МАТЭМАТЫКА

УДК 517.5

Т.Н. Жернова, И.В. Кальчук, Ю.И. Харкевич

ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА Lip 1 ИНТЕГРАЛАМИ ТИПА ПУАССОНА

В работе исследуются аппроксимативные свойства интегралов типа Пуассона, а именно найдены полные асимптотические разложения для точной верхней грани отклонений функций с класса $\mathrm{Lip}1$ от их интегралов типа Пуассона в равномерной метрике.

Пусть C – пространство 2π-периодических непрерывных функций с нормой

$$\|f\|_C = \max_x |f(x)|.$$

Множество функций $f \in C$, которые удовлетворяют неравенство

$$|f(x+h) - f(x)| \le |h|,$$

будем обозначать через $\mathrm{Lip}1$ и называть классом Липшица порядка 1.

Рассмотрим краевую задачу (в единичном круге) для уравнения

$$\Delta u = 0, \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа в полярных координатах. То есть уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ \ (0 \le \rho < 1, -\pi \le x \le \pi,) \tag{2}$$

Решение уравнения (2), что удовлетворяет граничное условие

$$u(\rho, x)\big|_{\rho=1} = f(x), -\pi \le x \le \pi, \tag{3}$$

где $f(x)$ – суммируемая 2π-периодическая функция, можем записать в виде

$$P(\rho, f, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \cos kt\right\}dt, \ 0 \le \rho < 1. \tag{4}$$

Функцию (4) принято называть интегралом Пуассона функции f, а величину

$$K_1(\rho, t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \cos kt = \frac{1-\rho^2}{2\left(1 - 2\rho\cos t + \rho^2\right)}$$

называют ядром Пуассона.

Рассмотрим теперь краевую задачу (в единичном круге) для уравнения

$$\Delta(\Delta u) = 0. \tag{5}$$

Решение уравнения (5), что удовлетворяет граничные условия

$$u(\rho, x)\big|_{\rho=1} = f(x), \quad \frac{\partial u(\rho, x)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1} = 0, \quad -\pi \le x \le \pi, \tag{6}$$

можем записать в виде

$$B(\rho, f, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[1 + \frac{k}{2}\left(1-\rho^2\right)\right]\rho^k \cos kt\right\}dt, \ 0 \le \rho < 1. \tag{7}$$

Функцию (7) принято называть бигармоническим интегралом Пуассона функции f, а величину

$$K_2(\rho,t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[1+\frac{k}{2}\left(1-\rho^2\right)\right]\rho^k\cos kt=\frac{\left(1-\rho^2\right)^2\left(1-\rho\cos t\right)}{2\left(1-2\rho\cos t+\rho^2\right)^2}$$

называют бигармоническим ядром Пуассона.

В работе будем рассматривать некоторое обобщение интеграла Пуассона и бигармонического интеграла Пуассона, а именно интеграл вида

$$\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(\rho,f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)K(\rho,t)dt, \tag{8}$$

который принято называть интегралом типа Пуассона, где

$$K(\rho,t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[1+\alpha k(1+\rho)(1-\rho)^{\beta}\right]\rho^k\cos kt$$ – ядро интеграла типа Пуассона

$$\text{и } 0\le\alpha\le\frac{1}{2},\ \beta\ge1,\ 0\le\rho<1,\ -\pi\le x\le\pi.$$

Заметим, что в случае $\alpha=0$ из (8) получим интеграл Пуассона, а в случае $\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=1,$ из (8) получим бигармонический интеграл Пуассона.

Обозначим $$\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}1;\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(\rho)\right)_C=\sup_{f\in\mathrm{Lip}1}\left\|f(x)-\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(\rho,f,x)\right\|_C. \tag{10}$$

Определение 1. *Если в явном виде найдена функция $\varphi(\rho)$ такая, что можно записать при $\rho\to1-$ асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}1;\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(\rho)\right)_C=\varphi(\rho)+o(\varphi(\rho)),$$

то говорят, что решена задача Колмогорова-Никольского для интеграла типа Пуассона и класса Lip1 *в метрике пространства C.*

Определение 2. *Формальный ряд $\sum_{n=0}^{\infty}g_n(\rho)$ называется полным асимптотическим разложением или полной асимптотикой функции $f(\rho)$ при $\rho\to1-$, если для всех $n\in\mathbb{N}$*

$$\left|g_{n+1}(\rho)\right|=o\left(\left|g_n(\rho)\right|\right)$$

и при любом $m\in\mathbb{N}$

$$f(\rho)=\sum_{n=0}^{m}g_n(\rho)+o\left(g_m(\rho)\right),\ \ \rho\to1-.$$

Кратко будем записывать этот факт следующим образом

$$f(\rho)\cong\sum_{n=0}^{\infty}g_n(\rho).$$

Аппроксимативные свойства интегралов Пуассона и бигармонических интегралов Пуассона на классах Lip1 достаточно хорошо изучены.

