УДК 513.82

А.А. Юдов, Н.С. Ковалик

КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОМЕРНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО, ИМЕЮЩИХ КАСАТЕЛЬНУЮ МНИМОЕВКЛИДОВА И ЕВКЛИДОВА ТИПА

В работе изучаются одномерные подмногообразия пространства Минковского. Рассматривается класс многообразий, касательная прямая которым во всех точках является прямой мнимоевклидова и евклидова типа. Для таких многообразий строится канонический репер и находятся дифференциальные инварианты, определяющие указанные многообразия с точностью до движений пространства Минковского.

Постановка задачи и метод исследования

Группу Ли G движений пространства ${}^1R_4$ будем задавать как совокупность матриц вида

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}$, а 4×4 матрица A удовлетворяет условию

$$A\varepsilon_{4,1}A^{\mathrm{T}} = \varepsilon_{4,1}, \tag{2}$$

где $\varepsilon_{4,1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Алгебра Ли $\overline{G}$ будет задаваться как совокупность матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & B \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где 4×4 матрица B удовлетворяет условию $B\varepsilon_{4,1}+\varepsilon_{4,1}B=0$.

Точки пространства ${}^1R_4$ будем задавать в виде

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x. \tag{4}$$

Группа G действует в пространстве ${}^1R_4$ слева по правилу

$$x \to a{\cdot}x. \tag{5}$$

Группа Ли G является полупрямым произведением группы Ли H стационарности точки пространства ${}^1R_4$ и абелевой группы T_4 параллельных переносов пространства:

$${}^1R_4\colon G = H \otimes T_4. \tag{6}$$

Алгебра Ли $\overline{G}$ является полупрямой суммой алгебры Ли $\overline{H}$ группы Ли H и коммутативной алгебры Ли τ_4 группы Ли T_4:

$$\overline{G} = \overline{H} \oplus \tau_4. \tag{7}$$

Базис в алгебре Ли $\overline{G}$ группы Ли G движений пространства ${}^1R_4$ берется следующим образом:

$$i_1 = E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_2 = E_{23} + E_{32}, i_6 = E_{24} + E_{42}, i_7 = E_{25} + E_{52},$$
$$i_8 = E_{34} - E_{43}, i_9 = E_{35} - E_{53}, i_{10} = E_{45} - E_{54}, \tag{8}$$

где $E_{\alpha\beta}$ – (5×5)-матрица, у которой в α-й строке, β-м столбце стоит единица, а остальные элементы – нули. Причем векторы i_5, i_6, …, i_{10} образуют базис алгебры Ли $\overline{H}$ группы Ли H, векторы i_1, i_2, i_3, i_4 образуют базис алгебры τ_4, а операция коммутирования в алгебре Ли $\overline{G}$ задается в виде

$$[A, B] = AB–BA,\ A, B \in \overline{G}. \tag{9}$$

Классификация связных подгрупп Ли группы Ли движений пространства Минковского с точностью до сопряженности имеется [1]. Всего среди подгрупп Ли группы Ли вращений пространства Минковского получается 13 подгрупп Ли: $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}, G_{11}, G_{12}, G_{13}$. Алгебры Ли $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$, $\overline{G}_4$, $\overline{G}_5$, $\overline{G}_6$, $\overline{G}_7$, $\overline{G}_8$, $\overline{G}_9$, $\overline{G}_{10}$, $\overline{G}_{11}$, $\overline{G}_{12}$, $\overline{G}_{13}$, этих групп Ли задаются соответственно базисами $\{i_9\}$, $\{i_6\}$, $\{i_5 - i_8\}$, $\{i_9 + \lambda i_6\}$, $\{i_6, i_9\}$, $\{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}\}$, $\{i_5 - i_8, i_6\}$, $\{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_6\}$, $\{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9\}$, $\{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9 + \lambda i_6\}$, $\{i_8, i_9, i_{10}\}$, $\{i_5, i_6, i_8\}$, $\{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9, i_6\}$.

Тем самым классифицированы с точностью до изоморфизма все однородные пространства со структурной группой G. В данной работе классифицируются все одномерные подмногообразия пространства Минковского, касательное пространство к которым является пространством действительного, евклидова и мнимоевклидова типа.

Классификация кривых пространства Минковского

При классификации одномерных подмногообразий пространства Минковского используются результаты работ[2] и [3].

