УДК 512.542

А.А. Трофимук

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ФИТТИНГОВЫМИ ФАКТОРАМИ СВОБОДНЫМИ ОТ КУБОВ

Получены оценки производной длины, нильпотентной длины и p-длины разрешимой группы G, у которой факторы цепочки $\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G)$ являются свободными от кубов. Здесь $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G, а $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G. В частности, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, нильпотентная длина группы G не превышает 4, а p-длина группы G не превышает 2 для любого простого p.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_m = G, \tag{1}$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех i. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются факторами нормального ряда (1).

Пусть n и m – натуральные числа. Говорят, что n свободно от m-х степеней, если p^m не делит n для всех простых p. При $m = 2$ говорят, что n свободно от квадратов, а при $m = 3$ – от кубов.

Несложно проверить, что если у группы G имеется нормальный ряд (1), факторы которого имеют порядки, свободные от квадратов, то из теоремы Цассенхауза [1, теорема IV.2.11] группа G сверхразрешима.

В работе [2] получены оценки инвариантов (производной длины, нильпотентной длины и p-длины) разрешимой группы, обладающей нормальным рядом, факторы которого имеют порядки, свободные от кубов.

Хорошо известен результат Бэра [1, с. 720], [3]:

Если в разрешимой группе G существует цепочка подгрупп

$$\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G) \tag{2}$$

такая, что G_i нормальна в G и $|G_{i+1}/G_i|$ является простым числом для всех i, то G сверхразрешима.

Здесь $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G, а $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G. Легко проверить, что группа останется сверхразрешимой, если факторы цепочки вида (2) будут свободны от квадратов.

Поэтому вполне естественно исследовать разрешимые группы, у которых факторы цепочки вида (2) имеют порядок, свободный от кубов. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть G – разрешимая группа. Предположим, что в G существует цепочка подгрупп вида* (2) *и факторы G_{i+1}/G_i имеют порядок, свободный от кубов, для всех i. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.*

2. $l_p(G) \le 2$ *для всех простых* p.

3. *Если группа G A_4-свободна, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 3.*

Здесь $l_p(G)$ – p-длина группы G. Напомним, что группа G называется A_4-свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе A_4.

1. Вспомогательные результаты

Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

Конкретные группы обозначаются следующим образом: 1 – единичная группа; Z_n и D_n – циклическая и диэдральная группы порядка n; A_n и S_n – знакопеременная и симметрическая группы степени n.

В доказательствах теоремы будут использоваться фрагменты теории формаций, см. [4, 5]. Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотетных и абелевых групп обозначают через $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно.

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Доказательство. Согласно [5, с. 36], произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация – эквивалентные понятия, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Лемма 2. Предположим, что в разрешимой группе G существует цепочка подгрупп вида (2) такая, что G_i нормальны в G и факторы G_{i+1}/G_i являются свободными от кубов для всех i. Тогда индексы максимальных подгрупп группы G, не содержащих подгруппу Фиттинга, являются простыми числами или квадратами простых чисел.

Доказательство. Уплотним участок ряда (2) между подгруппой Фраттини и подгруппой Фиттинга до главного следующим образом. Пусть $\overline{N} = N/G_i$ содержится в подгруппе $\overline{G_{i+1}} = G_{i+1}/G_i \le F(G)/G_i$ и является минимальной нормальной подгруппой фактор-группы $\overline{G} = G/G_i$. Так как $\overline{G}$ разрешима, то $\overline{N}$ – элементарная абелева p-подгруппа для некоторого простого $p \in \pi(G)$. Так как силовская p-подгруппа $(\overline{G_{i+1}})_p$ группы $\overline{G_{i+1}}$ свободна от кубов и $\overline{N}$ содержится в $(\overline{G_{i+1}})_p$, то $\overline{N}$ имеет порядок p или p^2. Заменяя в (2) отрезок $G_i \le G_{i+1}$ на $G_i \le N \le G_{i+1}$ и повторяя эту процедуру нужное число раз, в итоге уплотним участок ряда от подгруппы Фраттини до подгруппы Фиттинга до ряда, факторы которого имеют порядки p или q^2.

Итак, можно считать, что факторы ряда (2) имеют порядки p или q^2. Пусть M – максимальная подгруппа группы G, не содержащая подгруппу Фиттинга. Очевидно, что $\Phi(G) = G_0 \subseteq M$, а $G_m = F(G) \not\subseteq M$. Поэтому обязательно найдется такое i, что $G_i \subseteq M$, но $G_{i+1} \not\subseteq M$. Так как M – максимальная подгруппа группы G, то $G_{i+1}M = G$ и $|G:M| = \; =|G_{i+1}:G_{i+1} \cap M|$. Поскольку $G_i \subseteq G_{i+1} \cap M$, то

$$|G_{i+1}:G_{i+1} \cap M| = \frac{|G_{i+1}:G_i|}{|G_{i+1} \cap M:G_i|}$$

и $|G:M|$ является простым числом или квадратом простого числа.