Первые результаты, связанные с исследованием величин $\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}1;P(\rho)\right)_C$ были получены И.П. Натансоном в 1950 г. [1]. В частности, им была решена задача Колмогорова-Никольского на классах Lip1 для интеграла Пуассона, а именно установлено асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}1;P(\rho)\right)_C=\frac{2}{\pi}(1-\rho)\left|\ln(1-\rho)\right|+O(1-\rho),\ \ \rho\to1-.$$

В работе [2] в 1950 г. А.Ф. Тиман получил точные значения аппроксимативных характеристик $\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}1; P(\rho)\right)_C$:

$$\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}1; P(\rho)\right)_C = \frac{2}{\pi}(1-\rho)\ln\frac{1}{1-\rho} + \varepsilon_\rho, \;\; 0<\rho<1,$$

$$\varepsilon_\rho = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1-\rho}\left\{\frac{1}{1-t}\ln\frac{2-t}{t^t}+1\right\}dt.$$

Далее в 1961 г. в работе Л.В.Малей [3] было найдено полное асимптотическое разложение для верхней грани отклонения функций с класса Lip1 от интегралов Пуассона вида

$$\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}1; P(\rho)\right)_C \cong \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}(1-\rho)^k\ln\frac{1}{1-\rho} + \gamma_k(1-\rho)^k\right\}, \;\; \rho\to 1-,$$

$$\gamma_k = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}+\ln 2-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{2^{-i}}{i}\right).$$

В 1973 г. этот результат был передоказан Е.Л. Штарком [4].

В.А. Баскаков в работе [5] (1975 г.) записал аналогичные асимптотические разложения, но по степеням $\frac{1}{\delta}$ $\left(\delta = -\frac{1}{\ln\rho}\right)$ при $\delta\to\infty$:

$$\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}1; P(\rho)\right)_C = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\delta}\ln\delta + \frac{1}{\delta}\left[\frac{2\ln\pi}{\pi} + \frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{(t)_{2\pi}}{t^2}dt\right] +$$

$$+\frac{2}{\pi\delta}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{(t)_\pi}{t^{2(k+1)}}dt - \frac{1}{2k\pi^{2k}}\right]\frac{1}{\delta^{2k}}.$$

Аппроксимативные свойства интегралов Пуассона на других функциональных классах изучались в работах Л.И. Баусова [6], К.Н. Жигалла и Ю.И. Харкевича [7; 8].

Что же касается вопроса аппроксимативных свойств бигармонических интегралов Пуассона, то здесь нужно отметить, что С. Каниев в 1963 г. [9] нашел асимптотическое равенство вида

$$\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}1; \mathrm{B}(\rho)\right)_C = \frac{2}{\pi}(1-\rho) + \frac{\varepsilon_\rho}{\pi}, \varepsilon_\rho = o(1-\rho), \;\; \rho\to 1-.$$

Позже, в 1968 г. P. Pych [10] уточнила результат С. Каниева (уточнила порядок остаточного члена):

$$\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}1; B(\rho)\right)_C = \frac{2}{\pi}(1-\rho) + O\left((1-\rho)^2\ln\frac{1}{1-\rho}\right), \; \rho\to 1-.$$

В 1976 г Л.П. Фалалеев [11] нашел полное асимптотическое разложение при $\rho\to 1-$:

$$\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}1; B(\rho)\right)_C = \frac{2}{\pi}\left\{(1-\rho) + \left(1-\rho^2\right)\ln\frac{1}{1-\rho} + \left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)(1-\rho)^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{1}{k}(1-\rho)^k\ln\frac{1}{1-\rho} + \nu_k(1-\rho)^k\right)\right\},$$

где

$$\nu_k = \frac{1}{k}\left(\ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i2^i} - \frac{1}{(k-2)(k-1)2^{k-2}} - \frac{1}{(k-1)2^{k-1}}\right).$$

Отметим также, что аппроксимативные свойства бигармонических интегралов Пуассона на разных функциональных классах изучались в работах Т.И. Аманова и Л.П. Фалалеева [12], К.Н. Жигалла и Ю.И. Харкевича [13; 14].