Рассмотрим одномерные подмногообразия пространства ${}^1R_4$. Пусть (D_0, f) – одномерное подмногообразие (кривая) пространства ${}^1R_4$, причем D_0 – интервал на числовой прямой, содержащий точку ноль и $\pi(e) = f(0)$. Рассмотрим касательное пространство $K_1 = T_{\pi(e)}(I_m f)$ к подмногообразию (D_0, f) в точке $\pi(e)$. Пространство K_1 может быть либо евклидовым, либо мнимоевклидовым, либо изотропным. Ниже классифицируются по эквивалентности относительно основной группы одномерные подмногообразия, имеющие в каждой точке евклидово касательное пространство, а также одномерные подмногообразия, имеющие в каждой точке мнимоевклидово касательное пространство.

Предположим, что касательное подпространство к подмногообразию (D_0, f) в каждой точке $x_0 \in D_0$ мнимоевклидова типа. Пусть $K_1 = T_{\pi(e)}(I_m f) = \{i_1\}$. Ему соответствует прообраз $K_1' = d\pi_e^{-1}(K_1) = \{i_1, i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}\}$. Группа стационарности H_1 пространства K_1 в H-пространстве Q_1 всех одномерных подпространств пространства

$T_{\pi(e)}\left({}^1R_4\right)$ может быть найдена как группа стационарности пространства K_1' в H-пространстве Z_1 (см. [34]) $Z_1 = \left\{d\pi_e^{-1}(\mathrm{K})\middle|\mathrm{K} \in Q_1\right\}$. H_1 определяется условием:

$$H_1 = \left\{h \in H \middle| Adh(\mathrm{K}_1') = \mathrm{K}_1'\right\}, \tag{10}$$

а ее алгебра Ли H_1 условием:

$$\mathrm{H}_1 = \left\{v \in \mathrm{H} \middle| adv(\mathrm{K}_1') = [v, \mathrm{K}_1'] \subset \mathrm{K}_1'\right\}. \tag{11}$$

Пусть

$$v = \lambda i_5 + \mu i_6 + v i_7 + \sigma i_8 + s i_9 + t i_{10} \in \mathrm{H}, \tag{12}$$

$$k = i_1 + \alpha i_5 + \beta i_6 + \gamma i_7 + \delta i_8 + p i_9 + q i_{10} \in \mathrm{K}_1'. \tag{13}$$

Тогда

$$adv(k) = [v, k] = \lambda i_2 + \mu i_3 + v i_4 + \psi, \tag{14}$$

где $\psi \in \mathrm{H}$.

По условию $adv(k) \in \mathrm{K}_1'$ получим: λ = т0, μ = 0, ν = 0. Таким образом, $\mathrm{H}_1 = \{i_8, i_9, i_{10}\}$ и совпадает с $\overline{G_{11}}$, а группа H_1 совпадает с G_{11}. Условие (4) из [2] $\dim H = \dim H_1 = \dim Q_1$ выполняется, поэтому размерность G-орбиты пространства K_1 во множестве Γ_1 равна размерности множества Γ_1. Отсюда следует, что подмногообразие (D_0, f) в некоторой окрестности нуля продолжается в G-орбиту элемента K_1, изоморфную G/H_1. Группа G_{11} образует следующую цепочку по включению:

$$G_{11} \supset G_1. \tag{15}$$

Выясним, какие цепочки возможны для следующих подмногообразий. Система Пфаффа, определяющая пространство K_1', имеет вид:

$$\omega^2 = 0,\ \omega^3 = 0,\ \omega^4 = 0. \tag{16}$$

Найдем внешние дифференциалы форм этой системы и приравняем их к нулю (продолжим систему):

$$\omega^1 \wedge \omega_1^2 + \omega^3 \wedge \omega_3^2 + \omega^4 \wedge \omega_4^2 = 0,\ \omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3 + \omega^4 \wedge \omega_4^3 = 0,$$

$$\omega^1 \wedge \omega_1^4 + \omega^2 \wedge \omega_2^4 + \omega^3 \wedge \omega_3^4 = 0. \tag{17}$$

Отсюда в силу системы (16):

$$\omega^1 \wedge \omega_1^2 = 0,\ \omega^1 \wedge \omega_1^3 = 0,\ \omega^1 \wedge \omega_1^4 = 0. \tag{18}$$

Применив лемму Картана, получим:

$$\omega_1^2 = \lambda\omega^1,\ \omega_1^3 = \mu\omega^1,\ \omega_1^4 = v\omega^1. \tag{19}$$

Вместе с (16) получим систему

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0,\ \omega_1^2 = \lambda\omega_1,\ \omega_1^3 = \mu\omega_1,\ \omega_1^4 = v\omega_1. \tag{20}$$

Эта система определяет подпространство $\mathrm{K}_2' = d\pi_{1e}^{-1}\left(T_{\pi_1(e)}\left(\mathrm{I}_m f_1\right)\right)$ алгебры $\overline{G}$ [2, § 1,2]. Пространство K_2', определяемое системой (20), состоит из векторов:

$$\left\{ti_1 + \lambda ti_5 + \mu ti_6 + vti_7 + ri_8 + si_9 + \sigma i_{10}\right\}, \tag{21}$$

где r, s, σ – произвольные, а λ, μ, ν – фиксированные числа.

