УДК 539.12:530.145

В.А. Плетюхов

МАТРИЧНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ КИРАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1

С использованием кратных (повторяющихся) неприводимых представлений группы Лоренца в подходе Гельфанда–Яглома дана матричная формулировка релятивистского волнового уравнения для частицы со спином 1 и дополнительным внутренним квантовым числом, являющимся аналогом понятия киральности в теории дираковских частиц.

Введение

Как известно (см., напр., [1–4]), использование кратных (повторяющихся) неприводимых представлений группы Лоренца в теории релятивистских волновых уравнений (РВУ) позволяет описывать не только спиновые свойства микрообъектов, но и их внутреннюю структуру, в том числе дополнительные (изоспиновые) степени свободы в рамках не распадающихся по группе Лоренца уравнений.

В работе [5] на примере спина 3/2 показано, как можно в рамках подхода Гельфанда–Яглома [6] ввести понятие киральности для частиц с ненулевой массой, используя кратные представления. Ещё больший интерес в этом смысле представляет собой теория киральной частицы со спином 1, поскольку к настоящему времени имеются экспериментальные указания в пользу существования таких частиц (см. [7] и приведенные здесь ссылки).

В настоящей работе на основе вышеуказанного подхода предложена матричная интерпретация теории частицы со спином 1, ненулевой массой и дополнительным внутренним квантовым числом – киральностью. Дана также тензорная форма построенного РВУ.

Матричная интерпретация теории киральной частицы со спином 1 в подходе Гельфанда–Яглома

Рассмотрим схему зацеплений неприводимых представлений группы Лоренца

$$\begin{array}{ccccc} & \diagup & \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)' & \diagdown & \\ (0,1) & & & & (1,0) \\ & \diagdown & \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & \diagup & \end{array} \qquad (1)$$

с точки зрения возможности построения на её основе релятивистского волнового уравнения первого порядка для частицы со спином 1, ненулевой массой и дополнительной (помимо спина) внутренней степенью свободы. Данная схема содержит два представления $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, которые неразличимы по отношению к собственной группе Лоренца, но могут отличаться поведением при операции пространственного отражения.

Матрица γ_4, играющая основную роль в РВУ стандартного вида

$$\left(\gamma_\mu \partial_\mu + m\right)\psi = 0 \qquad (2)$$

в подходе Гельфанда–Яглома (все необходимые сведения, касающиеся подхода Гельфанда–Яглома, можно найти в работе [5]), в рассматриваемом случае имеет блочно-диагональную структуру

$$\gamma_4 = C^0 \otimes \left(C^1 \otimes I_3\right), \tag{3}$$

где C^0, C^1 – спиновые блоки, соответствующие спинам 0 и 1 в том смысле, что если блок C^S имеет ненулевые собственные значения, то частица обладает спином S. И поскольку содержащиеся в схеме (1) представления $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)'$, которые формируют спиновый блок C^0, между собой не зацепляются, то этот блок размерности 2×2 является нулевым. Другими словами, на основе схемы зацеплений (1) РВУ, описывающее частицу со спином 0, построить нельзя.

Для исследования блока C^1 введём следующую нумерацию входящих в (1) неприводимых представлений:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \sim 1,\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)' \sim 2,\ (0, 1) \sim 3,\ (1, 0) \sim 4.$$

Тогда для блока C^1 получается общее выражение

$$C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 0 & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где c_{ij} – произвольные комплексные числа, на которые требование инвариантности РВУ (2) относительно преобразований собственной группы Лоренца в данном случае никаких ограничений не накладывает.

Условие инвариантности РВУ (2) относительно операции пространственного отражения (P-инвариантность) приводит к ограничениям

$$c_{14} = \pm\, c_{13}, \qquad c_{41} = \pm c_{31}, \qquad c_{24} = \pm c_{23}, \qquad c_{42} = \pm c_{32}. \tag{5}$$

При этом знак «+» в соотношениях (5) берётся тогда, когда представления $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)'$ являются истинно векторными; знак «–» берётся при псевдовекторном характере указанных представлений. Следовательно, при одинаковом характере обоих представлений (одновременно векторном или псевдовекторном) спиновый блок C^1 (4) принимает вид

$$C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13} & \pm c_{13} \\ 0 & 0 & c_{23} & \pm c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 \\ \pm c_{31} & \pm c_{32} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где верхние (нижние) знаки коррелируют между собой.

