УДК 517.983.54 + 519.6

О.В. Матысик, В.С. Зайко

ОБ ОДНОМ РЕГУЛЯРИЗУЮЩЕМ АЛГОРИТМЕ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ С ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

В гильбертовом пространстве исследуется метод итераций с переменным шагом решения некорректных задач с положительно определенным ограниченным самосопряженным оператором. Исследована сходимость итерационного метода в случае априорного и апостериорного выбора числа итераций при точной и приближенной правых частях операторного уравнения в исходной норме гильбертова пространства. Изучен случай неединственного решения уравнения, и доказана сходимость метода в энергетической норме гильбертова пространства. Методом решена численная модельная задача.

Введение

В статье изучается метод итерации явного типа решения некорректных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода. Сравнение предлагаемого метода с хорошо известным методом простой итерации $x_{n+1} = x_n + \alpha(y - Ax_n)$, $x_0 = 0$ [1–9] показывает, что по мажорантным оценкам погрешности эти методы одинаковы. Однако предлагаемый метод имеет преимущество по сравнению с методом простой итерации в следующем: для достижения оптимальной точности здесь потребуется сделать число итераций по крайней мере в 2,5 раза меньше, чем методом итераций [1–9].

Как известно, погрешность метода простой итерации с постоянным [1–9] или переменным [10] шагом зависит от суммы шагов по антиградиенту, и притом так, что для сокращения числа операций желательно, чтобы шаги по антиградиенту были как можно большими. Однако на эти шаги накладываются ограничения сверху [9–10]. Возникает идея попытаться ослабить эти ограничения. Это удается сделать, выбирая для шага три значения α, β, γ попеременно, где γ уже не обязано удовлетворять прежним требованиям.

Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях при решении прикладных некорректных задач, встречающихся в гравиметрии, технике, экономике, геологоразведке, сейсмике, космических исследованиях (спектроскопии), медицине (компьютерной томографии).

Постановка задачи

В действительном гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение первого рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

с ограниченным положительно определенным самосопряженным оператором $A: H \to H$, в предположении, что нуль принадлежит спектру этого оператора, однако, вообще говоря, не является его собственным значением. При сделанных предположениях задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если решение уравнения (1) все же существует и единственно, то для его отыскания естественно пытаться применить различные итерационные схемы. В настоящей работе предлагается явная итерационная процедура с переменным шагом

$$\begin{gathered} x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y), \quad x_0 = 0, \\ \alpha_{3n+1} = \alpha, \quad \alpha_{3n+2} = \beta, \quad \alpha_{3n+3} = \gamma, \quad n = 0,1,2,\dots \end{gathered} \tag{2}$$

В случае приближенной правой части y_δ, $\|y-y_\delta\|\le\delta$ уравнения (1) приближения (2) примут вид

$$x_{n+1,\delta}=x_{n,\delta}-\alpha_{n+1}\left(Ax_{n,\delta}-y_\delta\right),\quad x_{0,\delta}=0,$$
$$\alpha_{3n+1}=\alpha,\quad \alpha_{3n+2}=\beta,\quad \alpha_{3n+3}=\gamma,\quad n=0,1,2,\ldots. \tag{3}$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ. Иными словами, метод (3) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_n\|x-x_{n,\delta}\|\right)=0$.

Сходимость метода с априорным выбором числа итераций

По индукции покажем, что

$$x_{n+1}=\alpha_{n+1}y+\alpha_n(E-\alpha_{n+1}A)y+\ldots+\alpha_1(E-\alpha_{n+1}A)(E-$$
$$-\alpha_nA)\ldots(E-\alpha_2A)y=\sum_{k=0}^{n}\alpha_{n-k+1}\prod_{i=0}^{k-1}(E-\alpha_{n-i+1}A)y. \tag{4}$$

Из (2) и (4) при $n=0$ следует, что $x_1=\alpha_1y$, и, следовательно, при $n=0$ формула (4) верна. Предположим, что (4) верна при $n=p$, т.е.

$$x_{p+1}=\alpha_{p+1}y+\alpha_p(E-\alpha_{p+1}A)y+\ldots+\alpha_1(E-\alpha_{p+1}A)(E-\alpha_pA)\ldots(E-\alpha_2A)y.$$

Докажем, что (4) верна при $n=p+1$. Из (2) получим

$$x_{p+2}=x_{p+1}-\alpha_{p+2}(Ax_{p+1}-y)=\alpha_{p+2}y+(E-\alpha_{p+2}A)x_{p+1}=$$
$$=\alpha_{p+2}y+(E-\alpha_{p+2}A)[\alpha_{p+1}y+\alpha_p(E-\alpha_{p+1}A)y+\alpha_{p-1}(E-\alpha_{p+1}A)(E-$$
$$-\alpha_pA)y+\alpha_{p-2}(E-\alpha_{p+1}A)(E-\alpha_pA)(E-\alpha_{p-1}A)y+\ldots+\alpha_2(E-$$
$$-\alpha_{p+1}A)(E-\alpha_pA)\ldots(E-\alpha_3A)y+\alpha_1(E-\alpha_{p+1}A)(E-\alpha_pA)\ldots(E-$$
$$-\alpha_3A)(E-\alpha_2A)y]=\alpha_{p+2}y+\alpha_{p+1}(E-\alpha_{p+2}A)y+\alpha_p(E-\alpha_{p+2}A)(E-$$
$$-\alpha_{p+1}A)y+\alpha_{p-1}(E-\alpha_{p+2}A)(E-\alpha_{p+1}A)(E-\alpha_pA)y+\alpha_{p-2}(E-\alpha_{p+2}A)(E-$$
$$-\alpha_{p+1}A)(E-\alpha_pA)(E-\alpha_{p-1}A)y+\ldots+\alpha_1(E-\alpha_{p+2}A)\ldots(E-\alpha_3A)(E-\alpha_2A)y=$$
$$=\sum_{k=0}^{p+1}\alpha_{p-k+2}\prod_{i=0}^{k-1}(E-\alpha_{p-i+2}A)y.$$

Следовательно, по индукции формула (4) верна.

Далее для упрощения считаем $\|A\|=1$. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, получим

$$x-x_n=A^{-1}y-\left[\alpha_n+\alpha_{n-1}\left(E-\alpha_nA\right)+\ldots+\alpha_1\left(E-\alpha_nA\right)\left(E-\alpha_{n-1}A\right)\ldots\left(E-\alpha_2A\right)\right]y=$$
$$=\int_0^1\frac{1}{\lambda}\left\{1-\lambda\left[\alpha_n+\alpha_{n-1}\left(1-\alpha_n\lambda\right)+\ldots+\alpha_1\left(1-\alpha_n\lambda\right)\ldots\left(1-\alpha_2\lambda\right)\right]\right\}dE_\lambda y.$$

Докажем по индукции, что

$$1-\lambda\left[\alpha_n+\alpha_{n-1}\left(1-\alpha_n\lambda\right)+\ldots+\alpha_1\left(1-\alpha_n\lambda\right)\ldots\left(1-\alpha_2\lambda\right)\right]=\left(1-\alpha_1\lambda\right)\left(1-\alpha_2\lambda\right)\ldots\left(1-\alpha_n\lambda\right). \tag{5}$$

При $n=1$получим $1-\lambda\alpha_1=1-\alpha_1\lambda$, значит, при $n=1$ формула (5) верна.