Лемма 3. [6, лемма 12] Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(2,p)$. Тогда $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$.

Лемма 4. [6, лемма 13] Если H – разрешимая A_4-свободная подгруппа группы $GL(2,p)$, то H метабелева.

2. Доказательство теоремы

1. Вначале докажем, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. Воспользуемся индукцией по порядку G. Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$ и

$$\Phi(G/\Phi(G)) = G_0/\Phi(G) \subset G_1/\Phi(G) \subset \ldots \subset G_m/\Phi(G) = F(G/\Phi(G))$$

участок нормального ряда фактор-группы $G/\Phi(G)$. Очевидно, что $G_0 = \Phi(G)$, а по теореме III.4.2 [1] $G_m = F(G)$. Поэтому для произвольной подгруппы G_i, $i = \overline{0,m}$, верно, что $\Phi(G) \subseteq G_i \subseteq F(G)$. Поскольку

$$(G_{i+1}/\Phi(G))/(G_i/\Phi(G)) \cong G_{i+1}/G_i,$$

то $G/\Phi(G)$ удовлетворяет условиям теоремы. Так как по лемме 1 формация $\mathfrak{F}$ насыщенна, то $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\Phi(G) = 1$.

По теореме III.4.5 [1] подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп F_i группы G, где $1 \le i \le k$. Поэтому по теореме I.4.5 [1] для каждого F_i фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе группы автоморфизмов $Aut(F_i)$. По лемме I.9.6 [1] фактор-группа $G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i)$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп $G/C_G(F_i)$, $1 \le i \le k$. Так как в разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает со своим централизатором, то

$$\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i) = C_G(F) = F \quad \text{и} \; G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i) = G/F.$$

Пусть F_i – элементарная абелева p_i-подгруппа. Ясно, что для каждого i существует максимальная подгруппа M_i в группе G такая, что $G = [F_i]M_i$. Так как M_i не содержит F_i, то M_i не содержит F. Поэтому по лемме 2 порядок $|F_i|$ равен p_i, либо p_i^2, где p_i – простое число.

Поэтому возможны следующие варианты:

1) $Aut(F_i)$ изоморфна циклической группе порядка $p_i - 1$;

2) $Aut(F_i)$ изоморфна группе $GL(2, p_i)$;

В первом случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ циклическая. Поэтому $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$.

Во втором случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$ и по лемме 3 фактор-группа $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^4$.

Итак, мы доказали, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$. Поскольку $F/\Phi(G)$ – абелева фактор-группа и

$$(G/\Phi(G))/(F/\Phi(G)) \cong G/F,$$

то $G/\Phi(G) \in \mathfrak{U}^5$ и производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5. Так как $G \in \mathfrak{N}^4$, то нильпотентная длина G не превышает 4.

2. Учитывая тот факт, что p-длина метанильпотентной группы не превышает 1, из включения $G \in \mathfrak{N}^4$ следует, что $l_p(G) \le 2$ для любого простого p.

3. Пусть группа G является A_4-свободной, то, повторяя доказательство основной части теоремы и используя лемму 4, получим, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^2$ и $G/\Phi(G) \in \mathfrak{U}^3$. Поэтому производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 3. Теорема доказана.

Пример. Пусть S – экстраспециальная группа порядка 27. Полупрямое произведение $G=[S]GL(2,3)$ является разрешимой группой, у которой существует нормальный ряд вида (2) с факторами, свободными от кубов. Нильпотентная длина группы G равна 4, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ равна 5, 2-длина и 3-длина группы G равна 2. Значит, оценки, полученные в теореме, являются точными.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант № Ф13М-113).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert // Berlin, Heidelberg, New York. – 1967.

2. Монахов В.С. Конечные разрешимые группы с порядками факторов нормального ряда, свободного от кубов / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Вестник Брестского университета. Серия 4. Физика и математика. – 2010. –№1. – С. 118–126.

3. Baer R. Supersolvable immersion / R. Baer// Can. J. Math. – 1959. – № 11. – P. 353–369.

4. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов // Минск: Вышэйшая школа. – 2006. – 207 с.

5. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков // М: Наука. – 1978. – 272 с.

6. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сиб. матем. журн. – Т. 52, № 5. – 2011. – С. 1123–1137.

A.A. Trofimuk **Finite Groups with Cube-free Fitting Factors**

The estimations of the derived length, nilpotent length and p-length of solvable group G with cube-free factors of chain $\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G)$ are obtained. Here $\Phi(G)$ is the Frattini subgroup of G and $F(G)$ is the Fitting subgroup of G. In particular, the derived length of $G/\Phi(G)$ is at most 5, the nilpotent length of G is at most 4, the p-length of G is at most 2 for every prime p.

Рукапіс пастуміў у рэдакцыю 12.10.13