УДК 513.82

Е.В. Зубей, А.А. Юдов

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СВЯЗНЫХ ПОДГРУПП ЛИ ГРУППЫ ЛИ ВРАЩЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО

В работе исследуются связные подгруппы Ли группы Ли вращений пространства Минковского. Находятся инвариантные плоскости и прямые для таких групп Ли и их образы стационарности.

Инвариантные объекты играют важную роль для характеристики исследуемой группы движений. Целью данной работы является нахождение инвариантных подпространств подгрупп Ли группы Ли движений пространства Минковского и их образов стационарности.

Рассмотрим четырехмерное псевдоевклидово пространство индекса 1, т. е. пространство ${}^{1}R_4$ – пространство Минковского. Пусть G – группа Ли движений пространства Минковского, H – группа Ли вращений пространства Минковского, $\overline{G}$ – алгебра Ли группы Ли G, $\overline{H}$ – алгебра Ли группы Ли H. Рассмотрим в пространстве ${}^{1}R_4$ базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\overline{e}_1^2 = -1$, $\overline{e}_2^2 = \overline{e}_3^2 = \overline{e}_4^2 = 1, (\overline{e}_i, \overline{e}_j) = 0, i \neq j$. Базис $i_1, i_2, \ldots i_{10}$ в алгебре Ли $\overline{G}$ зададим следующим образом:

$$i_1 = E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_2 = E_{23} + E_{32}, i_6 = E_{24} + E_{42}, i_7 = E_{25} + E_{52},$$

$$i_8 = E_{34} - E_{43}, i_9 = E_{35} - E_{53}, i_{10} = E_{45} - E_{54},$$

где $E_{\alpha\beta}$ – (5×5)-матрица, у которой в α-й строке β-м столбце стоит единица, а остальные элементы нули.

Для векторов пространства $\overline{H}$ определяется операция $[a, b]$ – коммутирование, а сам результат называется коммутатором.

Чтобы вектор a с координатами $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ был инвариантен относительно подгруппы Ли G_i с алгеброй Ли $\overline{G_i}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $a \cdot c = \lambda \cdot a,$ где c – любое из $\overline{G_i}$. В частности, вместо c достаточно брать вектора базиса $\overline{G_i}$.

Чтобы подпространство $\{a, b\}$ было инвариантно относительно подгруппы G_i необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$a \cdot c = \lambda \cdot a + \mu \cdot b, b \cdot c = \nu \cdot a + \sigma \cdot b. \quad (1)$$

Будем рассматривать алгебру Ли $\overline{H}$. Элементы базиса этой алгебры будем задавать в виде: $i_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $i_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $i_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$i_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; i_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; i_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В данной работе находятся инвариантные одномерные и двумерные подпространства для групп Ли G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}, G_{11}, G_{12} и G_{13}, соответствующих алгебрам Ли $\overline{G_1}$, $\overline{G_2}$, $\overline{G_3}$, $\overline{G_4}$, $\overline{G_5}$, $\overline{G_6}$, $\overline{G_7}$, $\overline{G_8}$, $\overline{G_9}$, $\overline{G_{10}}$, $\overline{G_{11}}$, $\overline{G_{12}}$ и $\overline{G_{13}}$, задаваемых соответственно базисами $\{i_9\},\{i_6\},\{i_5-i_8\},\{i_9+\lambda i_6\}$, $\{i_6,i_9\},\{i_5-i_8,i_7+i_{10}\}$, $\{i_5-i_8,i_6\},\{i_5-i_8,i_7+i_{10},i_6\}$, $\{i_5-i_8,i_7+i_{10},i_9\}$, $\{i_5-i_8,i_7+i_{10},i_9+\lambda i_6\},\{i_8,i_9,i_{10}\},\{i_5,i_6,i_8\}$, $\{i_5-i_8,i_7+i_{10},i_9,i_6\}$.

Рассмотрим группу G_1. Найдем одномерные инвариантные подпространства. Система инвариантности имеет вид:

$$a\cdot i_9=(a_1,a_2,a_3,a_4)\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}=(0,-a_4,0,a_2)=\mu\cdot a. \qquad (2)$$

Отсюда следует система: $\begin{cases}\mu\cdot a_1=0,\\ \mu\cdot a_2=-a_4,\\ \mu\cdot a_3=0,\\ \mu\cdot a_4=a_2.\end{cases}$

Решив данную систему можно сделать вывод, что при $\mu=0$ инвариантное подпространство имеет вид: $\{e_1+e_3\}$; при $\mu\neq 0$ решений нет.