Предположим, что данная формула верна при $n=p$:

$$1-\lambda[\alpha_p+\alpha_{p-1}(1-\alpha_p\lambda)+\alpha_{p-2}(1-\alpha_p\lambda)(1-\alpha_{p-1}\lambda)+\ldots+\alpha_1(1-\alpha_p\lambda)\times\ldots\times$$
$$\times(1-\alpha_3\lambda)(1-\alpha_2\lambda)]=(1-\alpha_1\lambda)(1-\alpha_2\lambda)\times\ldots\times(1-\alpha_p\lambda).$$

Докажем, что рассматриваемая формула верна при $n = p+1$:

$$1-\lambda[\alpha_{p+1}+\alpha_p(1-\alpha_{p+1}\lambda)+\alpha_{p-1}(1-\alpha_{p+1}\lambda)(1-\alpha_p\lambda)+\alpha_{p-2}(1-\alpha_{p+1}\lambda)(1-$$
$$-\alpha_p\lambda)(1-\alpha_{p-1}\lambda)+...+\alpha_1(1-\alpha_{p+1}\lambda)(1-\alpha_p\lambda)\ldots(1-\alpha_3\lambda)(1-\alpha_2\lambda)]=$$
$$=1-\alpha_{p+1}\lambda+\lambda(1-\alpha_{p+1}\lambda)[-\alpha_p-\alpha_{p-1}(1-\alpha_p\lambda)-\alpha_{p-2}(1-$$
$$-\alpha_p\lambda)(1-\alpha_{p-1}\lambda)-...-\alpha_1(1-\alpha_p\lambda)\times...\times(1-\alpha_3\lambda)(1-\alpha_2\lambda)]=$$
$$=1-\lambda\alpha_{\mathrm{p}+1}+\lambda(1-\alpha_{p+1}\lambda)[-\frac{1}{\lambda}\{1-(1-\alpha_1\lambda)(1-\alpha_2\lambda)\times...\times(1-\alpha_p\lambda)\}]=$$
$$=1-\lambda\alpha_{\mathrm{p}+1}-(1-\alpha_{p+1}\lambda)+(1-\alpha_{p+1}\lambda)(1-\alpha_1\lambda)(1-\alpha_2\lambda)\times...\times$$
$$\times(1-\alpha_p\lambda)=(1-\alpha_1\lambda)(1-\alpha_2\lambda)\times...\times(1-\alpha_p\lambda)(1-\alpha_{p+1}\lambda).$$

Следовательно, формула (5) верна.

Таким образом, имеем $x-x_n=\int\limits_0^1\lambda^{-1}(1-\alpha_1\lambda)(1-\alpha_2\lambda)...(1-\alpha_n\lambda)dE_\lambda y=$ $=\int\limits_0^1\lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^k(1-\beta\lambda)^l(1-\gamma\lambda)^m\,dE_\lambda y$. Здесь k, l, m – натуральные показатели, где $l+m+k=n$. Потребуем, чтобы при $\lambda\in(0,1]$ и положительных α,β,γ выполнялись условия

$$\left.\begin{aligned}&|(1-\alpha\lambda)|<1,\ (\text{т.е. } 0<\alpha<2),\\&|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)|<1,\\&|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)|<1.\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Докажем сходимость процесса (2) при точной правой части y. Справедлива

Теорема 1. *Итерационный процесс* (2) *при условии* (6) *сходится в норме гильбертова пространства*.

Доказательство.

Поскольку

$$x-x_n=\int\limits_0^\varepsilon\lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^k(1-\beta\lambda)^l(1-\gamma\lambda)^m\,dE_\lambda y+\int\limits_\varepsilon^1\lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^k(1-\beta\lambda)^l(1-\gamma\lambda)^m\,dE_\lambda y\ ,$$

то, считая $k=l=m=n/3$, при условиях (6) получим

$$\left\|\int\limits_\varepsilon^1\lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^k(1-\beta\lambda)^l(1-\gamma\lambda)^m\,dE_\lambda y\right\|\le q^{n/3}\left\|\int\limits_\varepsilon^1 dE_\lambda x\right\|\to0,\ n\to\infty.$$

Здесь $q=\max\limits_{\lambda\in[\varepsilon,1]}|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)|<1$. В силу свойств спектральной функции [12]

$$\left\|\int\limits_0^\varepsilon\lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^k(1-\beta\lambda)^l(1-\gamma\lambda)^m\,dE_\lambda y\right\|\le\left\|\int\limits_0^\varepsilon\lambda^{-1}\,dE_\lambda y\right\|=\left\|\int\limits_0^\varepsilon dE_\lambda x\right\|=\|E_\varepsilon x\|\to0,\ \varepsilon\to0\,.$$

Таким образом, $\|x-x_n\|\to0,\ n\to\infty$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. *Условие* $|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)|<1$ *равносильно совокупности условий* $\alpha\beta<\alpha+\beta$ *и* $(\alpha+\beta)^2<8\alpha\beta$ [11]. *Отсюда* $\alpha+\beta<8$.

Докажем сходимость процесса (3) при приближенной правой части уравнения (1). Справедлива

Теорема 2. *При условии* (6) *итерационный процесс* (3) *сходится, если выбирать число итераций* n *из условия* $n\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$.

Доказательство.

Рассмотрим $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. Оценим $\|x_n - x_{n,\delta}\|$, где

$$x_n - x_{n,\delta} = [\alpha_n + \alpha_{n-1}(E - \alpha_n A) + ... + \alpha_1 (E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1}A)...(E - \alpha_2 A)](y -$$

$$- y_\delta) = \int_0^1 \lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^k (1 - \beta\lambda)^l (1 - \gamma\lambda)^m\right] dE_\lambda (y - y_\delta).$$

Оценим на $[0,1]$ максимум подынтегральной функции

$$g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^k (1 - \beta\lambda)^l (1 - \gamma\lambda)^m\right] > 0.$$

Сначала докажем по индукции, что

$$\lambda^{-1}[1 - (1 - \alpha_1\lambda)(1 - \alpha_2\lambda)...(1 - \alpha_n\lambda)] \le \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n. \tag{7}$$

Обозначим левую часть равенства (7) через $z_n(\lambda)$. При $n = 1$ имеем $z_1(\lambda) = \dfrac{1 - (1 - \alpha_1\lambda)}{\lambda} = \alpha_1 \le \alpha_1$, значит, при $n = 1$ (7) верна.

