УДК 517.923

И.Н. Мельникова, Д.Ю. Куцин

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В настоящей работе найдены условия, с помощью которых можно выделить классы систем трех уравнений первого порядка, не имеющих решений с бесконечными компонентами. Эта проблема классификации не нова, однако, для такого вида систем еще далека от завершения. Рассматриваемый метод позволяет выписывать условия отсутствия подвижных особых точек в решениях таких систем и проверять их сравнительно легко на практике.

Рассмотрим систему вида

$$\frac{d\ {}_{i}x}{d\ z}=\frac{p_i(z)x_1^{p_{i1}}x_2^{p_{i2}}x_3^{p_{i3}}+P_i^1(x_1,x_2,x_3,z)}{q_i(z)x_1^{q_{i1}}x_2^{q_{i2}}x_3^{q_{i3}}+Q_i^1(x_1,x_2,x_3,z)}=\frac{P_i(x_1,x_2,x_3,z)}{Q_i(x_1,x_2,x_3,z)}, \tag{1}$$

где x_1,x_2,x_3,z − комплексные переменные, $P_i,Q_i (i=1,2,3)$ − полиномы относительно x_1,x_2,x_3, коэффициенты которых являются аналитическими функциями относительно z. Через p_{ij} и q_{ij} $(i=1,2,3,\ j=1,2,3)$ обозначены степени многочленов P_i и $Q_i (i=1,2,3)$ по x_1,x_2,x_3, не содержащиеся в $P^1{}_i$ и $Q^1{}_i (i=1,2,3)$. Изучим для нее условия существования решений со свойством

$$f_1(z)\to\infty,\qquad f_2(z)\to\infty,\qquad f_3(z)\to\infty\qquad \text{при } z\to z_0. \tag{2}$$

Найдем условия, при выполнении которых система (1) имеет единственное решение с подвижными полярными особыми точками или вовсе не имеет решений с подвижной особой точкой, при приближении к которой хотя бы по некоторому пути все компоненты решения стремились бы к бесконечности.

С помощью замены $x_i=\dfrac{1}{u_i}$ $(i=1,2,3)$, сведем систему (1) к следующему виду:

$$\begin{aligned}
\frac{du_1}{dz}&=-\frac{p_1(z)+(\ldots)}{q_1(z)+(\ldots)}u_1^{-r_{11}+2}u_2^{-r_{12}}u_3^{-r_{13}},\\
\frac{du_2}{dz}&=-\frac{p_2(z)+(\ldots)}{q_2(z)+(\ldots)}u_1^{-r_{21}}u_2^{-r_{22}+2}u_3^{-r_{23}},\\
\frac{du_3}{dz}&=-\frac{p_3(z)+(\ldots)}{q_3(z)+(\ldots)}u_1^{-r_{31}}u_2^{-r_{32}}u_3^{-r_{33}+2},
\end{aligned} \tag{3}$$

где $r_{ij}=p_{ij}-q_{ij}$ $(i=1,2,3,\ j=1,2,3)$.

Наряду с системой (3) будем рассматривать и системы:

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{du_1}&=-\frac{q_1(z)+(\ldots)}{p_1(z)+(\ldots)}u_1^{r_{11}-2}u_2^{r_{12}}u_3^{r_{13}},\\
\frac{du_2}{du_1}&=-\frac{p_2(z)q_1(z)+(\ldots)}{q_2(z)p_1(z)+(\ldots)}u_1^{r_{11}-r_{21}-2}u_2^{r_{12}-r_{22}+2}u_3^{r_{13}-r_{23}},\\
\frac{du_3}{du_1}&=-\frac{p_3(z)q_1(z)+(\ldots)}{q_3(z)p_1(z)+(\ldots)}u_1^{r_{11}-r_{31}-2}u_2^{r_{12-32}}u_3^{r_{13}-r_{33}+2},
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\frac{dz}{du_2} = -\frac{q_2(z)+(\ldots)}{p_2(z)+(\ldots)} u_1^{r_{21}} u_2^{r_{22}-2} u_3^{r_{23}},$$

$$\frac{du_1}{du_2} = -\frac{q_2(z)p_1(z)+(\ldots)}{p_2(z)q_1(z)+(\ldots)} u_1^{r_{21}-r_{11}+2} u_2^{r_{22}-r_{12}-2} u_3^{r_{23}-r_{13}}, \tag{5}$$

$$\frac{du_3}{du_2} = -\frac{p_3(z)q_2(z)+(\ldots)}{q_3(z)p_2(z)+(\ldots)} u_1^{r_{21}-r_{31}} u_2^{r_{r_{22}-32}-2} u_3^{r_{123}-r_{33}+2},$$