Надо изучить H_1 – орбиты пространств вида (21) при всевозможных λ, μ, ν. Найдем группу стационарности H_2 пространства K'_2 и ее алгебру Ли H_2. Алгебра Ли H_2 определяется условием: $\mathsf{H}_2 = \{v \in \mathsf{H}_1 \| [v, \mathsf{K}'_1] \subset \mathsf{K}'_1\}$.

Пусть $v = \alpha i_8 + \beta i_9 + \gamma i_{10}$, тогда условие $[v, \mathsf{K}'_1] \subset \mathsf{K}'_1$ приводит к системе:

$$\mu\alpha + \nu\beta = 0,\ \lambda\alpha - \nu\gamma = 0,\ \lambda\beta + \mu\gamma = 0. \tag{22}$$

Из этих уравнений только два независимые, поэтому группа стационарности любого пространства K'_2 (21) одномерная. Одномерные группы Ли, входящие в G_{11}, – это только группа G_1 или ей сопряженные. Рассмотрим конкретные подпространства вида (21). Если в качестве K'_2 взять подпространство $\mathsf{K}^{1'}_2 = \{ti_1 + \lambda ti_5 + ri_8 + si_9 + \sigma i_{10}\}$, т.е. $\mu = \nu = 0$, то группой стационарности будет (см. (22)) группа $G_1 = H_2^1$. Мы получили все группы стационарности (с точностью до сопряженности) пространств вида (22). Данный случай надо рассмотреть.

Условие (4) из [2] не выполняется: $\dim H_1 - \dim H_2 = 3 - 1 \prec 6 = \dim Q_2$. Поэтому подмногообразие (D_0, f_1) автоматически в G-орбиту пространства K^i_2 не продолжается. Предположим, что данное подмногообразие продолжается в орбиту, соответствующую группе H_2^1.

Тогда $d\pi_{1e}^{-1} = \left(T_{\pi_1(e)}(\mathsf{I}_m f_1)\right) = \mathsf{K}^{1'}_2$. Система Пфаффа, определяющая пространство $\mathsf{K}^{1'}_2$, имеет вид:

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^3 = \omega_1^4 = 0,\ \omega_1^2 = \lambda\omega^1. \tag{23}$$

Коэффициент λ называется первым дифференциальным инвариантом подмногообразия (D_0, f) в точке $f(0)$.

Пусть (D_0, f_2) – продолжение подмногообразия (D_0, f_1) в G-орбиту пространства K^1_2 и $\mathsf{K}_3 = T_{f_2(0)}(\mathsf{I}_m f_2)$, $\mathsf{K}'_3 = d\pi_{2|e}^{-1}(\mathsf{K}_3)$, $\pi_2 : G \to G/H_2$. Продолжив систему (23) и применив лемму Картана, получим систему Пфаффа:

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^3 = \omega_1^4 = 0,\ \omega_1^2 = \lambda\omega^1,\ \omega_2^3 = \mu\omega^1,\ \omega_2^4 = \nu\omega^1, \tag{24}$$

которая будет определять подпространство K'_3, которое, следовательно, состоит из векторов: $\mathsf{K}'_3 = \{ti_1 + \lambda ti_5 + \mu ti_8 + \nu ti_9 + si_{10}\}$, λ, μ, ν – фиксированные, s – произвольные. Подействуем на пространство K'_3 преобразованием Adh, $h \in G_1$ так, чтобы привести его к простейшему виду. При этом пространства $\mathsf{K}^{1'}_2$, K^1_2, K'_1, K_1 не изменятся, а подмногообразие (D_0, f) перейдет в $(\mathsf{D}_0, T_h \circ f)$, эквивалентное исходному. Обозначим подмногообразие $(\mathsf{D}_0, T_h \circ f)$ опять через (D_0, f). То же относительно (D_0, f_1) и (D_0, f_2). Если выбрать h в виде

$$h=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&\cos\alpha&-\sin\alpha\\0&0&0&\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix},\tag{25}$$

то $Adh(\mathrm{K}'_3)$ примет вид:

$$Adh(\mathrm{K}'_3)=\{ti_1+\lambda ti_5+(\mu t\cos\alpha-\nu t\sin\alpha)i_8+(\mu t\sin\alpha+\nu t\cos\alpha)i_9+si_{10}\}.\tag{26}$$