Пусть (7) выполняется при $n = p$, т.е. что $z_p(\lambda) \le \alpha_1 + ... + \alpha_p$. Докажем, что (7) справедлива при $n = p + 1$:

$$z_{p+1}(\lambda) = \frac{1 - (1 - \alpha_1\lambda) \times ... \times (1 - \alpha_p\lambda)(1 - \alpha_{p+1}\lambda)}{\lambda} = \frac{1 - (1 - \alpha_1\lambda) \times ... \times (1 - \alpha_p\lambda)}{\lambda} +$$

$$+ \frac{(1 - \alpha_1\lambda) \times ... \times (1 - \alpha_p\lambda)\alpha_{p+1}\lambda}{\lambda} = \frac{1 - (1 - \alpha_1\lambda) \times ... \times (1 - \alpha_p\lambda)}{\lambda} +$$

$$+ \alpha_{p+1}(1 - \alpha_1\lambda) \times ... \times (1 - \alpha_p\lambda) \le \alpha_1 + ... + \alpha_p + \alpha_{p+1}.$$

Следовательно, формула (7) верна.

Поэтому $g_n(\lambda) \le k\alpha + l\beta + m\gamma$. Отсюда $\|x_n - x_{n,\delta}\| \le (k\alpha + l\beta + m\gamma)\delta$. Если $k = l = m = n/3$, то $\|x_n - x_{n,\delta}\| \le \dfrac{n}{3}(\alpha + \beta + \gamma)\delta$. Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \le$ $\le \|x - x_n\| + (k\alpha + l\beta + m\gamma)\delta$ и $\|x - x_n\| \to 0,\ n \to \infty$, то для сходимости метода (3) достаточно потребовать, чтобы $(k\alpha + l\beta + m\gamma)\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$. Таким образом, достаточно, чтобы $n\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$. Теорема 2 доказана.

Получим оценку скорости сходимости. Предположим, что точное решение x истокообразно представимо, т.е. что $x = A^s z,\ s > 0$. Тогда $y = A^{s+1}z$ и $x - x_n = \int_0^1 (1 - \alpha\lambda)^k (1 - \beta\lambda)^l (1 - \gamma\lambda)^m \lambda^s\, dE_\lambda z$. Оценим максимум подынтегральной функции $f(\lambda) = (1 - \alpha_1\lambda)(1 - \alpha_2\lambda)...(1 - \alpha_n\lambda)\lambda^s = \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i\lambda)\lambda^{\frac{\alpha_i s}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}} = \prod_{i=1}^n \varphi_i(\lambda)$. Обозначим $c_i = \dfrac{\alpha_i s}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}$. Нетрудно показать [11], что $|\varphi_i(\lambda)| \le$

$$\le \max\left\{\left|(1 - \alpha_i M)M^{c_i}\right|, \left(\frac{c_i}{e\alpha_i}\right)^{c_i}\right\},$$ где $M = \|A\|$. Поскольку $\|A\| = 1$, то получим

$$\left| f(\lambda) \right| = \prod_{i=1}^{n} \left| \varphi_i(\lambda) \right| \le \max \left\{ \prod_{i=1}^{n} \left| (1-\alpha_i) \right|, \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{c_i}{e\alpha_i} \right)^{c_i} \right\} =$$

$$= \max \left\{ \left| (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)...(1-\alpha_n) \right|, \left[s \Big/ \left(e \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \right]^s \right\} =$$

$$= \max \left\{ \left| (1-\alpha)^k (1-\beta)^l (1-\gamma)^m \right|, s^s \left[(k\alpha + l\beta + m\gamma) e \right]^{-s} \right\}.$$

При $k = l = m = n/3$ $(n = 3p,\ p \in N)$ получим

$$\left| f(\lambda) \right| \le \max \left\{ \left| (1-\alpha)^{n/3} (1-\beta)^{n/3} (1-\gamma)^{n/3} \right|, s^s \left[\frac{n}{3} (\alpha + \beta + \gamma) e \right]^{-s} \right\}.$$

Для достаточно больших n $\left| (1-\alpha)^{n/3} (1-\beta)^{n/3} (1-\gamma)^{n/3} \right| \le s^s \left[\frac{n}{3} (\alpha + \beta + \gamma) e \right]^{-s}$, поэтому

для таких n справедлива оценка $\left| f(\lambda) \right| \le s^s \left[(k\alpha + l\beta + m\gamma) e \right]^{-s} = s^s \left[\frac{n}{3} (\alpha + \beta + \gamma) e \right]^{-s}$.

Поэтому $\left\| x - x_n \right\| \le s^s \left[(k\alpha + l\beta + m\gamma) e \right]^{-s} \left\| z \right\|$. Отсюда

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\| \le s^s \left[(k\alpha + l\beta + m\gamma) e \right]^{-s} \left\| z \right\| + (k\alpha + l\beta + m\gamma)\delta.$$

Итак, доказана

Теорема 3. *Если* $x = A^s z$, $s > 0$, *то для метода* (3) *справедлива оценка погрешности*

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\| \le s^s \left[(k\alpha + l\beta + m\gamma) e \right]^{-s} \left\| z \right\| + (k\alpha + l\beta + m\gamma)\delta. \qquad (8)$$

Замечание 2. *Для упрощения считали* $\left\| A \right\| = 1$. *На самом деле все результаты легко переносятся на случай, когда* $\left\| A \right\| < \infty$.

При $k = l = m = n/3$ оценка (8) примет вид

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\| \le s^s \left[\frac{n}{3} (\alpha + \beta + \gamma) e \right]^{-s} \left\| z \right\| + \frac{n}{3} (\alpha + \beta + \gamma)\delta.$$

Ее оптимальная по n оценка имеет вид

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_{\text{опт}} \le (1+s) e^{-s/(s+1)} \delta^{s/(s+1)} \left\| z \right\|^{1/(s+1)} \qquad (9)$$

и получается при $n_{\text{опт}} = s \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right)^{-1} e^{-s/(s+1)} \delta^{-1/(s+1)} \left\| z \right\|^{1/(s+1)}$.

Таким образом, оптимальная оценка (9) для метода (3) при неточности в правой части уравнения (1) оказывается такой же, как и оптимальная оценка для метода простой итерации [1–9]. Следовательно, метод (3) не дает преимущества в мажорантных оценках по сравнению с методом простых итераций. Но он дает выигрыш в следующем: в методе простых итераций с постоянным шагом [1–9] требуется условие $0 < \alpha \le 1{,}25$, а в методе (3) $0 < \alpha < 2$, $\alpha + \beta < 8$, а γ выбирается из условия $\left| (1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda) \right| < 1$. Итак, выбирая α, β, γ соответствующим образом, можно сделать $n_{\text{опт}}$ в методе (3) меньшим, чем для метода простых итераций с постоянным шагом. Таким образом, используя метод (3), для достижения оптимальной точности потребуется сделать число итераций по крайней мере в 2,5 раза меньше, чем методом простой итераций [1–9].

Рассмотрим погрешность метода (3) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по методу (3), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учетом вычислительных погрешностей η_n, т.е.

$$z_{n+1} = z_n - \alpha_{n+1}(Az_n - y_\delta) + \alpha_{n+1}\eta_n, \quad z_0 = 0. \qquad (10)$$

Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем (3) из (10), в результате получим

$$\varepsilon_{n+1} = (E - \alpha_{n+1}A)\varepsilon_n + \alpha_{n+1}\eta_n, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 0, \quad \eta_0 = 0. \qquad (11)$$

По индукции докажем, что

$$\varepsilon_n = \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_{n-k} \prod_{i=0}^{k-1} (E - \alpha_{n-i}A)\eta_{n-k-1}. \qquad (12)$$

Из (11) при $n=1$ и из (12) при $n=2$ получим $\varepsilon_2 = \alpha_2\eta_1$, т. е. при $n=2$ (12) верна.