$$\frac{dz}{du_3} = -\frac{q_3(z)+(\ldots)}{p_3(z)+(\ldots)} u_1^{r_{31}} u_2^{r_{32}} u_3^{r_{33}-2}, \tag{6}$$

$$\frac{du_1}{du_3} = -\frac{q_3(z)p_1(z)+(\ldots)}{p_3(z)q_1(z)+(\ldots)} u_1^{r_3-r_{11}+2} u_2^{r_{32}-r_{12}} u_3^{r_{33}-r_{13}-2},$$

$$\frac{du_2}{du_3} = -\frac{p_2(z)q_3(z)+(\ldots)}{q_2(z)p_3(z)+(\ldots)} u_1^{r_{31}-r_{21}} u_2^{r_{32}-r_{22}+2} u_3^{r_{33}-r_{23}-2}.$$

Через $(\ldots)$ обозначены функции, которые обращаются в ноль при любом из $u_i = 0 (i = 1, 2, 3)$.

С помощью метода, основанного на голоморфности правых частей указанных систем дифференциальных уравнений, мы доказали следующие теоремы.

Теорема 1. При выполнении условий

$$r_{11} = 2, r_{12} = 0, r_{13} = 2, r_{21} = 0, r_{22} = 2, r_{23} = 0, r_{31} \le 0, r_{32} \le 0, r_{33} = 2, \tag{7}$$

или

$$r_{11} = 2, r_{12} = 0, r_{13} = 2, r_{21} \le 0, r_{22} = 2, r_{23} \le 0, r_{31} = 0, r_{32} = 0, r_{33} = 2, \tag{8}$$

или

$$r_{11} = 2, r_{12} \le 0, r_{13} \le 0, r_{21} \le 0, r_{22} = 2, r_{23} = 0, r_{31} = 0, r_{32} = 0, r_{33} = 2, \tag{9}$$

и любом конечном $z_0 \in D$, для которого

$$q_1(z_0)q_2(z_0)q_3(z_0) \ne 0, \tag{10}$$

система (3) имеет единственное решение

$$x_i = f_i(z), (i = 1, 2, 3), \tag{11}$$

со свойством

$$f_1(z) \to \infty, \quad f_2(z) \to \infty, \quad f_3(z) \to \infty \quad \text{при } z \to z_0 .$$

Это решение имеет вид

$$x_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (z - z_0)^{-m+i} \quad (a_0 \ne 0, m > 0),$$

$$x_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (z - z_0)^{-n+i} \quad (b_0 \ne 0, n > 0), \tag{12}$$

$$x_3 = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (z - z_0)^{-l+i} \quad (c_0 \ne 0, l > 0),$$

Точка z_0 для функции этого решения является полюсом.

Доказательство. При условии (7)–(10) правые части системы (3) представляют собой однозначные аналитические функции относительно u_1, u_2, u_3 и z в окрестности точки $(0, 0, 0, z_0)$. Тогда по теореме Коши [1,3] эта система имеет единственное голоморфное решение в окрестности точки z_0 решение $u_i(z)(i = 1, 2, 3)$, удовлетворяющее начальным условиям $u_i(z) = 0$. Это решение имеет вид

$$u_1=\sum_{\sigma=0}^{\infty}a_\sigma(z-z_0)^{m+\sigma}\quad (a_0\neq 0, m>0),$$
$$u_2=\sum_{\sigma=0}^{\infty}b_\sigma(z-z_0)^{n+\sigma}\quad (b_0\neq 0, n>0),\tag{13}$$
$$u_3=\sum_{\sigma=0}^{\infty}c_\sigma(z-z_0)^{l+\sigma}\quad (c_0\neq 0, l>0).$$

Возвращаясь от системы (3) к системе (1), получим для нее решение (11) со свойством (2). Существование у системы (1) решения (11) со свойством (2) доказано.

Покажем единственность такого решения. Пусть $x_i=\varphi_i(z)(i=1,2,3)$ − любое решение системы (1), обладающее свойством $\varphi_i(z)\to\infty\ (i=1,2,3)$ при $z\to z_0$. Тогда решение системы (3)

$$x_i=\frac{1}{\varphi_i(z)}\equiv\Phi_i(z)\quad (i=1,2,3)\tag{14}$$

будет обладать свойством $\Phi_i(z)\to 0\ \ (i=1,2,3)$ при $z\to z_0$. По теореме Пенлеве [1,2] это означает, что решение (14) системы (3) совпадает в окрестности точки z_0 с голоморфным решением (13) полученным по теореме Коши. Тогда решение $x_i=\varphi_i(z)(i=1,2,3)$ системы (1) совпадает с решением (12), что и доказывает единственность решения.