Всегда можно выбрать α таким, что $\mu\sin\alpha+\nu\cos\alpha=0$. Выражение $\mu t\cos\alpha-\nu t\sin\alpha$ переобозначим через μ. Таким образом подмногообразие (D_0, f) всегда можно перевести в ему эквивалентное так, что пространство K'_3 примет вид $\mathrm{K}'_3=\{ti_1+\lambda ti_5+\mu ti_8+si_{10}\}$, а соответствующая ему система Пфаффа – вид

$$\omega^2=\omega^3=\omega^4=\omega_1^3=\omega_1^4=\omega_2^4=0,\ \omega_1^2=\lambda\omega^1,\ \omega_2^3=\mu\omega^1.\tag{27}$$

Коэффициент μ называется вторым дифференциальным инвариантом подмногообразия (D_0, f) в точке $f(0)$.

Найдем группу стационарности пространства K'_3 – группу H_3^1 с алгеброй Ли: $\mathrm{H}_3^1=\{v\in\mathrm{H}_2^1 \mid [v,\mathrm{K}'_3]\subset\mathrm{K}'_3\}$ и $H_3^1=\{h\in H_2^1 \mid Adh(\mathrm{K}'_3)=\mathrm{K}'_3\}$. Пусть $v=\alpha i_{10}$. Тогда $[v,\mathrm{K}'_3]=-\alpha\lambda ti_7+\mu t\alpha i_{10}-\alpha si_8$. Поскольку это должно принадлежать K'_3, то получим $\alpha=0$. Следовательно, алгебра Ли H_3^1 нулевая, а группа H_3^1 – дискретная. Выбирая в подпространствах K_1^1, K_2^1, K_3 ориентацию, сведем группу H_3^1 к единице. Условие (4) из [2] не выполняется: $\dim H_2^1-\dim H_3^1=1\prec 8=\dim Q_2$, поэтому в G-пространстве Γ_3 получаем континуум орбит, каждая из которых изоморфна группе G. Здесь надо проводить классификацию. Предположим, что многообразие (D_0, f_2) продолжается в орбиту пространства K_3 и (D_0, f_3) – соответствующее продолжение, пусть $\mathrm{K}_4=T_{f_3(0)}(\mathrm{I}_m f_3)$, $\mathrm{K}'_4=d\pi_{3|e}^{-1}(\mathrm{K}_4)$, $\pi_3: G\to G/H_3^1$. Продолжив систему (27) и применив лемму Картана, получим с учетом (27) систему Пфаффа

$$\omega^2=\omega^3=\omega^4=\omega_1^3=\omega_1^4=\omega_2^4=0,\ \omega_1^2=\lambda\omega^1,\ \omega_2^3=\mu\omega^1,\ \omega_3^4=\nu\omega^1,\tag{28}$$

которая будет определять подпространство K'_4, состоящее из векторов: $\mathrm{K}'_4=\{ti_1+\lambda ti_5+\mu ti_8+\nu ti_{10}\}$. Построение канонического репера для многообразия данного типа $H\supset G_{11}\supset G_1\supset e$ завершено. Такие многообразия определяются с произволом трех функций λ, μ, ν одного переменного, образующих полную систему дифференциальных инвариантов.

Теперь предположим, что касательное подпространство к подмногообразию (D_0, f) в каждой точке $x_0\in\mathrm{D}_0$ евклидова типа. Пусть $\mathrm{K}_1=T_{\pi(e)}(\mathrm{I}_m f)=\{i_2\}$. Ему соответствует прообраз $\mathrm{K}'_1=d\pi_e^{-1}(\mathrm{K}_1)=\{i_2,i_5,i_6,i_7,i_8,i_9,i_{10}\}$. Группа стационарности H_1 пространства K_1 в H-пространстве Q_1 всех одномерных подпространств пространства $T_{\pi(e)}({}^1R_4)$ может быть найдена как группа стационарности пространства K'_1 в H-пространстве Z_1 (см. [2]) $Z_1=\{d\pi_e^{-1}(\mathrm{K}) \mid \mathrm{K}\in Q_1\}$. H_1 определяется условием

$H_1 = \{h \in H \mid Adh(K_1') = K_1'\}$, а ее алгебра Ли H_1 условием $\mathrm{H}_1 = \{v \in \mathrm{H} \mid adv(K_1') = [v, K_1'] \subset K_1'\}$.