Рассмотрим двумерные инвариантные подпространства. Система инвариантности имеет вид:

$$\begin{cases}a\cdot i_9=\nu\cdot a+\sigma\cdot b,\\ b\cdot i_9=p\cdot a+q\cdot b.\end{cases} \qquad (3)$$

Систему можно переписать в виде:

$$\begin{cases}\nu\cdot a_1+\sigma\cdot b_1=0,\nu\cdot a_2+\sigma\cdot b_2=-a_4,\nu\cdot a_3+\sigma\cdot b_3=0,\nu\cdot a_4+\sigma\cdot b_4=a_2,\\ p\cdot a_1+q\cdot b_1=0,p\cdot a_2+q\cdot b_2=-b_4,p\cdot a_3+q\cdot b_3=0,p\cdot a_4+q\cdot b_4=b_2.\end{cases} \qquad (4)$$

Достаточно рассмотреть 6 случаев:

1^0. $a_1=1,a_2=0,b_1=0,b_2=1$;

2^0. $a_1=1,a_3=0,b_1=0,b_2=0,b_3=1$;

3^0. $a_1=1,a_4=0,b_1=0,b_2=0,b_3=0,b_4=1$;

4^0. $a_1=0,a_2=1,a_3=0,b_1=0,b_2=0,b_3=1$;

5^0. $a_1=0,a_2=1,a_4=0,b_1=0,b_2=0,b_3=0,b_4=1$;

6^0. $a_1=0,a_2=0,a_3=1,a_4=0,b_1=0,b_2=0,b_3=0,b_4=1;$.

Рассмотрим случай 1^0. Получаем систему:

$$\begin{cases}\nu\cdot 1+\sigma\cdot 0=0,\nu\cdot 0+\sigma\cdot 1=-a_4,\nu\cdot a_3+\sigma\cdot b_3=0,\nu\cdot a_4+\sigma\cdot b_4=0,\\ p\cdot 1+q\cdot 0=0,p\cdot 0+q\cdot 1=-b_4,p\cdot a_3+q\cdot b_3=0,p\cdot a_4+q\cdot b_4=1.\end{cases} \qquad (5)$$

Перепишем данную систему в виде:

$$\begin{cases}\nu=0,\sigma=-a_4,\nu\cdot a_3+\sigma\cdot b_3=0,\nu\cdot a_4+\sigma\cdot b_4=0,\\ p=0,q=-b_4,p\cdot a_3+q\cdot b_3=0,p\cdot a_4+q\cdot b_4=1.\end{cases} \qquad (6)$$

Подставив уравнение $q=-b_4$ в уравнение $q\cdot b_4=1$, можно заметить, что в случае 1^0 система инвариантности противоречива. Следовательно, можно сделать вывод, что относительно $G_1=\{i_9\}$ в случае 1^0 нет инвариантных двумерных пространств.

Рассмотрим случай 2^0. Получаем систему:

$$\begin{cases} \nu\cdot 1+\sigma\cdot 0=0, \nu\cdot a_2+\sigma\cdot 0=-a_4, \nu\cdot 0+\sigma\cdot 1=0, \nu\cdot a_4+\sigma\cdot b_4=a_2, \\ p\cdot 1+q\cdot 0=0, p\cdot a_2+q\cdot 0=-b_4, p\cdot 0+q\cdot 1=0, p\cdot a_4+q\cdot b_4=0. \end{cases} \quad (7)$$

Перепишем данную систему в виде:

$$\begin{cases} \nu=0, \sigma=0, a_4=0, a_2=0, \\ p=0, q=0, -b_4=0. \end{cases} \quad (8)$$

Из решения системы следует, что вектор a имеет вид $a(1{,}0{,}0{,}0)$, а вектор $b(0{,}0{,}1{,}0)$. Таким образом, инвариантное пространство имеет вид $\{e_1, e_3\}$.

