Праці Ін-ту математики НАН України, 2010. – Т. 83. – 517 с.
2. Макаров, В.Л. Интерполирование операторов / В.Л. Макаров, В.В. Хлобыстов, Л.А. Янович. – К. : Наукова думка, 2000. – 407 с.
3. Янович, Л.А. Интерполяционные формулы первых и вторых порядков для функций матричного аргумента / Л.А. Янович, А.П. Худяков // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 16–22.
4. Yanovich, L.A. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables / L.A. Yanovich, A.P. Hudyakov // J. Numer. Appl. Math. – 2011. – № 2 (105). – P. 136–147.
5. Худяков, А.П. Обобщенные интерполяционные эрмитова типа многочлены для функций матричной переменной / А.П. Худяков, Л.А. Янович // Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси. – 2011. – Т. 19, № 2. – С. 103–114.
6. Yanovich, L.A. On matrix function interpolation / L.A. Yanovich, I.V. Romanovski // J. Numer. Appl. Math. – 2009. – № 1 (97). – P. 122–131.
7. Янович, Л.А. Интерполяционные формулы для функций многих матричных переменных / Л.А. Янович, Ю.В. Романовский // Зб. пр. Ін-ту матем. НАН України. – 2010. – Т. 7, № 1. – С. 365–379.
8. Янович, Л.А. Сходимость интерполирования по скалярным матричным узлам в классе аналитических функций / Л.А. Янович, А.В. Тарасевич // Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси. – 2006. – Т. 14. № 2. – С. 102–111.

A.P. Hudyakov, L.A. Yanovich **The Linear and Quadratic Algebraic Interpolation Polynomials for Operators, Defined on the Set of Functional Matrices**

The problem of construction and research of interpolation matrix polynomials Lagrange type of low degrees for operators defined on the set of continuously differentiable functional matrices is considered. In this study new algebraic matrix polynomials of the second and third degree, containing differentials Gateaux of interpolated function are constructed and the class of polynomials with respect to which they are exact is determined. The interpolation formulas contain the values of the functions not only in the nodes of interpolation, but in the intermediate matrices. The application one of the following formulas considered on the example.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 12.10.13