Пусть

$$v = \lambda i_5 + \mu i_6 + v i_7 + \sigma i_8 + s i_9 + t i_{10} \in \mathrm{H},$$
$$k = i_2 + \alpha i_5 + \beta i_6 + \gamma i_7 + \delta i_8 + p i_9 + q i_{10} \in K_1'. \quad (29)$$

Тогда:

$$adv(k) = [v, k] = \lambda i_1 - \sigma i_3 - s i_4 + \psi, \quad (30)$$

где $\psi \in \mathrm{H}$.

По условию $adv(k) \in K_1'$ получим: $\lambda = 0$, $\sigma = 0$, $s = 0$. Таким образом, $\mathrm{H}_1 = \{i_6, i_7, i_{10}\}$. Условие (4) из [2] $\dim H - \dim H_1 = \dim Q_1$ выполняется, поэтому размерность G-орбиты пространства K_1 во множестве Γ_1 равна размерности множества Γ_1. Отсюда следует, что подмногообразие (D_0, f) в некоторой окрестности нуля продолжается в G-орбиту элемента K_1, изоморфную G/H_1. Группа H_1 образует следующую цепочку по включению:

$$\mathrm{H}_1 \supset G_2. \quad (31)$$

Выясним, какие цепочки возможны для следующих подмногообразий. Система Пфаффа, определяющая пространство K_1', имеет вид:

$$\omega^1 = 0,\ \omega^3 = 0,\ \omega^4 = 0. \quad (32)$$

Найдем внешние дифференциалы форм этой системы и приравняем их к нулю (продолжим систему):

$$\omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^3 \wedge \omega_3^1 + \omega^4 \wedge \omega_4^1 = 0,\ \omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3 + \omega^4 \wedge \omega_4^3 = 0,$$
$$\omega^1 \wedge \omega_1^4 + \omega^2 \wedge \omega_2^4 + \omega^3 \wedge \omega_3^4 = 0. \quad (33)$$

Отсюда в силу системы (32):

$$\omega^1 \wedge \omega_1^2 = 0,\ \omega^1 \wedge \omega_2^3 = 0,\ \omega^1 \wedge \omega_2^4 = 0. \quad (34)$$

Применив лемму Картана, получим:

$$\omega_1^2 = \lambda \omega^2,\ \omega_2^3 = \mu \omega^2,\ \omega_2^4 = v \omega^2. \quad (35)$$

Вместе с (32) получим систему

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0,\ \omega_1^2 = \lambda \omega_1,\ \omega_1^3 = \mu \omega_1,\ \omega_1^4 = v \omega_1. \quad (36)$$

Эта система определяет подпространство $K_2' = d\pi_{1e}^{-1}\left(T_{\pi_1(e)}(\mathrm{I}_m f_1)\right)$ алгебры $\overline{G}$ [2, § 1, § 2]. Пространство K_2', определяемое системой (36), состоит из векторов:

$$\{t i_2 + \lambda t i_5 + r i_6 + s i_7 + \mu t i_8 + v t i_9 + \sigma i_{10}\}, \quad (37)$$

где r, s, σ – произвольные, а λ, μ, v – фиксированные числа.

Надо изучить H_1– орбиты пространств вида (37) при всевозможных λ, μ, v. Найдем группу стационарности H_2 пространства K_2' и ее алгебру Ли H_2. Алгебра Ли H_2 определяется условием:

$$\mathrm{H}_2 = \{v \in \mathrm{H}_1 \| [v, K_1'] \subset K_1'\}. \quad (38)$$

Пусть $v = \alpha i_6 + \beta i_7 + \gamma i_{10}$, тогда условие $[v, K_1'] \subset K_1'$ приводит к системе:

$$\mu\alpha + \nu\beta = 0,\ \lambda\alpha - \nu\gamma = 0,\ \lambda\beta + \mu\gamma = 0. \tag{39}$$

Из этих уравнений только два независимые, поэтому группа стационарности любого пространства K'_2 (37) одномерная. Одномерные группы Ли, входящие в H_1, – это только группа G_2 или ей сопряженные. Рассмотрим конкретные подпространства вида (37). Если в качестве K'_2 взять подпространство $K_2^{1'} = \{ti_2 + ri_6 + si_7 + \nu ti_9 + \sigma i_{10}\}$, т.е. $\lambda = \nu = 0$, то группой стационарности будет (см. (39)) группа $G_1 = H_2^1$. Мы получили все группы стационарности (с точностью до сопряженности) пространств вида (39). Данный случай надо рассмотреть.

Условие (4) из [2] не выполняется: $\dim H_1 - \dim H_2 = 3 - 1 < 6 = \dim Q_2$. Поэтому подмногообразие (D_0, f_1) автоматически в *G*-орбиту пространства K_2^i не продолжается. Здесь надо производить разбиение подмногообразий на классы.