Рассмотрим случай 3^0. Получаем систему:

$$\begin{cases} \nu\cdot 1+\sigma\cdot 0=0, \nu\cdot a_2+\sigma\cdot 0=0, \nu\cdot a_3+\sigma\cdot 0=0, \nu\cdot 0+\sigma\cdot 1=a_2, \\ p\cdot 1+q\cdot 0=0, p\cdot a_2+q\cdot 0=-1, p\cdot a_3+q\cdot 0=0, p\cdot 0+q\cdot 1=0. \end{cases} \quad (9)$$

Перепишем данную систему в виде:

$$\begin{cases} \nu=0, \sigma=a_2, \\ p=0, p\cdot a_2=-1, q=0. \end{cases} \quad (10)$$

Из предпоследнего уравнения системы видно, что система инвариантности противоречива. Следовательно, можно сделать вывод, что относительно $G_1=\{i_9\}$ в случае 3^0 нет инвариантных двумерных пространств.

Рассмотрим случай 4^0. Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \nu\cdot 0+\sigma\cdot 0=0, \nu\cdot 1+\sigma\cdot 0=-a_4, \nu\cdot 0+\sigma\cdot 1=0, \nu\cdot a_4+\sigma\cdot b_4=1, \\ p\cdot 1+q\cdot 0=0, p\cdot 1+q\cdot 0=-b_4, p\cdot 0+q\cdot 1=0, p\cdot a_4+q\cdot b_4=0. \end{cases} \quad (11)$$

Перепишем данную систему в виде:

$$\begin{cases} \nu=-a_4, \sigma=0, \nu\cdot a_4=1, \\ p=-b_4, q=0, p\cdot a_4=0. \end{cases} \quad (12)$$

Подставив первое уравнение системы в третье, получим $\nu^2=-1$. Из данного уравнения видно, что система инвариантности противоречива. Следовательно, можно сделать вывод, что относительно $G_1=\{i_9\}$ в случае 4^0 нет инвариантных двумерных пространств.

Рассмотрим случай 5^0. Получаем систему:

$$\begin{cases} \nu\cdot 0+\sigma\cdot 0=0, \nu\cdot 1+\sigma\cdot 0=0, \nu\cdot a_3+\sigma\cdot 0=0, \nu\cdot 0+\sigma\cdot 1=1, \\ p\cdot 0+q\cdot 0=0, p\cdot 1+q\cdot 0=-1, p\cdot a_3+q\cdot 0=0, p\cdot 0+q\cdot 1=0. \end{cases} \quad (13)$$

Перепишем данную систему в виде:

$$\begin{cases} \nu=0, \nu\cdot a_3=0, \sigma=1, \\ p=-1, q=0, p\cdot a_3=0. \end{cases} \quad (14)$$

Из решения системы следует, что $a_3=0$, а, следовательно, вектор a имеет вид $a(0{,}1{,}0{,}0)$, а вектор $b(0{,}0{,}0{,}1)$. Таким образом, инвариантное пространство имеет вид $\{e_2, e_4\}$.

Рассмотрим случай 6^0. Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \nu \cdot 0 + \sigma \cdot 0 = 0, \nu \cdot 0 + \sigma \cdot 0 = 0, \nu \cdot 1 + \sigma \cdot 0 = 0, \nu \cdot 0 + \sigma \cdot 1 = 0, \\ p \cdot 0 + q \cdot 0 = 0, p \cdot 0 + q \cdot 0 = -1. \end{cases} \quad (15)$$

Из последнего уравнения системы видно, что система инвариантности противоречива. Следовательно, можно сделать вывод, что относительно $G_1 = \{i_9\}$ в случае 6^0 нет инвариантных двумерных пространств.

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. Относительно группы G_1 инвариантны только одномерные пространства $\{pe_1 + qe_3\}$; и следующие двумерные подпространства: $\{e_1, e_3\}$ и $\{e_2, e_4\}$.

Теорема 2. Относительно группы G_2 инвариантны такие одномерные пространства, как: $\{e_1 + e_3\}, \{e_1 - e_3\}, \{pe_2 + qe_4\}$, и только следующие двухмерные подпространства: $\{e_1 + e_3, e_2 + \lambda e_4\}$, $\{e_1, e_3\}$, $\{e_2, e_4\}$, $\{e_1 + e_3, e_2\}$, $\{e_1 + e_3, e_4\}$, а также трехмерные подпространства: $\{e_1 + e_3, e_2, e_4\}$, $\{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$, $\{pe_2 + qe_4, e_1, e_3\}$.