Теорема 2 При выполнении условий

$$r_{11}<2, r_{12}\le 0, r_{13}\le 2, r_{21}\le 0, r_{22}\le 2, r_{23}\le 0, r_{31}\le 0, r_{32}\le 0, r_{33}\le 2,\tag{15}$$

или

$$r_{11}\le 2, r_{12}\le 0, r_{13}\le 0, r_{21}\le 0, r_{22}\le 2, r_{23}\le 0, r_{31}\le 0, r_{32}\le 0, r_{33}\le 2,\tag{16}$$

или

$$r_{11}\le 2, r_{12}\le 0, r_{13}\le 0, r_{21}\le 0, r_{22}\le 2, r_{23}\le 0, r_{31}\le 0, r_{32}\le 0, r_{33}<2,\tag{17}$$

или

$$r_{11}=2, r_{12}<0, r_{13}<0, r_{21}<0, r_{22}=2, r_{23}<0, r_{31}<0, r_{32}<0, r_{33}=2,\tag{18}$$

и любом конечном $z_0\in D,$ для которого имеет место (10) , система (1) не имеет решений, обладающих свойством (2) при $z\to z_0$ хотя бы по некоторому пути L .

Доказательство. Правые части системы (3) при выполнении условий (15)–(18) и (10) являются однозначными аналитическими функциями от u_i $i=(1,2,3)$ и z в окрестности точки $(0,0,0,z)$. Тогда по теореме Коши существует единственное решение $u_i(z)$ $(i=1,2,3)$ системы (3), голоморфное в окрестности точки z_0 и удовлетворяющее начальным условиям $u_i(z)=0$. Очевидно, что хотя бы одна компонента этого решения будет тождественным нулем. Следовательно, система (1) не будет иметь решений (11) , обладающих свойством (2).

Теорема 3. При выполнении условий

$$r_{11}\ge\max\{2, r_{21}+2, r_{31}+2\},\quad r_{12}\ge\max\{0, r_{32}\},\quad r_{13}\ge\max\{0, r_{23}\},\tag{19}$$
$$r_{22}=r_{12}+2,\quad r_{33}=r_{13}+2,$$

и любом конечном $z_0\in D,$ для которого имеет место

$$p_1(z_0)q_2(z_0)g_3(z_0)\neq 0\,.\tag{20}$$

Система (1) имеет единственное решение (11) со свойством (2). Это решение имеет вид

$$x_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (z - z_0)^{(i-1)/m} \quad (\alpha_0 \neq 0, m > 0),$$
$$x_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (z - z_0)^{(i-n)/m} \quad (\beta_0 \neq 0, n > 0), \tag{21}$$
$$x_3 = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (z - z_0)^{(i-l)/m} \quad (\gamma_0 \neq 0, l > 0).$$

Для всех функций этого решения z_0 является полюсом, как правило, критическим.

Доказательство. Правые части системы (4) при выполнении условий (18) и (19) представляют собой однозначные аналитические функции относительно u_1, u_2, u_3, z в окрестности точки $(0,0,0,z_0)$. Следовательно, система (4) имеет по теореме Коши единственное решение $z(u_1), u_2(u_1), u_3(u_1),$ голоморфное относительно u_1 в окрестности точки $u_1 = 0$ и удовлетворяющее начальным условиям

$$z(0) = z_0, u_2(0) = 0, u_3(0) = 0. \tag{22}$$

Это решение имеет вид

$$z(u_1) = z_0 + \sum_{\sigma=0}^{\infty} a_\sigma u_1^{\sigma+m} \quad (a_0 \neq 0, m > 0),$$
$$u_2(u_1) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} b_\sigma u_1^{\sigma+n} \quad (b_0 \neq 0, n > 0), \tag{23}$$
$$u_3(u_1) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} c_\sigma u_1^{\sigma+l} \quad (c_0 \neq 0, l > 0).$$

Возвращаясь от системы (4) к системе (1), получим для последней решение (11), обладающее свойством (2) и имеющее вид (21).

Покажем единственность этого решения.