Пусть подмногообразие (D_0, f) продолжается в подмногообразие (D_0, f_1) такое, что $d\pi_{1e}^{-1} = \left(T_{\pi_1(e)}(I_m f_1)\right) = K_2^{1'}$. Система Пфаффа, определяющая пространство $K_2^{1'}$, имеет вид:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = 0,\ \omega_2^4 = \nu\omega^2. \tag{40}$$

Коэффициент ν называется первым дифференциальным инвариантом подмногообразия (D_0, f) в точке *f*(0).

Пусть (D_0, f_2) – продолжение подмногообразия (D_0, f_1) в *G*-орбиту пространства K_2^1 и $K_3 = T_{f_2(0)}(I_m f_2)$, $K'_3 = d\pi_{2|e}^{-1}(K_3)$, $\pi_2 : G \to G/H_2$. Продолжив систему (40) и применив лемму Картана, получим систему Пфаффа:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = 0,\ \omega_2^4 = \nu\omega^2,\ \omega_1^4 = \varepsilon\omega^2,\ \omega_3^4 = \delta\omega^2, \tag{41}$$

которая будет определять подпространство K'_3, которое, следовательно, состоит из векторов:

$$K'_3 = \{ti_2 + ri_6 + \varepsilon ti_7 + \nu ti_9 + \delta ti_{10}\}, \tag{42}$$

где ε, ν, δ – фиксированные, r – произвольный параметр.

Подействуем на пространство K'_3 преобразованием *Adh*, $h \in G_1$ так, чтобы привести его к простейшему виду. При этом пространства $K_2^{1'}$, K_2^1, K'_1, K_1 не изменятся, а подмногообразие (D_0, f) перейдет в $(D_0, T_h \circ f)$, эквивалентное исходному. Обозначим подмногообразие $(D_0, T_h \circ f)$ опять через (D_0, f). То же относительно (D_0, f_1) и (D_0, f_2). Если выбрать *h* в виде

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ch\varphi & 0 & sh\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & sh\varphi & 0 & ch\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{43}$$

то $Adh(K'_3)$ примет вид:

$$Adh(K'_3) = \{ti_2 + ri_6 + (\varepsilon ch\varphi + \delta sh\varphi)ti_7 + \nu ti_9 + (\varepsilon sh\varphi + \delta ch\varphi)ti_{10}\}. \tag{44}$$

Здесь приходится рассматривать три случая.

1. Предположим, что $\varepsilon sh\varphi + \delta ch\varphi$=0. Тогда получаем условие:

$$e^{2\varphi} = \frac{1+p}{1-p} = \frac{\varepsilon - \delta}{\varepsilon + \delta} > 0, \tag{45}$$

где $th\varphi = -\frac{\delta}{\varepsilon} = p$.

Подмногообразие (D_0, f) можно перевести в ему эквивалентное так, что пространство K'_3 примет вид $\mathrm{K}'_3 = \{ti_2 + ri_6 + \mu ti_7 + \nu ti_9\}$.

2. Предположим, что $\varepsilon ch\varphi + \delta sh\varphi$=0. Тогда получаем условие:

$$e^{2\varphi} = -\frac{1+p}{1-p} = -\frac{\varepsilon - \delta}{\varepsilon + \delta} > 0, \tag{46}$$

где $th\varphi = -\frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{1}{p}$.

Подмногообразие (D_0, f) всегда можно перевести в ему эквивалентное так, что пространство K'_3 примет вид $\mathrm{K}'_3 = \{ti_2 + ri_6 + \nu ti_9 + \delta ti_{10}\}$.

3. Если $\varepsilon = -\delta$, тогда подмногообразие (D_0, f) всегда можно перевести в ему эквивалентное так, что пространство K'_3 примет вид $\mathrm{K}'_3 = \{ti_2 + ri_6 + \varepsilon t(i_7 - i_{10}) + \nu ti_9\}$.

Рассмотрим случай 1. Соответствующая $\mathrm{K}'_3 = \{ti_2 + ri_6 + \mu ti_7 + \nu ti_9\}$ система Пфаффа имеет вид:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = \omega_3^4 = 0,\ \omega_2^4 = \nu\omega^2,\ \omega_1^4 = \mu\omega^2. \tag{47}$$

Коэффициент μ называется вторым дифференциальным инвариантом подмногообразия (D_0, f) в точке $f(0)$.