Теорема 3. Относительно группы G_3 инвариантны только следующие одномерные и двумерные подпространства: $\{e_1 - e_3\}$, $\{e_1 - e_3, e_2\}$ и $\{e_1 - e_3, e_4\}$, а также трехмерное подпространство $\{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Теорема 4. Относительно группы G_4 инвариантны только следующие одномерные и двумерные подпространства: $\{e_1 + e_3\}, \{e_1 - e_3\}$, $\{e_1, e_3\}$, $\{e_2, e_4\}$, а также трехмерные подпространства: $\{e_1 + e_3, e_2, e_4\}$, $\{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Рассмотрим группу G_5. Найдем одномерные инвариантные подпространства. Система инвариантности имеет вид:

$$\begin{cases} a \cdot i_6 = \lambda \cdot a, \\ a \cdot i_9 = \mu \cdot a. \end{cases} \quad (16)$$

В этом случае данная система приводится к виду:

$$a_3 = \lambda\, a_1, a_1 = \lambda\, a_3, \lambda a_2 = 0, \lambda a_4 = 0, \mu a_1 = 0, \mu a_3 = 0, a_2 = -\mu^2 a_2, a_4 = \mu^2 a_4 \quad (17)$$

Решив данную систему, можно сделать вывод, что при $\lambda = 0$ и $\mu = 0$ решений нет; при $\lambda = 0$ и $\mu \neq 0$ решений нет; при $\lambda \neq 0$ и $\mu = 0$ инвариантное подпространство имеет вид: $\{e_1 + e_3\}$; при $\lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$ решений нет.

Рассмотрим двумерные инвариантные подпространства. Система инвариантности имеет вид:

$$\begin{cases} a \cdot i_6 = \lambda \cdot a + \mu \cdot b, \\ a \cdot i_9 = \nu \cdot a + \sigma \cdot b, \\ b \cdot i_6 = s \cdot a + t \cdot b, \\ b \cdot i_9 = p \cdot a + q \cdot b. \end{cases} \quad (18)$$

Перепишем данную систему в виде:

$$\begin{cases} \lambda \cdot a_1 + \mu \cdot b_1 = a_3, \lambda \cdot a_2 + \mu \cdot b_2 = 0, \lambda \cdot a_3 + \mu \cdot b_3 = a_1, \lambda \cdot a_4 + \mu \cdot b_4 = 0, \\ \nu \cdot a_1 + \sigma \cdot b_1 = 0, \nu \cdot a_2 + \sigma \cdot b_2 = -a_4, \nu \cdot a_3 + \sigma \cdot b_3 = 0, \nu \cdot a_4 + \sigma \cdot b_4 = a_2, \\ s \cdot a_1 + t \cdot b_1 = b_3, s \cdot a_2 + t \cdot b_2 = 0, s \cdot a_3 + t \cdot b_3 = b_1, s \cdot a_4 + t \cdot b_4 = 0, \\ p \cdot a_1 + q \cdot b_1 = 0, p \cdot a_2 + q \cdot b_2 = -b_4, p \cdot a_3 + q \cdot b_3 = 0, p \cdot a_4 + q \cdot b_4 = b_2. \end{cases} \quad (19)$$

Рассматриваем 6 случаев. В случае 1^0 система инвариантности примет вид:

$$\mu = 0, a_3^2 = 1, a_3 a_4 = 0, -a_4 b_3 = 0, -a_4 b_4 = 1, -b_4^2 = 1. \quad (20)$$

Из последнего уравнения системы видно, что в случае 1^0 система инвариантности противоречива.

В случае 2^0 система инвариантности примет вид:

$$\lambda = 0,\ \mu = 1,\ b_4 = 0,\ s = 1,\ t = 0,\ a_2 = 0,\ a_4 = 0,\ \nu = 0,\ \sigma = 0,\ p = 0,\ q = 0. \quad (21)$$

Из решения системы следует, что вектор a имеет вид $a(1,0,0,0)$, а вектор $b(0,0,1,0)$. Таким образом, получаем инвариантное подпространство в виде $\{e_1, e_3\}$.

В случаях 3^0 и 4^0 системы инвариантности противоречивы.