Спиновый блок C^1 (6) имеет характеристический полином

$$\lambda^4 - 2\lambda^2\left(c_{13}\,c_{31} + c_{23}\,c_{32}\right) = 0, \tag{7}$$

из которого следует, что два собственных значения этого блока равны нулю. Ненулевой корень $\pm\sqrt{2\left(c_{13}\,c_{31} + c_{23}\,c_{32}\right)}$ является единственным (с точностью до знака). Таким образом, РВУ (2) со схемой зацеплений (1), спиновым блоком C^1 (6) матрицы γ_4 (3) описывает частицу с массой

$$\frac{m}{\sqrt{2(c_{13}\,c_{31}+c_{23}\,c_{32})}},$$

спином 1 и не содержит изоспиновых степеней свободы. При выборе $2(c_{13}\,c_{31}+c_{23}\,c_{32})=1$ данное РВУ сводится к известному уравнению Даффина–Кеммера [8; 9] для векторной частицы, базирующемуся на схеме зацеплений

$$(0,1)-\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)-(1,0).$$

Остается рассмотреть случай, когда одно из представлений $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ в схеме зацеплений (1) – истинно векторное, а второе $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)'$ – псевдовекторное. Тогда условие P-инвариантности теории приводит к соотношениям

$$c_{14}=c_{13}, \qquad c_{41}=c_{31}, \qquad c_{24}=-c_{23}, \qquad c_{42}=-c_{32}, \tag{8}$$

и мы получаем следующее выражение для спинового блока C^1:

$$C^1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13} & c_{13} \\ 0 & 0 & c_{23} & -c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 \\ c_{31} & -c_{32} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Характеристический полином блока C^1 (9) имеет вид

$$\lambda^4-2\lambda^2(c_{13}\,c_{31}+c_{23}\,c_{32})+4\,c_{13}\,c_{31}\,c_{23}\,c_{32}=0. \tag{10}$$

Его корни равны

$$\lambda_1=\pm\sqrt{2c_{13}\,c_{31}}, \qquad \lambda_2=\pm\sqrt{2C_{23}\,C_{32}}. \tag{11}$$

Последнее означает, что в общем случае полученное РВУ описывает частицу со спином 1 и двумя массами: $m_1=m\big/\sqrt{2c_{13}\,c_{31}}$, $m_2=m\big/\sqrt{2c_{23}\,c_{32}}$.

Нас интересует случай, когда $m_1=m_2$, то есть когда выполняется условие

$$c_{13}\,c_{31}=c_{23}\,c_{32}. \tag{12}$$

При условии (12) мы приходим к РВУ для частицы со спином 1, одной массой и двукратным вырождением состояний по некоторому дополнительному квантовому числу, смысл которого будет выяснен ниже.

Произвол в выборе элементов c_{13}, c_{31}, c_{23}, c_{32}, остающийся после наложения на них условия (12) и очевидных требований вещественности и положительности выражений $c_{13}\,c_{31}$, $c_{23}\,c_{32}$, используем для построения лагранжевой формулировки теории. Лагранжиан уравнения (2) можно представить в виде

$$L=-\bar{\psi}(\gamma_\mu\,\partial_\mu+m)\psi, \tag{13}$$

где $\bar{\psi}=\psi^+\eta$, η – матрица лоренц-инвариантной билинейной формы $\bar{\psi}\psi$. В базисе Гельфанда–Яглома матрица η имеет аналогичную (3) структуру

$$\eta=\eta^0\oplus(\eta^1\otimes I_3), \tag{14}$$

где

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} \eta_{11}^0 & \\ & \eta_{22}^0 \end{pmatrix}, \qquad \eta^1 = \begin{pmatrix} \eta_{11}^1 & & & \\ & \eta_{12}^1 & & \\ & & 0 & \eta_{34}^1 \\ & & \eta_{43}^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Элементы η_{ij}^S в (15) без уменьшения общности могут быть выбраны равными ± 1 [10] и при этом

$$\eta_{11}^0 = -\eta_{11}^1, \qquad \eta_{22}^0 = -\eta_{22}^1, \qquad \eta_{43}^1 = \eta_{34}^1. \tag{16}$$