Пусть (12) справедлива при $n = p$: $\varepsilon_p = \sum\limits_{k=0}^{p-2} \alpha_{p-k} \prod\limits_{i=0}^{k-1} (E - \alpha_{p-i}A)\eta_{p-k-1}$. Докажем, что (12) справедлива при $n = p+1$:

$$\varepsilon_{p+1} = (E - \alpha_{p+1}A)\varepsilon_p + \alpha_{p+1}\eta_p = (E - \alpha_{p+1}A)\left[\sum_{k=0}^{p-2} \alpha_{p-k} \prod_{i=0}^{k-1} (E - \alpha_{p-i}A)\eta_{p-k-1}\right] +$$
$$+ \alpha_{p+1}\eta_p = (E - \alpha_{p+1}A)[\alpha_p\eta_{p-1} + \alpha_{p-1}(E - \alpha_pA)\eta_{p-2} + \alpha_{p-2}(E - \alpha_pA)(E -$$
$$- \alpha_{p-1}A)\eta_{p-3} + \ldots + \alpha_2(E - \alpha_pA)(E - \alpha_{p-1}A)\ldots(E - \alpha_3A)\eta_1] + \alpha_{p+1}\eta_p =$$
$$= \alpha_p(E - \alpha_{p+1}A)\eta_{p-1} + \alpha_{p-1}(E - \alpha_{p+1}A)(E - \alpha_pA)\eta_{p-2} + \alpha_{p-2}(E -$$
$$- \alpha_{p+1}A)(E - \alpha_pA)(E - \alpha_{p-1}A)\eta_{p-3} + \ldots + \alpha_2(E - \alpha_{p+1}A)(E - \alpha_pA)(E -$$
$$- \alpha_{p-1}A)\ldots(E - \alpha_3A)\eta_1 + \alpha_{p+1}\eta_p = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{p+1-k} \prod_{i=0}^{k-1} (E - \alpha_{p+1-i}A)\eta_{p-k}.$$

Следовательно, формула (12) верна.

Так как $\|E - \alpha A\| \le 1$, $\|(E - \alpha A)(E - \beta A)\| \le 1$, $\|(E - \alpha A)(E - \beta A)(E - \gamma A)\| \le 1$, то $\|\varepsilon_n\| \le \frac{n}{3}(\alpha + \beta + \gamma)\eta$, где $\eta = \sup\limits_i |\eta_i|$. Таким образом, с учетом вычислительной погрешности справедлива следующая оценка погрешности метода итераций с переменным шагом (3)

$$\|x - z_n\| \le \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \le s^s \left[\frac{n}{3}(\alpha + \beta + \gamma)e\right]^{-s} \|z\| + \frac{n}{3}(\alpha + \beta + \gamma)(\delta + \eta).$$

Сходимость метода в энергетической норме гильбертова пространства при точной и приближенной правой части уравнения

Изучим сходимость итерационного метода (3) в случае единственного решения в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$. При этом, как обычно, число итераций *n* нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем, что $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \qquad (13)$$

В разделе 3 показано, что $x_n = A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^k(E-\beta A)^l(E-\gamma A)^m\right]y$, где $k,\ l,\ m$ – натуральные показатели и $k+l+m=n$. Тогда запишем первое слагаемое из равенства (13) в виде

$$x-x_n = A^{-1}y - A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^k(E-\beta A)^l(E-\gamma A)^m\right]y =$$
$$=(E-\alpha A)^k(E-\beta A)^l(E-\gamma A)^m x.$$

Как было показано в разделе 3 $x-x_n$ бесконечно мало в норме пространства H при $n\to\infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки необходима дополнительная информация на гладкость точного решения x – его истокообразная представимость. При использовании энергетической нормы нам это дополнительное предположение не потребуется. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора A имеем

$$\|x-x_n\|_A^2 = (A(x-x_n), x-x_n) =$$
$$=\left(A(E-\alpha A)^k(E-\beta A)^l(E-\gamma A)^m x, (E-\alpha A)^k(E-\beta A)^l(E-\gamma A)^m x\right)=$$
$$=\left(A(E-\alpha A)^{2k}(E-\beta A)^{2l}(E-\gamma A)^{2m} x, x\right)=$$
$$=\int_0^1 \lambda(1-\alpha\lambda)^{2k}(1-\beta\lambda)^{2l}(1-\gamma\lambda)^{2m}\ d(E_\lambda x, x),$$

где E_λ – соответствующая оператору A спектральная функция.

Для оценки интересующей нас нормы найдем при $\lambda\in[0,1]$ максимум подынтегральной функции $\psi(\lambda)=\lambda(1-\alpha\lambda)^{2k}(1-\beta\lambda)^{2l}(1-\gamma\lambda)^{2m}$. Потребуем, чтобы при $\lambda\in(0,1]$, положительных $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ выполнялось условие (6). В разделе 3 показано, что для достаточно больших n справедливо $\lambda(1-\alpha\lambda)^k(1-\beta\lambda)^l(1-\gamma\lambda)^m \le [(k\alpha+l\beta+m\gamma)e]^{-1}$, поэтому

$$\lambda(1-\alpha\lambda)^{2k}(1-\beta\lambda)^{2l}(1-\gamma\lambda)^{2m} \le [2(k\alpha+l\beta+m\gamma)e]^{-1}.$$

В дальнейшем, для простоты, считаем, что $k=l=m=\dfrac{n}{3}$ $(n=3p,\ p\in N)$. Поэтому для таких n справедлива оценка $\max\limits_{\lambda\in[0,1]}|\psi(\lambda)| \le \left[\dfrac{2n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)e\right]^{-1}$. Следовательно, при условии (6) получим следующую оценку $\|x-x_n\|_A \le \left[\dfrac{2n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)e\right]^{-1/2}\|x\|$.