Главной целью данной работы является нахождение полного асимптотического разложения для величины

$$\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}1;\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(\rho)\right)_{CC}=\sup_{f\in\mathrm{Lip}1}\left\|f(x)-\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(\rho,f,x)\right\| ,$$

при $\rho\to1-$, которое позволяет выписывать константы Колмогорова-Никольского произвольного порядка малости.

Имеет место теорема.

Теорема. *При* $\rho\to1-$ *имеет место полное асимптотическое разложение*

$$\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}1;\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(\rho)\right)_{C}=\frac{2\alpha}{\pi}(1-\rho)^{\beta}\left[\ln\frac{1}{4}+(1+\ln2)(1-\rho)+(1-\rho)\ln\frac{1}{1-\rho}+\right.$$

$$\left.+\ln(1-\rho)^2-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1-\rho)^k}{k(k-1)2^{k-1}}\right]+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}(1-\rho)^k\ln\frac{1}{1-\rho}+\gamma_k(1-\rho)^k\right\},$$

$$\gamma_k=\frac{1}{k}\left(\ln2+\frac{1}{k}-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{2^{-j}}{j}\right),\ k=1,2,\ldots$$

Доказательство. Убедимся сначала в том, что $K(\rho,t)\ge0$. Запишем ядро типа Пуассона в виде

$$K(\rho,t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[1+\alpha k(1+\rho)(1-\rho)^{\beta}\right]\rho^k\cos kt=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos kt+\alpha(1+\rho)(1-\rho)^{\beta}\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^k\cos kt.$$

Учитывая, что для первого слагаемого из правой части последнего равенства имеет место представление

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos kt=\frac{1-\rho^2}{2\left(1-2\rho\cos t+\rho^2\right)} \tag{11}$$

(см. формулу (1.447.3) из [15]), найдем аналогичное представление для суммы $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\rho^k\cos kt$.

Используя формулу (1.447.1) [15], имеем $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\rho^k\sin kt=\dfrac{\rho\sin t}{1-2\rho\cos t+\rho^2}$.

Продифференцируем обе части последнего равенства по t, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^k\cos kt=\frac{\rho\cos t+\rho^3\cos t-2\rho^2}{\left(1-2\rho\cos t+\rho^2\right)^2}. \tag{12}$$

На основе формул (11) и (12) будем иметь

$$K(\rho,t)=\frac{1-\rho^2}{2\left(1-2\rho\cos t+\rho^2\right)}+\alpha(1+\rho)(1-\rho)^{\beta}\frac{\rho\cos t+\rho^3\cos t-2\rho^2}{\left(1-2\rho\cos t+\rho^2\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(1-\rho^2\right)\left(1-2\rho\cos t+\rho^2\right)+2\alpha(1+\rho)(1-\rho)^{\beta}\left(\rho\cos t+\rho^3\cos t-2\rho^2\right)}{\left(1-2\rho\cos t+\rho^2\right)^2}.$$

Поскольку знаменатель дроби из правой части последнего равенства всегда положительный, то рассмотрим его числитель. Первое слагаемое числителя

$$\left(1-\rho^2\right)\left(1-2\rho\cos t+\rho^2\right)=\left(1-\rho^2\right)\left(1-2\rho\cos t+\rho^2\cos^2 t-\rho^2\cos^2 t+\rho^2\right)=$$

$$=\left(1-\rho^2\right)\left[\left(1-\rho\cos t\right)^2+\rho^2\left(1-\cos t\right)\right]=\left(1-\rho^2\right)\left[\left(1-\rho\cos t\right)^2+\rho^2\sin^2 t\right]>0,$$

а потому, показав, что второе слагаемое меньше первого, можем сделать вывод, что числитель будет положительным. Это вытекает из следующих соображений.