В случае 5^0 из системы инвариантности следует:

$$\lambda = 0,\ \mu = 0,\ s = 0,\ t = 0,\ a_3 = 0,\ \nu = 0,\ \sigma = 1,\ p = -1,\ q = 0. \quad (22)$$

Следовательно, вектор a имеет вид $a(0,1,0,0),$), а вектор $b(0,0,0,1)$. Таким образом, получаем инвариантное подпространство в виде: $\{e_2, e_4\}$.

В случае 6^0 система инвариантности противоречива. Таким образом, получена следующая теорема.

Теорема 5. Относительно группы G_5 инвариантны только следующие одномерные и двумерные подпространства: $\{e_1 + e_3\}, \{e_1 - e_3\}$, $\{e_1, e_3\}$ и $\{e_2, e_4\}$, а также трехмерные подпространства: $\{e_1 + e_3, e_2, e_4\}$, $\{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Рассмотрим группу G_6, соответствующую алгебре Ли $\overline{G_6}$, задаваемой базисом $\{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}\}$. Введем обозначения:

$$A = \{i_5 - i_8\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$B = \{i_7 + i_{10}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Рассмотрим одномерные инвариантные подпространства. Система инвариантности имеет вид:

$$a \cdot A = \lambda \cdot a, a \cdot B = \mu \cdot a. \quad (25)$$

В этом случае данная система приводится к виду:

$$\lambda a_1 = a_2, \lambda a_2 = a_1 + a_3, \lambda a_3 = -a_2, \lambda a_4 = 0, \mu a_1 = a_4, \mu a_2 = 0, \mu a_3 = -a_4, \mu a_4 = a_1 + a_3.$$

Решив эту систему, получаем, что инвариантное подпространство имеет вид: $\{e_1 - e_3\}$.

Если рассмотрим двумерные инвариантные подпространства, то система инвариантности имеет вид:

$$aA = \lambda a + \mu b, aB = \nu a + \sigma b, bA = sa + tb, bB = pa + qb. \quad (26)$$

Аналогично рассматривая 6 случаев, получаем теорему.

Теорема 6. Относительно группы G_6 инвариантны только следующие одномерные и двумерные подпространства: $\{e_1 - e_3\}$, $\{e_1 - e_3, e_2 + \lambda e_4\}, \{e_1 - e_3, e_2\}$ и $\{e_1 - e_3, e_4\}$, а также трехмерное подпространство $\{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Теорема 7. Относительно группы G_7 инвариантны только следующие одномерные и двумерные подпространства: $\{e_1 - e_3\}$, $\{e_1 - e_3, e_2\}$ и $\{e_1 - e_3, e_4\}$, а также трехмерное подпространство $\{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Теорема 8. Относительно группы G_8 инвариантны только следующие одномерные и двумерные подпространства: $\{e_1 - e_3\}$, $\{e_1 - e_3, e_2 + \lambda e_4\}, \{e_1 - e_3, e_2\}$ и $\{e_1 - e_3, e_4\}$, а также трехмерное подпространство $\{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Теорема 9. Относительно группы G_9 инвариантны только следующие одномерное и трехмерное подпространства: $\{e_1 - e_3\}$, $\{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Теорема 10. Относительно группы G_{10} инвариантны только следующие одномерное и трехмерное подпространства: $\{e_1 - e_3\}$, $\{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Теорема 11. Относительно группы G_{11} инвариантны только следующие одномерное и трехмерное подпространства: $\{e_1\}$, $\{e_2, e_3, e_4\}$.

Теорема 12. Относительно группы G_{12} инвариантны только следующие одномерное и трехмерное подпространства: $\{e_4\}$, $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Теорема 13. Относительно группы G_{13} инвариантны только следующие одномерное и трехмерное подпространства: $\{e_1 - e_3\}$, $\{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Инвариантные прямые и плоскости

Рассмотрим группу G_1. Относительно нее инвариантны только следующие прямые: $[0, p\overline{e_1} + q\overline{e_3}]$, а также 2-плоскости: $[0, \overline{e_1}, \overline{e_3}]$ и $[0, \overline{e_2}, \overline{e_4}]$. Инвариантна относительно группы G_1 и 3-плоскость $[0, a_3\overline{e_1} + a_1\overline{e_3}, \overline{e_2}, \overline{e_4}]$.