Оценим второе слагаемое в (13). Как показано в разделе 3, имеет место равенство

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^{n/3}(E-\beta A)^{n/3}(E-\gamma A)^{n/3}\right](y-y_\delta)=$$
$$=\int_0^1 \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\right] dE_\lambda(y-y_\delta).$$

Тогда

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = (A(x_n - x_{n,\delta}),\ x_n - x_{n,\delta})=$$

$$=\Big(\Big[E-(E-\alpha A)^{n/3}(E-\beta A)^{n/3}(E-\gamma A)^{n/3}\Big](y-y_\delta),$$

$$A^{-1}\Big[E-(E-\alpha A)^{n/3}(E-\beta A)^{n/3}(E-\gamma A)^{n/3}\Big](y-y_\delta)\Big)=$$

$$=\Big(A^{-1}\Big[E-(E-\alpha A)^{n/3}(E-\beta A)^{n/3}(E-\gamma A)^{n/3}\Big]^2(y-y_\delta),\,y-y_\delta\Big)=$$

$$=\int_0^1\lambda^{-1}\Big[1-(1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\Big]^2\,d\big(E_\lambda(y-y_\delta),y-y_\delta\big).$$

Обозначим через $\xi_n(\lambda)$ подынтегральную функцию и оценим ее сверху при условии (6). В разделе 3 показано, что $|g_n(\lambda)|=$ $=\left|\lambda^{-1}\Big[1-(1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\Big]\right|\le\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)$. Тогда

$$\xi_n(\lambda)=\lambda^{-1}\Big[1-(1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\Big]^2=$$

$$=\left|\lambda^{-1}\Big[1-(1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\Big]\right|\,\left|1-(1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\right|\le$$

$$\le\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\Big(1+\big|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)\big|^{n/3}\Big)\le\frac{2n}{3}(\alpha+\beta+\gamma),$$

так как при условии (6) справедливо $\big|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)\big|^{n/3}<1$.

Итак, для любых $n\ge1$ $\|x_n-x_{n,\delta}\|_A^{\,2}\le\frac{2n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\delta^2$, поэтому $\|x_n-x_{n,\delta}\|_A\le\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}n^{1/2}(\alpha+\beta+\gamma)^{1/2}\delta,\ n\ge1$. Поскольку

$$\|x-x_{n,\delta}\|_A\le\|x-x_n\|_A+\|x_n-x_{n,\delta}\|_A\le\|x-x_n\|_A+\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}n^{1/2}(\alpha+\beta+\gamma)^{1/2}\delta,\quad n\ge1$$

и при $n\to\infty$ $\|x-x_n\|_A\to0$, то для сходимости $\|x-x_{n,\delta}\|_A\to0$, $n\to\infty$ достаточно, чтобы $\sqrt{n}\,\delta\to0$, $n\to\infty$, $\delta\to0$. Таким образом, если в процедуре (3) выбрать число итераций $n=n(\delta)$, зависящих от δ так, чтобы $\sqrt{n}\,\delta\to0$, $n\to\infty$, $\delta\to0$, то получим регуляризующий метод, обеспечивающий сходимость к точному решению уравнения (1) в энергетической норме гильбертова пространства. Итак, доказана

Теорема 4. *Итерационная процедура* (3) *при условии* (6) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций* n *выбирать так, чтобы* $\sqrt{n}\,\delta\to0$, $n\to\infty$, $\delta\to0$.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3)

$$\|x-x_{n,\delta}\|_A\le\left[\frac{2n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)e\right]^{-1/2}\|x\|+\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}n^{1/2}(\alpha+\beta+\gamma)^{1/2}\delta,\ n\ge1.\qquad(14)$$

Оптимизируем полученную оценку (14) по n, т.е. при заданном δ найдем такое значение числа итераций n, при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв к нулю производную по n от правой части равенства (14), получим $3^{1/2}(\alpha+\beta+\gamma)^{-1/2}e^{-1/2}\|x\|=3^{-1/2}2(\alpha+\beta+\gamma)^{1/2}\delta\,n,$ отсюда

$$n_{\text{опт}}=3(\alpha+\beta+\gamma)^{-1}e^{-1/2}(2\delta)^{-1}\|x\|.\qquad(15)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (14), найдем ее оптимальное значение

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A^{\text{опт}} \le 2e^{-1/4}\delta^{1/2}\left\|x\right\|^{1/2}. \tag{16}$$

Из (16) вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметров α,β,γ. Но $n_{\text{опт}}$ зависит от α,β,γ, и поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать α,β,γ возможно большими, удовлетворяющими условию (6), и так, чтобы $n_{\text{опт}} \in \mathrm{Z}$. Таким образом, доказана

Теорема 5. *При условии* (6) *оптимальная оценка погрешности для итерационного процесса* (3) *в энергетической норме гильбертова пространства имеет вид* (16) *и получается при* $n_{опт}$ *из* (15).

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства *H*. Эти условия дает

Теорема 6. *Если выполнены условия*: 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, 2) $E_\varepsilon x = 0$, *где* $E_\varepsilon = \int_0^\varepsilon dE_\lambda$, ε *– фиксированное положительное число* $(0 < \varepsilon < 1)$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к решению* x *в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.*

Доказательство.

Из 1) и 2) имеем $\int_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda} d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), A\left(x - x_{n,\delta}\right)\right) = 0$. Отсюда получим

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|^2 = \int_0^1 d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), x - x_{n,\delta}\right) = \int_0^1 \frac{1}{\lambda} d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), A\left(x - x_{n,\delta}\right)\right) =$$

$$= \int_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda} d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), A\left(x - x_{n,\delta}\right)\right) + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\lambda} d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), A\left(x - x_{n,\delta}\right)\right) =$$

$$= \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\lambda} d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), A\left(x - x_{n,\delta}\right)\right) \le \frac{1}{\varepsilon}\int_\varepsilon^1 d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), A\left(x - x_{n,\delta}\right)\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), A\left(x - x_{n,\delta}\right)\right) = \frac{1}{\varepsilon}\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A^2.$$

Поэтому из $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A \to 0$, $n \to \infty$ следует $\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \to 0$, $n \to \infty$. Теорема 6 доказана.

Замечание 3. *Так как* $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{n/3}(E - \beta A)^{n/3}(E - \gamma A)^{n/3}\right]y_\delta$, *то для того, чтобы* $x_{n,\delta}$ *удовлетворяло условию* $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, *достаточно потребовать, чтобы* $E_\varepsilon y_\delta = 0$. *Таким образом, если решение x и приближенная правая часть* y_δ *таковы, что* $E_\varepsilon x = 0$ *и* $E_\varepsilon y_\delta = 0$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к x в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства и, следовательно, для сходимости приближений* (3) *в норме пространства H не требуется предположения истокопредставимости точного решения.*

Сходимость метода с апостериорным выбором числа итераций

Априорный выбор числа итераций $n_{\text{опт}}$ получен в предположении, что точное решение x истокопредставимо, т.е. $x = A^s z,\ s > 0.$ Однако не всегда имеются сведения об элементе z и степени истокопредставимости s. Тем не менее, метод (3) становится вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке [2; 5; 11].