Необходимо показать, что

$$2\alpha(1+\rho)(1-\rho)^\beta\left(\rho\cos t+\rho^3\cos t-2\rho^2\right)<\left(1-\rho^2\right)\left(1-2\rho\cos t+\rho^2\right). \tag{13}$$

Так как $2\alpha\le 1$ и $(1+\rho)(1-\rho)^\beta=(1-\rho^2)(1-\rho)^{\beta-1}\le\left(1-\rho^2\right)$, то для доказательства (13) достаточно убедиться в справедливости следующего неравенства:

$$\rho\cos t+\rho^3\cos t-2\rho^2<1-2\rho\cos t+\rho^2,$$

или

$$1-3\rho\cos t-\rho^3\cos t+3\rho^2>0.$$

Действительно

$$1-3\rho\cos t-\rho^3\cos t+3\rho^2\ge 1-3\rho+3\rho^2-\rho^3=(1-\rho)^3>0,\ \rho\in(0,1).$$

Итак, $K(\rho,t)>0,\ \rho\in(0,1)$. А поскольку $K(0,t)=\frac{1}{2}>0$, то получаем, что $K(\rho,t)>0$ при $0\le\rho<1$.

Также нетрудно убедиться, что $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}K\left(\rho,t\right)dt=1.$

Учитывая (8) и предыдущее равенство, можем записать

$$f\left(x\right)-\mathcal{I}_{\alpha,\beta}\left(\rho,f,x\right)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f\left(x\right)-f\left(x+t\right)\right)K\left(\rho,t\right)d\ .$$

Поскольку $f\in\mathrm{Lip}1$, то $\left|f\left(x\right)-f\left(x+t\right)\right|\le|t|$. Тогда

$$\left|f\left(x\right)-\mathcal{I}_{\alpha,\beta}\left(\rho,f,x\right)\right|\le\int\limits_{-\pi}^{\pi}|t|K\left(\rho,t\right)dt.$$

Поскольку функция $f\left(x\right)=|x|$, $x\in\left[-\pi,\pi\right]$, принадлежит классу Lip1 и превращает последнее неравенство в равенство, то, согласно (10), получим

$$\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}1;\mathcal{I}_{\alpha,\beta}\left(\rho\right)\right)_C=\int\limits_{-\pi}^{\pi}|t|K\left(\rho,t\right)dt=2\int\limits_{0}^{\pi}tK\left(\rho,t\right)dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi t\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[1+\alpha k\left(1+\rho\right)\left(1-\rho\right)^\beta\right]\rho^k\cos kt\right)dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi t\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos kt\right)dt+\frac{2}{\pi}\alpha\left(1+\rho\right)\left(1-\rho\right)^\beta\int\limits_0^\pi t\left(\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^k\cos kt\right)dt. \tag{14}$$

В работе Е.Л. Штарка [4] показано, что для первого интеграла из правой части равенства (14) при $\rho\to 1-$ имеет место полное асимптотическое разложение

$$\int\limits_0^\pi t\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos kt\right)dt=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}(1-\rho)^k\ln\frac{1}{1-\rho}+\gamma_k\left(1-\rho\right)^k\right\}, \tag{15}$$

$$\gamma_k = \frac{1}{k}\left(\ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{2^{-j}}{j}\right), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Преобразуем теперь второй интеграл из правой части равенства (14)

$$\int_0^{\pi} t\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k \cos kt\right)dt = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k \int_0^{\pi} t\cos kt dt = -2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\rho^{2j-1}}{2j-1}.$$

Используя формулу (1.513.1) из [15]

$$\ln\frac{1+\rho}{1-\rho} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\rho^{2k-1},$$

получим

$$\alpha(1+\rho)(1-\rho)^{\beta}\int_0^{\pi} t\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k \cos kt\right)dt = -\alpha(1+\rho)(1-\rho)^{\beta}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho} =$$

$$= \alpha(1-\rho)^{\beta}(1+\rho)\left[\ln(1-\rho) - \ln(1+\rho)\right] =$$

$$= \alpha(1-\rho)^{\beta}\left[\{2-(1-\rho)\}\ln(1-\rho) - (1+\rho)\ln(1+\rho)\right]. \qquad (16)$$