Относительно группы G_2 инвариантны только следующие прямые: $[0, \overline{e_1} \pm \overline{e_3}]$ и $[0, p\overline{e_2} + q\overline{e_4}]$, а также инвариантны 2-плоскости: $[0, \overline{e_1} + \overline{e_3}, \overline{e_2}]$,$[0, \overline{e_1} + \overline{e_3}, \overline{e_4}]$, $[0, \overline{e_1}, \overline{e_3}]$, $[0, \overline{e_2}, \overline{e_4}]$. Инвариантны относительно группы G_2 и 3-плоскости: $[0, \overline{e_1} \pm \overline{e_3}, \overline{e_2}, \overline{e_4}]$.

Рассмотрим группу G_3. Относительно нее инвариантны только следующие прямые: $[0, \overline{e_1} - \overline{e_3}]$, а также 2-плоскости: $[0, \overline{e_1} - \overline{e_3}, \overline{e_2}]$, $[0, \overline{e_1} - \overline{e_3}, \overline{e_4}]$. Инвариантна относительно группы G_3 и 3-плоскость $[0, \overline{e_1} - \overline{e_3}, \overline{e_2}, \overline{e_4}]$.

Рассмотрим группу G_4. Относительно нее инвариантны только следующие прямые: $[0, \overline{e_1} \pm \overline{e_3}]$, а также 2-плоскости: $[0, \overline{e_1}, \overline{e_3}]$, $[0, \overline{e_2}, \overline{e_4}]$. Инвариантна относительно данной группы и 3-плоскости: $[0, \overline{e_1} \pm \overline{e_3}, \overline{e_2}, \overline{e_4}]$.

Относительно группы G_5 инвариантны только следующие прямые: $[0, \overline{e_1} \pm \overline{e_3}]$, а также 2-плоскости: $[0, \overline{e_1}, \overline{e_3}]$, $[0, \overline{e_2}, \overline{e_4}]$. Инвариантна относительно данной группы и 3-плоскости: $[0, \overline{e_1} \pm \overline{e_3}, \overline{e_2}, \overline{e_4}]$.

Относительно группы G_6 инвариантны только прямые: $[0, \overline{e_1} - \overline{e_3}]$, а также 2-плоскости: $[0, \overline{e_1} - \overline{e_3}, \overline{e_2}]$, $[0, \overline{e_1} - \overline{e_3}, \overline{e_4}]$, $[0, \overline{e_1} - \overline{e_3}, \overline{e_2} + \lambda\overline{e_4}]$. Инвариантна относительно группы G_6 и 3-плоскость $[0, \overline{e_1} - \overline{e_3}, \overline{e_2}, \overline{e_4}]$.

Рассмотрим группу G_7. Относительно нее инвариантны только прямые $[0,\overline{e_1}-\overline{e_3}]$ и $[0,\overline{e_4}]$, а также 2-плоскости: $[0,\overline{e_1}-\overline{e_3},\overline{e_2}]$ и $[0,\overline{e_1}-\overline{e_3},\overline{e_4}]$. Инвариантны относительно группы G_7 и 3-плоскости $[0,\overline{e_1}-\overline{e_3},\overline{e_2},\overline{e_4}]$ и $[0,\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}]$.

Рассмотрим группу G_8. Относительно нее инвариантны только прямые $[0,\overline{e_1}-\overline{e_3}]$, а также 2-плоскости: $[0,\overline{e_1}-\overline{e_3},\overline{e_2}]$, $[0,\overline{e_1}-\overline{e_3},\overline{e_4}]$, $[0,\overline{e_1}-\overline{e_3},\overline{e_2}+\lambda\overline{e_4}]$. Инвариантна относительно группы G_8 и 3-плоскость $[0,\overline{e_1}-\overline{e_3},\overline{e_2},\overline{e_4}]$.

Относительно групп G_9, G_{10} и G_{13} инвариантна прямая $[0,\overline{e_1}-\overline{e_3}]$ и 3-плоскость $[0,\overline{e_1}-\overline{e_3},\overline{e_2},\overline{e_4}]$.

Относительно группы G_{11} инвариантна прямая $[0,\overline{e_1}]$ и 3-плоскость $[0,\overline{e_2},\overline{e_3},\overline{e_4}]$.

Относительно группы G_{12} инвариантна прямая $[0,\overline{e_4}]$ и 3-плоскость $[0,\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}]$.