Определим момент m останова итерационного процесса (3) условием

$$\left.\begin{aligned} &\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, \quad (n < m), \\ &\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le \varepsilon, \end{aligned}\right\} \quad \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \tag{17}$$

Предполагаем, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т.е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon.$ Покажем возможность применения правила останова (17) к итерационному методу (3). Рассмотрим при $n = 3p,\ p = 1,2,\ldots$ семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\right].$

Из раздела 3 при условиях (6) получим

$$\sup_{0\le\lambda\le1} |\, g_n(\lambda)| \le \frac{n(\alpha+\beta+\gamma)}{3}, \tag{18}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le1} |1-\lambda g_n(\lambda)| = \sup_{0\le\lambda\le1}\left|(1-\alpha\lambda)^{\frac{n}{3}}(1-\beta\lambda)^{\frac{n}{3}}(1-\gamma\lambda)^{\frac{n}{3}}\right| \le 1, \tag{19}$$

$$1-\lambda\, g_n(\lambda) = (1-\alpha\lambda)^{\frac{n}{3}}(1-\beta\lambda)^{\frac{n}{3}}(1-\gamma\lambda)^{\frac{n}{3}} \to 0, \quad n\to\infty,\ \forall\lambda\in(0,1], \tag{20}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le1} \lambda^s\,|1-\lambda g_n(\lambda)| \le s^s\left[\frac{n(\alpha+\beta+\gamma)e}{3}\right]^{-s},\ n>0,\ 0\le s<\infty. \tag{21}$$

Аналогично [11] доказываются следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le 1$. *Тогда для любого* $w \in H$ $(E - Ag_n(A))w \to 0, \quad n\to\infty.$

Лемма 2. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le 1$. *Тогда для любого* $v \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^s\|A^s(E - Ag_n(A))v\| \to 0$ *при* $n\to\infty$, $0\le s<\infty$.

Лемма 3. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le 1$. *Если для некоторой подпоследовательности* $n_k < \overline{n}$ *=const и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $k\to\infty$ *имеем* $\omega_k = A(E - Ag_{n_k}(A))v_0 \to 0$, *то* $v_k = (E - Ag_{n_k}(A))v_0 \to 0$.

Используем эти леммы при доказательстве следующих теорем.

Теорема 7. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le 1$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ $(m = 3p, \quad p = 1,2,3,\ldots)$ *в методе* (3) *выбран по правилу* (17), *тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Доказательство.

Поскольку нуль не является собственным значением оператора A, то $M(A) = \overline{R(A)} = H$. Так как

$$E - A[\alpha_n + \alpha_{n-1}(E-\alpha_n A) + \ldots + \alpha_1(E-\alpha_n A)(E-\alpha_{n-1}A)\ldots(E-\alpha_2 A)] =$$

$$=(E-\alpha_1 A)(E-\alpha_2 A)\ldots(E-\alpha_n A),$$

то $A[\alpha_n+\alpha_{n-1}(E-\alpha_n A)+\ldots+\alpha_1(E-\alpha_n A)(E-\alpha_{n-1}A)\ldots(E-\alpha_2 A)]=$
$=E-(E-\alpha_1 A)(E-\alpha_2 A)\ldots(E-\alpha_n A)$. Имеем

$$x_{n,\delta}=[\alpha_n+\alpha_{n-1}(E-\alpha_n A)+\ldots+\alpha_1(E-\alpha_n A)(E-\alpha_{n-1}A)\ldots(E-\alpha_2 A)]y_\delta,$$

следовательно,

$$x_{n,\delta}-x=A^{-1}[E-(E-\alpha_1 A)(E-\alpha_2 A)\ldots(E-\alpha_n A)](y_\delta-y)-$$

$$-(E-\alpha_1 A)(E-\alpha_2 A)\ldots(E-\alpha_n A)x=A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^{\frac{n}{3}}(E-\beta A)^{\frac{n}{3}}(E-\gamma A)^{\frac{n}{3}}\right](y_\delta-$$

$$-y)-(E-\alpha A)^{\frac{n}{3}}(E-\beta A)^{\frac{n}{3}}(E-\gamma A)^{\frac{n}{3}}x=g_n(A)(y_\delta-y)-(E-Ag_n(A))x$$

(здесь и ниже $n=3p$, $p=1,2,3,\ldots$). Значит,

$$Ax_{n,\delta}-y=-A(E-Ag_n(A))x+Ag_n(A)(y_\delta-y). \tag{22}$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta}-y_\delta=-A(E-Ag_n(A))x-(E-Ag_n(A))(y_\delta-y). \tag{23}$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|(E-Ag_n(A))x\|\to 0,\quad n\to\infty, \tag{24}$$

$$\sigma_n=n\|A(E-Ag_n(A))x\|\to 0,\quad n\to\infty. \tag{25}$$

Кроме того, из (18) и 19)

$$\|g_n(A)(y_\delta-y)\|\le\frac{n(\alpha+\beta+\gamma)}{3}\delta, \tag{26}$$

$$\|E-Ag_n(A)\|\le 1. \tag{27}$$

Применим правило останова (17). Тогда $\|Ax_{m,\delta}-y_\delta\|\le b\delta$ и из (23) и (27) получим при $n=m$

$$\|A(E-Ag_m(A))x\|\le\|Ax_{m,\delta}-y_\delta\|+\|(E-Ag_m(A))(y_\delta-y)\|\le b\delta+\delta=(b+1)\delta.$$

Следовательно,

$$\|A(E-Ag_m(A))x\|\le(b+1)\delta. \tag{28}$$

Для любого $n<m$ получим

$$\|A(E-Ag_n(A))x\|\ge\|Ax_{n,\delta}-y_\delta\|-\|(E-Ag_n(A))(y-y_\delta)\|\ge b\delta-\delta=(b-1)\delta,$$

т.е. для любого $n<m$

$$\|A(E-Ag_n(A))x\|\ge(b-1)\delta. \tag{29}$$

Из (25) и (29) при $n=m-3$ получим $\frac{\sigma_{m-3}}{m-3}=\|A(E-Ag_{m-3}(A))x\|\ge(b-1)\delta$ или, что то же, $(m-3)\delta\le\frac{\sigma_{m-3}}{b-1}\to 0$, $\delta\to 0$ (так как из (2 5) $\sigma_m\to 0$, $m\to\infty$), следовательно, $m\delta\to 0$, $\delta\to 0$. Если при этом $m\to\infty$ при $\delta\to 0$, то

$$\|x_{m,\delta}-x\|\le\|(E-Ag_m(A))x\|+\|g_m(A)(y_\delta-y)\|\le\|(E-Ag_m(A))x\|+$$

$$+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}m\delta\to 0,\ m\to\infty,\ \delta\to 0.$$

Если же для некоторых δ_n последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в это м случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \to x$, $\delta_n \to 0$. Действительно, из (28) $\left\|A\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x\right\| \le (b+1)\delta_n \to 0$, $\delta_n \to 0$, следовательно, при $\delta_n \to 0$ $A\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x \to 0$, $\delta_n \to 0$, и по лемме 3 $\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x \to 0$, $\delta_n \to 0$. Отсюда имеем $\left\|x_{m(\delta_n),\delta_n} - x\right\| \le \left\|\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x\right\| + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} m(\delta_n)\delta_n \to 0,\ \delta_n \to 0$.
Теорема 7 доказана. Имеет место

Теорема 8. *Пусть выполняются условия теоремы* 7 *и пусть* $x = A^s z$, $s > 0$, *тогда справедливы оценки* $m \le 3 + \frac{3(s+1)}{(\alpha+\beta+\gamma)e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}$,

$$\left\|x_{m,\delta} - x\right\| \le [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \left\|z\right\|^{1/(s+1)} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\left\{3 + \frac{3(s+1)}{(\alpha+\beta+\gamma)e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta. \quad (30)$$

Доказательство.