Пусть $x_i = \varphi_i(z)(i = 1,2,3)$ − любое решение системы (1) со свойством $\varphi_i(z) \to \infty$ $(i = 1,2,3)$ при $z \to z_0$. Очевидно, что решение (14) системы (4) при этом будет обладать свойством

$$\Phi_i(z) \to 0 \quad (i = 1,2,3) \text{ при } z \to z_0 \ . \tag{24}$$

Тогда в плоскости переменной u_1 существует путь $G,$ оканчивающийся в точке $u_1 = 0$, что решение

$$z = \Phi^{-1}{}_1(u_1) \equiv \psi(u_1), u_j = \Phi_j(\psi(u_1)) \equiv \tau_j(u_i)(j = 2,3). \tag{25}$$

Системы (4) будет обладать свойством

$$\psi(u_1) \to z_0, \tau_j(u_i) \to 0 (j = 2,3) \text{ при } u_1 \to 0 \tag{26}$$

вдоль пути G. По теореме Пенлеве это означает, что решение (25) системы (4) совпадает в окрестности точки $u_1 = 0$ с голоморфным решением (23), полученным по теореме Коши и определяемым начальными условиями (22). В этом случае решение $\varphi_i(z)(i = 1,2,3)$ системы (1) совпадает с решением (21), что и требовалось доказать.

Теорема 4. При выполнении условий

$$r_{11} \geq \max\{2, r_{21} + 2, r_{31} + 2\}, \quad r_{12} \geq \max\{0, r_{32}\}, \quad r_{13} \geq \max\{0, r_{23}\}, \tag{27}$$
$$r_{22} < r_{12} + 2, \quad r_{33} \leq r_{13} + 2,$$

или

$$r_{11} \geq \max\{2, r_{21}+2, r_{31}+2\}, \quad r_{12} \geq \max\{0, r_{32}\}, \quad r_{13} \geq \max\{0, r_{23}\}, \tag{28}$$
$$r_{22} \leq r_{12}+2, \quad r_{33} < r_{13}+2,$$

и любом конечном $z_0 \in D,$ для которого имеет место (20) , система (1) не имеет решений, обладающих свойством (2) при $z \to z_0$ хотя бы по некоторому пути L.

Доказательство. Правые части системы (3) при выполнении условий (27) или (28) и (20) представляют собой однозначные аналитические функции от u_1, u_2, u_3, z в окрестности точки $(0,0,0,z_0)$. Следовательно, система (4) имеет единственное решение $z(u_1), u_2(u_1), u_3(u_1),$ голоморфное относительно u_1 в окрестности точки $u_1 = 0$ и удовлетворяющее начальным условиям (22) . У этого решения, очевидно, функции $u_2(u_1) \equiv 0$ или $u_3(u_1) \equiv 0$, или обе функции одновременно представляют собой тождественный ноль. Отсюда и получается заключение теоремы.

Теорема 5. При выполнении условий

$$r_{22} \geq \max\{2, r_{12}+2, r_{32}+2\}, \quad r_{21} \geq \max\{0, r_{31}\}, \quad r_{23} \geq \max\{0, r_{12}\}, \tag{29}$$
$$r_{11} = r_{21}+2, \quad r_{33} = r_{23}+2,$$

и любом конечном $z_0 \in D,$ для которого имеет место

$$p_2(z_0) q_1(z_0) g_3(z_0) \neq 0 \tag{30}$$

система (1) имеет единственное решение (11) со свойством (2). Это решение имеет вид

$$\begin{gathered} x_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (z-z_0)^{(i-m)/n} \quad (\alpha_0 \neq 0, m > 0), \\ x_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (z-z_0)^{(i-1)/n} \quad (\beta_0 \neq 0, n > 0), \\ x_3 = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (z-z_0)^{(i-l)/n} \quad (\gamma_0 \neq 0, l > 0). \end{gathered} \tag{31}$$

Для всех функций этого решения точки z_0 являются полюсом, как правило, критическим.

Теорема 6. При выполнении условий

$$r_{21} \geq \max\{2, r_{12}+2, r_{32}+2\}, \quad r_{21} \geq \max\{0, r_{31}\}, \quad r_{23} \geq \max\{0, r_{12}\}, \tag{37}$$
$$r_{11} < r_{21}+2, \quad r_{33} \leq r_{23}+2,$$

или

$$r_{21} \geq \max\{2, r_{12}+2, r_{32}+2\}, \quad r_{21} \geq \max\{0, r_{31}\}, \quad r_{23} \geq \max\{0, r_{12}\}, \tag{38}$$
$$r_{11} \leq r_{21}+2, \quad r_{33} < r_{23}+2,$$

и любом конечном $z_0 \in D,$ для которого имеет место (30) , система (1) не имеет решений, обладающих свойством (2) при $z \to z_0$ хотя бы по некоторому пути L.