Найдем группу стационарности пространства K'_3 – группу H_3^1 с алгеброй Ли: $\mathrm{H}_3^1 = \{v \in \mathrm{H}_2^1 | [v, \mathrm{K}'_3] \subset \mathrm{K}'_3\}$ и $H_3^1 = \{h \in H_2^1 | Adh(\mathrm{K}'_3) = \mathrm{K}'_3\}$. Пусть $v = \alpha i_6$. Тогда $[v, \mathrm{K}'_3] = \mu t\alpha i_{10}$. Поскольку это должно принадлежать K'_3, то получим α = 0. Следовательно, алгебра Ли H_3^1 нулевая, а группа H_3^1 – дискретная. Выбирая в подпространствах K_1^1, K_2^1, K_3 ориентацию, сведем группу H_3^1 к единице. Условие (4) из [2] не выполняется: $\dim H_2^1 - \dim H_3^1 = 1 < 8 = \dim Q_2$, поэтому в G-пространстве Γ_3 получаем континуум орбит, каждая из которых изоморфна группе G. Здесь надо проводить классификацию. Предположим, что многообразие (D_0, f_2) продолжается в орбиту пространства K_3 и (D_0, f_3) – соответствующее продолжение, пусть $\mathrm{K}_4 = T_{f_3(0)}(\mathrm{I}_m f_3)$, $\mathrm{K}'_4 = d\pi_{3|e}^{-1}(\mathrm{K}_4)$, $\pi_3 : G \to G/H_3^1$. Продолжив систему (47) и применив лемму Картана, получим систему Пфаффа:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = \omega_3^4 = 0,\ \omega_2^4 = \nu\omega^2,\ \omega_1^4 = \mu\omega^2,\ \omega_1^3 = \theta\omega^2, \tag{48}$$

которая будет определять подпространство K'_4, состоящее из векторов: $K'_4 = \{ti_2 + \theta ti_6 + \mu ti_7 + \nu ti_9\}$. Построение канонического репера для многообразия данного типа $H \supset H_1 \supset G_1 \supset e$ завершено. Такие многообразия определяются с произволом трех функций λ, μ, ν одного переменного, образующих полную систему дифференциальных инвариантов.

Рассмотрим случай 2. Соответствующая $K'_3 = \{ti_2 + ri_6 + \nu ti_9 + \delta ti_{10}\}$ система Пфаффа имеет вид:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = \omega_1^4 = 0,\ \omega_2^4 = \nu\omega^2,\ \omega_3^4 = \delta\omega^2. \qquad (49)$$

Коэффициент δ называется вторым дифференциальным инвариантом подмногообразия (D_0, f) в точке $f(0)$.

Найдем группу стационарности пространства K'_3 – группу H_3^1 с алгеброй Ли: $H_3^1 = \{v \in H_2^1 | [v, K'_3] \subset K'_3\}$ и $H_3^1 = \{h \in H_2^1 | Adh(K'_3) = K'_3\}$. Пусть $v = \alpha i_6$. Тогда $[v, K'_3] = \delta t\alpha i_7$. Поскольку это должно принадлежать K'_3, то получим $\alpha = 0$. Следовательно, алгебра Ли H_3^1 нулевая, а группа H_3^1 – дискретная. Выбирая в подпространствах K_1^1, K_2^1, K_3 ориентацию, сведем группу H_3^1 к единице. Условие (4) из [2] не выполняется: $\dim H_2^1 - \dim H_3^1 = 1 < 8 = \dim Q_2$, поэтому в G-пространстве Γ_3 получаем континуум орбит, каждая из которых изоморфна группе G. Здесь надо проводить классификацию. Предположим, что многообразие (D_0, f_2) продолжается в орбиту пространства K_3 и (D_0, f_3) – соответствующее продолжение, пусть $K_4 = T_{f_3(0)}(I_m f_3)$, $K'_4 = d\pi_{3|e}^{-1}(K_4)$, $\pi_3 : G \to G/H_3^1$. Продолжив систему (49) и применив лемму Картана, получим с учетом (49) систему Пфаффа:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = \omega_1^4 = 0,\ \omega_2^4 = \nu\omega^2,\ \omega_3^4 = \delta\omega^2,\ \omega_1^3 = \chi\omega^2, \qquad (50)$$

которая будет определять подпространство K'_4, состоящее из векторов: $K'_4 = \{ti_2 + \chi ti_6 + \nu ti_9 + \delta ti_{10}\}$. Построение канонического репера для многообразия данного типа $H \supset H_1 \supset G_1 \supset e$ завершено. Такие многообразия определяются с произволом трех функций ν, δ, χ одного переменного, образующих полную систему дифференциальных инвариантов.