При $n = m-3$ имеем $\left\|A\left(E - Ag_{m-3}(A)\right)x\right\| = \left\|A^{s+1}\left(E - Ag_{m-3}(A)\right)z\right\| \le$
$\le (s+1)^{s+1}\left[(m-3)\frac{(\alpha+\beta+\gamma)e}{3}\right]^{-(s+1)}\|z\|$. Используя (29), получим $(b–1)\ \delta \le$
$\le (s+1)^{s+1}\left[(m-3)\frac{(\alpha+\beta+\gamma)e}{3}\right]^{-(s+1)}\|z\|$, откуда $m \le 3 + \frac{3(s+1)}{(\alpha+\beta+\gamma)e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}$.
При помощи неравенства моментов оценим выражение

$$\left\|\left(E - Ag_m(A)\right)x\right\| = \left\|A^s\left(E - Ag_m(A)\right)z\right\| \le \left\|A^{s+1}\left(E - Ag_m(A)\right)z\right\|^{s/(s+1)} \times$$
$$\times \left\|\left(E - Ag_m(A)\right)z\right\|^{1/(s+1)} \le \left\|A\left(E - Ag_m(A)\right)x\right\|^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} \le [(b+1)\delta]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}.$$

Тогда

$$\left\|x_{m,\delta} - x\right\| \le \left\|\left(E - Ag_m(A)\right)x\right\| + \left\|g_m(A)(y_\delta - y)\right\| \le$$
$$\le [(b+1)\delta]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} + \frac{m(\alpha+\beta+\gamma)}{3}\delta \le$$
$$\le [(b+1)\delta]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\left\{3 + \frac{3(s+1)}{(\alpha+\beta+\gamma)e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta .$$

Теорема 8 доказана.

Замечание 4. *Порядок оценки* (30) *есть* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$ *и, как следует из* [2], *он оптимален в классе решений* $x = A^s z$, $s > 0$.

Замечание 5. *В формулировке теоремы* 8 *предполагается, что точное решение истокопредставимо, но знание истокопредставимости не потребуется на практике, так как при останове по невязке автоматически делается число итераций, нужное для получения оптимального по порядку решения.*

6. Сходимость метода в случае неединственного решения. Покажем, что метод (2) пригоден и тогда, когда $\lambda = 0$ является собственным значением оператора A (в этом случае уравнение (1) имеет неединственное решение). Обозначим через $N(A) = \{x \in H \,|\, Ax = 0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 9. *Пусть* $A \ge 0$, $y \in H$, $0 < \alpha < 2$, $\alpha + \beta < 8$, $|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)| < 1$. *Тогда для итерационного процесса* (2) *верны следующие утверждения*:

а) $Ax_n \to \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \to I(A, y) = \inf\limits_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) метод (2) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* – *минимальное решение уравнения*.

Доказательство.

Применим оператор A к методу (2), получим $Ax_n = A(E - \alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n Ay$, где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как $AP(A)y = 0$, то $Ax_n = A(E - \alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n A\Pi(A)y$. Отсюда

$$Ax_n - \Pi(A)y = A(E - \alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n A\Pi(A)y - \Pi(A)y =$$
$$= A(E - \alpha_n A)x_{n-1} - (E - \alpha_n A)\Pi(A)y = (E - \alpha_n A)(Ax_{n-1} - \Pi(A)y) =$$
$$= (E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1} A)\ldots(E - \alpha_1 A)(Ax_0 - \Pi(A)y).$$

Обозначим $\nu_n = Ax_n - \Pi(A)y$, тогда $\nu_n = (E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1}A)\ldots(E - \alpha_1 A)\nu_0$. Имеем $A \ge 0$ и A – положительно определен в $M(A)$, т.е. $(Ax, x) > 0$ для любого $x \in M(A)$. Так как $0 < \alpha < 2$, $|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)| < 1$, $|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)| < 1$, то, воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора A (для упрощения считаем, что $\|A\| = 1$), получим

$$\|\nu_n\| = \left\| \int_0^1 (1-\alpha_1\lambda)(1-\alpha_2\lambda)\ldots(1-\alpha_n\lambda)\, dE_\lambda \nu_0 \right\| = \left\| \int_0^1 (1-\alpha\lambda)^k (1-\beta\lambda)^l (1-\gamma\lambda)^m \, dE_\lambda \nu_0 \right\|.$$

Здесь l, m, k – натуральные показатели, где $l + m + k = n$. Считаем, что $k = l = m = n/3$. Справедлива цепочка неравенств

$$\|\nu_n\| \le \left\| \int_0^{\varepsilon_0} (1-\alpha\lambda)^k (1-\beta\lambda)^l (1-\gamma\lambda)^m \, dE_\lambda \nu_0 \right\| +$$
$$+ \left\| \int_{\varepsilon_0}^1 (1-\alpha\lambda)^k (1-\beta\lambda)^l (1-\gamma\lambda)^m \, dE_\lambda \nu_0 \right\| \le \|E_{\varepsilon_0}\nu_0\| + q^{n/3}(\varepsilon_0)\|\nu_0 - E_{\varepsilon_0}\nu_0\| < \varepsilon,$$

при $\varepsilon_0 \to 0$, $n \to \infty$. Здесь $q = \max\limits_{\lambda \in [\varepsilon_0, 1]} |(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)| < 1$. Следовательно, $\nu_n \to 0$, откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Таким образом, $\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A, y)$ (по теореме 2.1 из [8]). Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (2) примет вид

$$x_n = (E - \alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n y = (E - \alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n \Pi(A)y =$$
$$= (E - \alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n Ax^* = x_{n-1} + \alpha_n A\left(x^* - x_{n-1}\right).$$

Разобьем последнее равенство на два, так как $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n$. Тогда

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + \alpha_n P(A)A\left(x^* - x_{n-1}\right) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0,$$

так как $AP(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) = 0$.

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + \alpha_n \Pi(A)A\left(x^* - x_{n-1}\right) = \Pi(A)x_{n-1} + \alpha_n A\Big(\Pi(A)x^* -$$
$$- \Pi(A)x_{n-1}\Big) = \Pi(A)x_{n-1} - \alpha_n A\left(\Pi(A)x_{n-1} - x^*\right),$$

так как $x^* \in M(A)$ и, следовательно, $\Pi(A)x^* = x^*$. Обозначим $\omega_n = \Pi(A)x_{n-1} - x^*$, тогда $\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* - \alpha_n A\left(\Pi(A)x_{n-1} - x^*\right)$. Отсюда

$$\omega_n = \omega_{n-1} - \alpha_n A\omega_{n-1} = (E - \alpha_n A)\omega_{n-1} = (E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1}A)\ldots(E - \alpha_1 A)\omega_0$$

и, аналогично ν_n, можно показать, что $\omega_n \to 0,\ n \to \infty$. Тогда $\Pi(A)x_n \to x^*$. Следовательно, $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$. Теорема 9 доказана.