Теорема 7. При выполнении условий

$$r_{33} \geq \max\{2, r_{13}+2, r_{23}+2\}, \quad r_{31} \geq \max\{0, r_{21}\}, \quad r_{32} \geq \max\{0, r_{12}\}, \tag{39}$$
$$r_{11} = r_{31}+2, \quad r_{11} = r_{32}+2,$$

и любом конечном $z_0 \in D,$ для которого имеет место

$$p_3(z_0) q_1(z_0) g_2(z_0) \neq 0 \tag{40}$$

система (1) имеет единственное решение (11) со свойством (2). Это решение имеет вид

$$x_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (z - z_0)^{(i-m)/l} \quad (\alpha_0 \neq 0, m > 0),$$
$$x_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (z - z_0)^{(i-n)/l} \quad (\beta_0 \neq 0, n > 0), \tag{41}$$
$$x_3 = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (z - z_0)^{(i-1)/l} \quad (\gamma_0 \neq 0, l > 0),$$

Для всех функций этого решения точка z_0 являются полюсом, как правило, критическим.

Теорема 8. При выполнении условий

$$r_{33} \geq \max\{2, r_{13}+2, r_{23}+2\}, \quad r_{31} \geq \max\{0, r_{21}\}, \quad r_{32} \geq \max\{0, r_{12}\}, \tag{42}$$
$$r_{11} < r_{31}+2, \quad r_{22} \leq r_{32}+2,$$

или

$$r_{21} \geq \max\{2, r_{12}+2, r_{32}+2\}, \quad r_{21} \geq \max\{0, r_{31}\}, \quad r_{23} \geq \max\{0, r_{12}\}, \tag{43}$$
$$r_{11} \leq r_{21}+2, \quad r_{33} < r_{23}+2,$$

и любом конечном $z_0 \in D,$ для которого имеет место (40) , система (1) не имеет решений, обладающих свойством (2) при $z \to z_0$ хотя бы по некоторому пути L.

Доказательство теорем 5–8 основывается на голоморфности [1,3] в окрестности точки $(0,0,0,z_0)$ правых частей систем (5)–(6) и проводится в полной аналогии с доказательствами теорем 3 и 4.

Точки $z_0 \in D,$ в которых

1) $g_1(z_0)g_2(z_0)g_3(z_0) = 0$,
2) $g_1(z_0)g_2(z_0)g_3(z_0) = 0$,
3) $p_2(z_0)g_1(z_0)g_3(z_0) = 0$,
4) $p_3(z_0)g_1(z_0)g_2(z_0) = 0$

отнесем к подвижным точкам системы (1). Тогда из ранее изложенного следует, что при выполнении любого из условий (7)–(9),(19),(29),(39), (42) система (1) имеет единственное решение , для всех функций которого точки z_0 является подвижным полюсом. А при выполнении любого из условий (13)–(16),(25),(26),(31),(32),(36),(37) система (2) вовсе не имеет решений с подвижной особой точкой, при приближении к которой хотя бы по некоторому пути все функции решений стремились бы к бесконечности.

Таким образом, полученные условия выделяют классы систем вида (1), не имеющих решений (11) со свойством (2) при $z \to z_0$. Проведенные исследования позволяют дать более полную характеристику аналитических свойств решений системы трех дифференциальных уравнений первого порядка с рациональными правыми частями вида $\dfrac{dx_i}{dz} = \dfrac{P_i(x_1, x_2, x_3, z)}{Q_i(x_1, x_2, x_3, z)}, \qquad i = (1,2,3)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев, В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений/ В.В.Голубев. – М.:ГИТТЛ,1950. – 436с.

2. Айнс, Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харьков : ГТИУ, 1939. – 717 с.

3. Мельникова, И.Н. К вопросу о классификации подвижных особых точек решений дифференциальных систем / И.Н. Мельникова // Совершенствование профессионального психолого-педагогического мастерства в условиях непрерывного образования : сб. научн. ст. – БГПУ им. М. Танка, Минск, 1991.– С. 191–196 .

I.N. Melnikova, D.Y. Kutsin **Some Features of the Solution of the System of Three Differential Equations**

In the article the conditions are found which help to distinguish the system class of three equations of the first order which do not have solutions with infinite components. This classification problem is not new; nevertheless, it is far from completion for these types of systems. The considered method allows drawing the conditions of the absence of motile peculiar points in the solution of such systems and checking them is quite easy in practice.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 29.10.13