Образы стационарности групп Ли

Рассмотрим группу $G_1=\{i_9\}$, где

$$i_9=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим произвольный элемент из алгебры вращений $\begin{pmatrix}0&\alpha&\beta&\gamma\\\alpha&0&\delta&\varepsilon\\\beta&-\delta&0&\omega\\\gamma&-\varepsilon&-\omega&0\end{pmatrix}$.

Относительно группы G_1 инвариантны только одномерные пространства $\{pe_1+qe_3\}$; и следующие двумерные подпространства: $\{e_1,e_3\}$ и $\{e_2,e_4\}$.

Зафиксируем $\overline{e_1}$. Рассмотрим вектор $(1,0,0,0)$ и потребуем, чтобы он был инвариантен.

$$(1{,}0{,}0{,}0)\cdot\begin{pmatrix}0&\alpha&\beta&\gamma\\\alpha&0&\delta&\varepsilon\\\beta&-\delta&0&\omega\\\gamma&-\varepsilon&-\omega&0\end{pmatrix}=(0,\alpha,\beta,\gamma)=\lambda\cdot\overline{e_1}=(\lambda{,}0{,}0{,}0).$$

Из этого следует, что $\alpha=0,\beta=0,\gamma=0$.

Зафиксируем $\overline{e_3}$. Рассмотрим вектор $(0,0,1,0)$ и потребуем, чтобы он был инвариантен.

$$(0{,}0{,}1{,}0)\cdot\begin{pmatrix}0&\alpha&\beta&\gamma\\\alpha&0&\delta&\varepsilon\\\beta&-\delta&0&\omega\\\gamma&-\varepsilon&-\omega&0\end{pmatrix}=(\beta,-\delta,0,\omega)=\mu\cdot\overline{e_3}=(0{,}0,\mu{,}0).$$

Из этого следует, что $\beta = 0, \delta = 0, \omega = 0$.

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 14. Среди подгрупп Ли $G_1 - G_{13}$ образы стационарности имеют только следующие подгруппы Ли: G_1, G_2, G_3, G_5, G_6, G_8, G_9, G_{11}, G_{12} и G_{13}. Образы стационарности этих подгрупп Ли задаются соответственно в виде:

1) для G_1 образ стационарности – $\{R_0, \overset{0}{{}^1R_2}\}$;
2) для G_2 образ стационарности – $\{R_0, \overset{0}{R_2}\}$;
3) для G_3 образ стационарности – $\{R_0, \overset{0}{R_2^1}\}$;
4) для G_5 образ стационарности – $\{R_0, {}^1R_2\}$;
5) для G_6 образ стационарности – $\{R_0, \overset{0}{R_1^1}, R_2^1\}$;
6) для G_8 образ стационарности – $\{R_0, R_1^1, R_2^1\}$;
7) для G_9 образ стационарности – $\{R_0, \overset{0}{R_1^1}\}$;
8) для G_{11} образ стационарности – $\{R_0, {}^1R_1\}$;
9) для G_{12} образ стационарности – $\{R_0, R_1\}$;
10) для G_{13} образ стационарности – $\{R_0, R_1^1\}$;

где 0 сверху обозначает точечную неподвижность соответствующей k-плоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юдов, А. А. Канонический лифт подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и её алгебру Ли. Проблема эквивалентности подмногообразий. О классификации одномерных подмногообразий пространства ${}^2R_4$ / А. А. Юдов // Деп. ВИНИТИ. – Минск, 1989. – № 1498-В89.

2. Юдов, А.А. О редуктивности однородных пространств с фундаментальной группой G – группой движений пространства $1R4$ / А.А. Юдов, О.В. Пинчук // Вестник БрГУ. – 2011. – № 1. – С. 123–128.

3. Юдов, А.А. Исследование однородных пространств с фундаментальной группой G – группой движений пространства ${}^2R_4$ / А.А.Юдов, Е.Е. Гурская // Вестник БрГУ. – 2008. – № 1(30). – С. 35–41.

***E.V. Zubej, A.A. Yudov* Geometric Characteristics Connected Subgroup of a Lie Group of Rotations of Minkowski**

This paper investigates the connected subgroup of a Lie group of rotations of Minkowski space. Are invariant planes and lines for such Lie groups and their images are stationary.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 25.04.14