Замечание 6. *Так как у нас* $x_0 = 0$, *то* $x_n \to x^*$, *т. е. процесс* (2) *сходится к нормальному решению, т.е. к решению с минимальной нормой.*

Численная модельная задача

Рассмотрим в пространстве $L_2(0,1)$ задачу в виде уравнения

$$\int_0^1 K(t,s)\,x(s)\,ds = y(t), \qquad 0 \le t \le 1 \tag{31}$$

с симметричным положительным ядром $K(t,s) = \dfrac{1}{1+100(t-s)^2}$. В качестве точного решения сформулированной задачи выберем функцию $x(s) = \begin{cases} s, & 0 \le s < \dfrac{1}{2}, \\ 1-s, & \dfrac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$

С использованием квадратурной формулы правых прямоугольников при $m = 32$, $h = 1/m$ была вычислена в точках $t_i = ih,\ i = \overline{1,m}$ правая часть $y(t)$ интегрального уравнения (31).

Сформулированная задача относится к классу обратных задач теории потенциала. Обычно на практике мы не знаем точной функции $y(t)$, а вместо нее известны значения приближенной функции $\tilde{y}(t)$ в некотором числе точек с определенной, часто известной погрешностью δ, и по этим приближенным данным требуется приближенно найти решение. Чтобы имитировать эту ситуацию, будем считать заданными значения

$\tilde{y}_i$, $i=\overline{1,m}$, полученные следующим образом $\tilde{y}_i = [\, y(t_i)\cdot 10^k + 0{,}5] \,/\, 10^k$, квадратные скобки означают целую часть числа и $k=3;4$. При $k=3$ величина погрешности $\delta=10^{-3}$. При $k=4$ величина погрешности $\delta=10^{-4}$. Действительно, $\int_0^1 [y(t)-\tilde{y}(t)]^2 dt \approx \sum_{i=1}^m [y(t_i)-\tilde{y}_i]^2 h \le mh\left(10^{-k}\right)^2 = 10^{-2k}$. Заменим интеграл в уравнении (31) квадратурной суммой, например, по формуле правых прямоугольников с узлами $s_j = jh,\ \ j=\overline{1,m},\ \ h=1/m$, т. е. $\int_0^1 K(t,s)x(s)ds \approx \sum_{j=1}^m K\left(t,s_j\right)hx_j$. Тогда получим равенство $\sum_{j=1}^m K\left(t,s_j\right)hx_j + \rho_m(t)=y(t)$, где $\rho_m(t)$ – остаток квадратурной замены. Записав последнее равенство в точках t_i, $i=\overline{1,m}$, получим уравнения $\sum_{j=1}^m K\left(t_i,s_j\right)hx_j + \rho_m(t_i)=y(t_i)$, $i=\overline{1,m}$. Точные значения $y(t_i)$ мы не знаем, а знаем лишь приближения $\tilde{y}_i$ и, отбросив теперь остаточный член, получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно приближенного решения

$$\sum_{j=1}^m K\left(t_i,s_j\right)hx_j = \tilde{y}_i \ , \quad i=\overline{1,m}. \tag{32}$$

Выберем для определенности $m=32$ и будем решать систему (32) методом итераций (3), который в дискретной форме запишется

$$\begin{gathered} x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \alpha_{n+1}\left[\tilde{y}_i - \sum_{j=1}^m K\left(t_i,s_j\right)hx_j^{(n)}\right],\ \ x_i^{(0)}=0\,, \\ \alpha_{3n+1}=\alpha,\ \ \alpha_{3n+2}=\beta,\ \ \alpha_{3n+3}=\gamma, \quad i=\overline{1,m}. \end{gathered} \tag{33}$$

Затем система (32) решалась методом простой итерации [1–9], который в данном случае запишется

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \alpha\left[\tilde{y}_i - \sum_{j=1}^m K\left(t_i,s_j\right)hx_j^{(n)}\right],\ \ x_i^{(0)}=0\,, \quad i=\overline{1,m}. \tag{34}$$

При счете выбирались: $\alpha=0{,}8,\ \beta=4{,}4,\ \gamma=5{,}6$. Задача была решена при $\delta=10^{-3}$ и $\delta=10^{-4}$. При решении задачи итерационными методами (33) и (34) на каждом шаге итерации вычислялись: $\left\|Ax^{(n)}-\tilde{y}\right\|_m = \left\{\sum_{i=1}^m\left[\sum_{j=1}^m K\left(t_i,s_j\right)hx_j^{(n)}-\tilde{y}_i\right]^2 h\right\}^{1/2}$ – дискретная норма невязки, $\left\|x^{(n)}\right\|_m = \left\{\sum_{i=1}^m\left[x_i^{(n)}\right]^2 h\right\}^{1/2}$ – норма приближенного решения и дискретная норма разности между точным и приближенным решениями $\left\|x-x^{(n)}\right\|_m = \left\{\sum_{i=1}^m \left[x(t_i)-x_i^{(n)}\right]^2 h\right\}^{1/2}$.

В обоих случаях для решения задачи сведений об истокопредставимости точного решения не потребовалось, так как здесь воспользовались правилом останова по невязке (17), выбрав уровень останова $\varepsilon = 1{,}5\delta.$ Итак, при $\delta = 10^{-3}$, $\varepsilon = 1{,}5\cdot 10^{-3}$ для достижения оптимальной точности при счете методом итераций (33) потребовалось 6 итераций, при счете методом простой итерации (34) – 21 итерация. При $\delta = 10^{-4}$, $\varepsilon = 1{,}5\cdot 10^{-4}$ соответственно потребовалось 10 и 48 итераций.

Пример счета показал, что для достижения оптимальной точности метод итераций (3) требует примерно в 3,5 раза меньше итераций, чем метод простой итерации [1–9], что соответствует результатам раздела 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задач математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
2. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178с.
3. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
4. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.
5. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
6. Емелин, И. В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.
7. Бакушинский, А. Б. Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве / А.Б. Бакушинский // Журнал вычислительной математики и мат. физики. – 1967. – Т. 7, № 3. – С. 672–677.
8. Bialy, H. Iterative Behandlung Linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, № 2. – P.166–176.
9. Константинова, Я.В. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I-го рода / Я.В. Константинова, О.А. Лисковец // Вестник Белорусского университета. Сер. I. – 1973. – № 1. – С. 9–15.
10. Константинова, Я.В. Градиентный метод с переменным шагом для уравнений I рода / Я.В. Константинова, О.А. Лисковец // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1974. – № 2. – С. 45–49.
11. Савчук, В.Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 196 с.
12. Канторович, Л.В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М. : Физматгиз, 1959. – 680 с.

O.V. Matysik, V.S. Zajko **On a Regularizing Algorithm Ill-posed Problems with Bounded Operators**

In a Hilbert space is studied iteration method with variable step ill-posed problems with a positive definite bounded self-adjoint operator. Investigated the convergence of the iteration method in the case of a priori and a posteriori choice of the number of iterations of the exact and approximate right sides of the operator equation in the original norm of the Hilbert space. We study the case nonunique solutions of the equation and prove the convergence of the method in the energy norm of the Hilbert space. Method of numerical modeling problem solved.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 07.02.14