Рассмотрим случай 3. Соответствующая $K'_3 = \{ti_2 + ri_6 + \varepsilon t(i_7 - i_{10}) + \nu ti_9\}$ система Пфаффа имеет вид:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = 0,\ \omega_2^4 = \nu\omega^2,\ \varepsilon\omega^2 - \frac{1}{2}\omega_1^4 + \frac{1}{2}\omega_3^4 = 0. \qquad (51)$$

Коэффициент ε называется вторым дифференциальным инвариантом подмногообразия (D_0, f) в точке $f(0)$.

Продолжив систему (51) и применив лемму Картана, получим систему Пфаффа:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = 0, \omega_2^4 = \nu\omega^2, \varepsilon\omega^2 - \frac{1}{2}\omega_1^4 + \frac{1}{2}\omega_3^4 = 0, \omega_1^3 = \sigma\omega^2, \qquad (52)$$

которая будет определять подпространство K'_4, состоящее из векторов: $K'_4 = \{ti_2 + \sigma ti_6 + \varepsilon t(i_7 - i_{10}) + \nu ti_9\}$.

Продолжив систему (52) и применив лемму Картана, получим систему Пфаффа:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = 0, \omega_2^4 = \nu\omega^2,$$
$$\omega_1^3 = \sigma\omega^2,\ \omega_1^4 = \delta\omega^2,\ \omega_3^4 = (\delta - 2\varepsilon)\omega^2, \qquad (53)$$

которая будет определять подпространство K'_5, состоящее из векторов: $K'_4 = \{ti_2 + \sigma ti_6 + \delta ti_7 + \nu ti_9 + (\delta - 2\varepsilon)ti_{10}\}$. Построение канонического репера для многообразия данного типа $H \supset H_1 \supset G_2 \supset e$ завершено. Такие многообразия определяются с произволом четырех функций ν, ε, σ, δ одного переменного, образующих полную систему дифференциальных инвариантов.

Вышеизложенные результаты исследования одномерных подмногообразий пространства ${}^1R_4$ можем сформулировать в виде следующих теорем.

Теорема 1. *Одномерные подмногообразия пространства ${}^1R_4$, касательные прямые к которым мнимоевклидовы, имеют только тип* $H \supset G_{11} \supset G_1 \supset e$ *и следующую характеризующую систему*:

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^3 = \omega_1^4 = \omega_2^4 = 0,\ \omega_1^2 = \lambda\omega^1,\ \omega_2^3 = \mu\omega^1,\ \omega_3^4 = \nu\omega^1$$

Такие подмногообразия определяются с произволом трех функций одного аргумента, образующих полную систему инвариантов.

Теорема 2. *Одномерные подмногообразия пространства ${}^1R_4$, касательные прямые к которым евклидовы, могут быть только типа* $H \supset H_1 \supset G_2 \supset e$, *которые по виду характеризующей системы разбиваются на три класса*:

1. $\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = \omega_3^4 = 0,\ \omega_2^4 = \nu\omega^2,\ \omega_1^4 = \mu\omega^2,\ \omega_1^3 = \theta\omega^2;$
2. $\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = \omega_1^4 = 0,\ \omega_2^4 = \nu\omega^2,\ \omega_3^4 = \delta\omega^2,\ \omega_1^3 = \chi\omega^2;$
3. $\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = 0, \omega_2^4 = \nu\omega^2, \omega_1^3 = \sigma\omega^2,\ \omega_1^4 = \delta\omega^2,\ \omega_3^4 = (\delta - 2\varepsilon)\omega^2.$

Подмногообразия первого и второго класса определяются с произволом трех функций одного аргумента, образующих полную систему инвариантов, а подмногообразия третьего класса – четырех функций одного аргумента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белько, И.В. Подгруппы группы Лоренца – Пуанкаре / И. В. Белько // Изв. Акад. наук БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1971. – № 1. – С. 5–13.

2. Юдов, А.А. Канонический лифт подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и её алгебру Ли. Проблема эквивалентности подмногообразий. О классификации одномерных подмногообразий пространства ${}^2R_4$ / А. А. Юдов. – Минск, 1989. – Деп. в ВИНИТИ, № 1498-В89.

3. Гурская, Е. Свойства присоединенного представления группы Ли движений пространства Минковского / Е. Гурская, А. Юдов // Вучоныя запіскі Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2011. – Вып. 7, – ч. 2. – С. 15–19.

A.A.Yudov, N.S.Kowalik. **Classification of One-Dimensional Submanifolds of Space ${}^1R_4$ Space Tangent Mnimoevklid and Evklid Type**

In this paper we study one-dimensional submanifold of Minkowski space. We consider the class of manifolds, tangent line at all points is a straight mnimoevklid and evklid type. For such manifolds constructed canonical frame and differential invariants are defining these varieties up to motions of Minkowski space.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 26.04.2013