Подставляя (15) и (16) в (14), будем иметь

$$\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}1; \mathcal{I}_{\alpha,\beta}(\rho)\right)_C == \frac{2\alpha}{\pi}(1-\rho)^{\beta}\left[2\ln(1-\rho) - (1-\rho)\ln(1-\rho) - (1+\rho)\ln(1+\rho)\right] +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}(1-\rho)^k \ln\frac{1}{1-\rho} + \gamma_k(1-\rho)^k\right\}, \quad \rho \to 1-. \qquad (17)$$

Разлагая функцию $\varphi(\rho) = -(1+\rho)\ln(1+\rho)$ в ряд Тейлора по степеням $(1-\rho)$, будем иметь

$$-(1+\rho)\ln(1+\rho) = -2\ln 2 + (1+\ln 2)(1-\rho) - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1-\rho)^k}{k(k-1)2^{k-1}}.$$

Выполняя тождественные преобразования в квадратных скобках выражения (17), находим

$$2\ln(1-\rho) - (1-\rho)\ln(1-\rho) - (1+\rho)\ln(1+\rho) = \ln(1-\rho)^2 +$$

$$+(1-\rho)\ln\frac{1}{(1-\rho)} + \ln\frac{1}{4} + (1+\ln 2)(1-\rho) - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1-\rho)^k}{k(k-1)2^{k-1}}.$$

Подставляя последнее соотношение в формулу (17), получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что при $\alpha = 0$, получим уже известный результат Е.Л. Штарка [4], а в случае $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\beta = 1$ будем иметь результат Л.П. Фалалеева [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Натансон, И.П. О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона/ И.П. Натансон // Докл. АН СССР. – 1950. – Т. 72, № 1 – С. 11–14.

2. Тимман, А.Ф. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона / А.Ф. Тиман // Докл. АН СССР. – 1950. – Т. 74, № 1 – С. 17–20.

3. Малей, Л.В. Точная оценка приближения квазигладких функций интегралами Пуассона / Л.В. Малей // Докл. АН БССР. Сер. физ.-техн. – 1961, №3. – С.25–32.

4. Штарк, Э.Л. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip1 от их сингулярного интеграла Абеля-Пуассона / Э.Л. Штарк // Мат. заметки. – 1973. – 13, № 1. – С. 21–28.

5. Баскаков, В.А. О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля-Пуассона / В.А. Баскаков // Мат. заметки. – 1975. – Т. 17, № 2. – С. 169–180.

6. Баусов, Л.И. Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. I / Л.И. Баусов // Изв. вузов. Математика. – 1965. – Т. 46, № 3. – С. 15–31.

7. Zhyhallo, K.M. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals / K.M. Zhyhallo,Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – 54, №1. – P. 51–63.

8. Zhyhallo, K.M. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel-Poisson integrals / K.M. Zhyhallo,Yu.I. Kharkevych. // Ukr. Math. Journal. – 2009. – 61, №1. – P. 86–98.

9. Каниев, С. Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений / С. Каниев // Докл АН СССР. – 1963. – 153, № 5. – С. 995–998.

10. Pych, P. On a biharmonic function in unit disc / P. Pych // Ann. pol. math. – 1968. – 20, № 3. – P. 203 – 213.

11. Фалалеев, Л.П. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $Lip_1 1$ от одного сингулярного интеграла / Л.П. Фалалеев // Теоремы вложения и их приложения: материалы всесоюзного симпозиума. – Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1976. – С. 163–167.

12. Аманов, Т.И. Приближение дифференцируемых функций операторами типа Абеля-Пуассона / Т.И. Аманов, Л.П. Фалалеев // 5-е Советско-Чехословацкое совещание по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики, Алма-Ата, 1976: тр. совещания. – Новосибирск, 1979. – С. 13–16.

13. Zhyhallo, K.M. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals/ K.M. Zhyhallo,Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – 54, №9. – P. 1462–1470.

14. Zhyhallo, K.M. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals / K.M. Zhyhallo,Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2009. – 61, №3. – P. 399–413.

15. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

T.N. Zhernova, I.V. Kalchuk, Yu.I. Kharkevich **On Approximation of the Function of Class** $\mathrm{Lip}\ 1$ **by Poisson-type Integrals**

In this paper we investigate the approximation properties of Poisson-type integrals, namely, we found a complete asymptotic decomposition for the least upper bound of the deviation the functions from the class $\mathrm{Lip}1$ of their Poisson-type integrals in the uniform metric.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 17.05.13