Требование релятивистской инвариантности лагранжиана (13) приводит к соотношениям

$$c_{31}\eta_{11}^1 = c_{13}^*\eta_{34}^1, \qquad c_{32}\eta_{22}^1 = c_{23}^*\eta_{34}^1. \tag{17}$$

Условия (12), (16), (17) будут удовлетворены, если положить, например,

$$c_{13} = c_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{18}$$

$$-\eta_{11}^0 = \eta_{22}^0 = \eta_{11}^1 = -\eta_{22}^1 = \eta_{34}^1 = 1. \tag{19}$$

Тогда для блоков C^1, η^0, η^1 получаем окончательно вид

$$C^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \qquad \eta^1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Выражения (3), (20) определяют матрицу γ_4 в РВУ (2), остальные матрицы γ_i находится по формуле

$$\gamma_i = \left[I^{i4}, \gamma_4 \right]_-, \tag{22}$$

где I^{i4} – «бусты» представления (1). Параметр m в (2) выступает при этом в роли массы частицы.

Тензорная формулировка

Тензорная форма построенного в предыдущем пункте матричного РВУ имеет вид

$$\begin{aligned} &\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + m\psi_\mu = 0, \\ &\partial_\nu \tilde{\psi}_{[\mu\nu]} + m\hat{\psi}_\mu = 0, \\ &-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha \tilde{\psi}_\beta + m\psi_{[\mu\nu]} = 0, \end{aligned} \tag{23}$$

где величины ψ_μ, $\tilde{\psi}_\mu$, $\psi_{[\mu\nu]}$ сопоставляются представлениям $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)'$, $(0,1)\oplus(1,0)$ соответственно, $\tilde{\psi}_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\psi_{[\alpha\beta]}$, $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ – тензор Леви–Чивита $(\varepsilon_{1234} = -i)$. В этом нетрудно убедиться, если записать систему (23) в матричной форме (2) в тензорном базисе

$$\psi = \left(\psi_\mu, \tilde{\psi}_\mu, \psi_{[\mu\nu]}\right) - \text{ столбец} \tag{24}$$

и найти минимальные полиномы матриц γ_μ в обоих случаях. Они оказываются совпадающими, а именно:

$$\gamma_\mu\left(\gamma_\mu^2 - 1\right) = 0\,. \tag{25}$$

Отсюда следует, что обе формулировки (Гельфанда–Яглома и тензорная) связаны преобразованием подобия, т.е. эквивалентны.

Осуществляя в системе (23) подстановки

$$\begin{aligned} &\varphi_\mu = \psi_\mu - i\tilde{\psi}_\mu\,, \qquad \varphi_{[\mu\nu]} = \psi_{[\mu\nu]} - i\tilde{\psi}_{[\mu\nu]}\,, \\ &\chi_\mu = \psi_\mu + i\tilde{\psi}_\mu\,, \qquad \chi_{[\mu\nu]} = \psi_{[\mu\nu]} + i\tilde{\psi}_{[\mu\nu]}\,, \end{aligned} \tag{26}$$

преобразуем её к прямой сумме двух 7-компонентных систем

$$\begin{aligned} &\partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]} + m\varphi_\mu = 0\,, \\ &-\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu + i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha \varphi_\beta + m\varphi_{[\mu\nu]} = 0\,; \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} &\partial_\nu \chi_{[\mu\nu]} + m\,\chi_\mu = 0\,, \\ &-\partial_\mu \chi_\nu + \partial_\nu \chi_\mu - i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha \chi_\beta + m\chi_{[\mu\nu]} = 0\,. \end{aligned} \tag{28}$$

Отметим, во-первых, что системам (27), (28) по отдельности нельзя сопоставить лагранжиан, удовлетворяющий стандартным в теории РВУ требованиям. Лагранжева формулировка возможна для этих систем лишь при их совместном рассмотрении. Во-вторых, каждая из систем (27) и (28) инвариантна в смысле собственной группы Лоренца, но при операции P-инверсии они переходят друг в друга. Так что в смысле полной группы Лоренца система (27), (28) (а значит и система (23)) является нераспадающейся.

Наконец, очевидно, что двукратно вырожденные состояния векторной частицы, описываемой системой (23), связаны меду собой операцией P-инверсии. Следовательно, дополнительное внутреннее квантовое число, о котором говорилось в предыдущем пункте, различает указанные P-сопряжённые состояния и может трактоваться как киральность по аналогии с понятием киральности для безмассовых частиц. Иными словами, каждая из систем (27), (28) описывает векторную частицу с определенным значением этого квантового числа – киральную частицу со спином 1 и ненулевой массой.

Заключение

Итак, использование расширенного (включая кратные) набора неприводимых представлений группы Лоренца позволяет в рамках теории РВУ для частиц с ненулевой массой учитывать дополнительные помимо спина внутренние степени свободы. Как показано в данной работе на примере частицы со спином 1, одной из таких степеней свободы может быть квантовое число, являющееся аналогом понятия киральности в теории безмассовых частиц. Следует отметить, что для построения теории безмассовых киральных частиц со спиральностью S достаточно использования представлений $(0,S)$ и $(S,0)$, причём понятия киральности и спиральности, по-существу, совпадают. Для частиц с ненулевой массой это, очевидно, уже не так: понятия киральности и спиральности (проекции спина на направление импульса) здесь имеют различный смысл, а теория РВУ таких частиц базируется с необходимостью на наборе зацепляющихся неприводимых представлений группы Лоренца, включая кратные (см. также [5]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плетюхов, В.А. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 0 / В.А. Плетюхов, Ф.И. Фёдоров // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 2. – С. 79–85.

2. Плетюхов, В.А. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 1 / В.А. Плетюхов, Ф.И. Фёдоров // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 3. – С. 84–92.

3. Богуш, А.А. Уравнение для частицы со спином 1/2, обладающей аномальным магнитным моментом / А.А. Богуш, В.В. Кисель // Известия вузов. Физика. – 1984. – № 1. – С. 23–27.

4. Плетюхов, В.А. Тензорные уравнения и дираковские частицы с внутренними степенями свободы / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // ЯФ. – 1989. – Т. 49. – С. 1505–1514.

5. Плетюхов, В.А. Релятивистское волновое уравнение для киральной частицы со спином 3/2 / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Веснік Брэсцкага ўн-та. Сер. Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 30–36.

6. Гельфанд, И.М. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И.М. Гельфанд, А.М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т.18. – Вып. № 8. – С. 703–733.

7. Чижов, М.В. Теория и феноменология киральных частиц со спином 1 / М.В. Чижов // ЭЧАЯ. – 2011. – Т. 42. – Вып. 1. – С. 169–350.

8. Duffin, R.J. On the characteristic matrices of covariant systems / R.J. Duffin // Phys. Rev/ – 1938. – Vol. 54. – P. 1114.

9. Kemmer, H. The particles aspect of meson theory / H. Kemmer // Proc. Roy. Soc. – 1939. – Vol. A173. – P.91–116.

10. Фёдоров Ф.И. Обобщенные релятивистские волновые уравнения / Ф.И. Фёдоров // ДАН СССР. – 1952. – Т. 82. – С. 37–40.

V.A. Pletyukhov. Relativistic* W*ave Equation for Chiral Particle with spin 1

Nondissociating P- invariant relativistic wave equation for chiral particle with spin 1 is obtained. Matrix and tensor formulations of this equation are considered.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 24.09.2013