УДК 539.12

О.В. Веко, К.В. Казмерчук, Е.М. Овсиюк

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ КЛЕЙНА–ФОКА–ГОРДОНА И ШРЕДИНГЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ ДЕ СИТТЕРА: СЛУЧАЙ НЕСТАТИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

Показано, что в расширяющейся Вселенной де Ситтера, параметризуемой нестатическими координатами, можно ввести обобщенное уравнение типа Шредингера для частицы со спином ноль, при этом оператор энергии определенным образом зависит от времени в соответствии с законом расширения Вселенной. Построены точные решения этого уравнения, движение по пространственным степеням свободы квантуется. Найденная зависимость волновой функции от времени такова, что решения не являются стационарными с фиксированными значениями энергии, при этом квадрат модуля волновой функции не зависит от времени, т. е. расширение Вселенной в некотором смысле скрыто от наблюдения. В нестатических координатах решено релятивистское уравнение Клейна–Фока–Гордона. Зависимость волновой функции от временной координаты описывается в терминах гипергеометрических функций, движение по пространственным степеням свободы квантуется так же, как и для нерелятивистской частицы. В релятивистском и нерелятивистском случаях найдены асимптотики решений при бесконечно больших временах в прошлом и будущем. Учтено неминимальное взаимодействие частиц с кривизной пространства через скаляр Риччи.

1. Нерелятивистский предел в теории скалярной частицы на фоне римановой геометрии

Рассмотрим вопрос о шредингеровском уравнении в римановом пространстве-времени. Будем исходить из общековариантной тензорной системы уравнений первого порядка, для общности анализа включим дополнительный член взаимодействия с внешним гравитационным фоном через скалярную кривизну:

$$(i\,\partial_\alpha + \frac{e}{c\hbar} A_\alpha)\,\Phi(x) = \frac{mc}{\hbar}\,\Phi_\alpha\,,$$

$$(\frac{i}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\sqrt{-g} + \frac{e}{c\hbar}\,A_\alpha)\,g^{\alpha\beta}\Phi_\beta = \frac{mc}{\hbar}\,\Gamma\,\Phi\,; \tag{1}$$

используем обозначение:

$$1 + \sigma\,\frac{R(x)}{m^2c^2/\hbar^2} = \Gamma(x), \qquad \sigma = \frac{1}{6}\,.$$

Рассматривая пространство-время с метрикой $dS^2 = c^2dt^2 + g_{kl}(x)\,dx^k dx^l$, проведем в (1) расщепление (3+1), выделим энергию покоя подстановками:

$$\Phi \Rightarrow \exp(-i\frac{mc^2t}{\hbar})\Phi\,, \qquad \Phi_0 \Rightarrow \exp(-i\frac{mc^2t}{\hbar})\Phi_0\,, \qquad \Phi_l \Rightarrow \exp(-i\frac{mc^2t}{\hbar})\Phi_l$$

и исключим векторную (нединамическую) переменную Φ_l. При этом из (1) получаем

$$(i\hbar\partial_t + mc^2 + eA_0)\Phi(x) = mc^2\Phi_0(x)\,, \qquad \left(i\hbar\partial_t + mc^2 + i\hbar\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial t} + eA_0\right)\Phi_0 +$$

$$+\frac{1}{m}\left[\,(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}}\,\partial_k\sqrt{-g} + \frac{e}{c}\,A_k)\,g^{kl}(i\,\hbar\,\partial_l + \frac{e}{c}A_l)\,\right]\Phi(x) = mc^2\,\Gamma\,\Phi(x)\,. \tag{2}$$

Вводим малую компоненту φ и большую компоненту Ψ [10], [11]:

$$\Phi - \Phi_0 = \varphi, \qquad \Phi + \Phi_0 = \Psi\,,$$

при этом из уравнений (2) получаем

$$(i\hbar\partial_t + eA_0)\frac{+\varphi + \Psi}{2} = -mc^2\varphi, \qquad \left(i\hbar\partial_t + i\hbar\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial t} + eA_0\right)\frac{\Psi - \varphi}{2} +$$

$$+\frac{1}{m}\left[\ (\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}}\partial_k\sqrt{-g} + \frac{e}{c}A_k)g^{kl}(i\hbar\partial_l + \frac{e}{c}A_l)\ \right]\frac{\Psi - \varphi}{2} = mc^2(\Gamma+1)\frac{\varphi}{2} + mc^2(\Gamma-1)\frac{\Psi}{2}. \quad (3)$$

Два разных случая следует рассматривать по отдельности. Первый случай реализуется, когда требуем выполнения равенства $\Gamma = 1$. Это означает, что начинать следовало в (1) только с учетом минимального взаимодействия скалярной частицы с гравитационным фоном без добавки, зависящей от скалярной кривизны $R(x)$. Тогда предыдущие уравнения дают (пренебрегаем малой компонентой φ по сравнению с большой Ψ)

$$(i\hbar\,\partial_t + eA_0)\,\frac{\Psi}{2} = -mc^2\,\varphi, \qquad \left(\ i\hbar\,\partial_t + i\hbar\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial t} + e\,A_0\ \right)\frac{\Psi}{2} +$$

$$+\frac{1}{m}\left[\ (\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}}\,\partial_k\sqrt{-g} + \frac{e}{c}\,A_k)\;g^{kl}(i\,\hbar\,\partial_l + \frac{e}{c}A_l)\ \right]\frac{\Psi}{2} = mc^2\,\varphi. \quad (4)$$

Исключая из второго уравнения малую компоненту с помощью первого уравнения, приходим к уравнению типа Шредингера:

$$\left[i\hbar(\partial_t + \frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial t}) + eA_0\right]\Psi = \frac{1}{2m}\left[(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}}\partial_k\sqrt{-g} + \frac{e}{c}A_k)(-g^{kl})(i\hbar\partial_l + \frac{e}{c}A_l)\right]\Psi. \quad (5)$$

В статической метрике определитель метрического тензора не зависит от нуля, соответственно член в левой части, связанный с производной по времени от $\sqrt{-g}$, исчезает. Если определитель зависит от времени согласно $\sqrt{-g} = \sqrt{g(t)}\sqrt{-g(x^1,x^2,x^3)}$, то подстановкой $\Psi = g(t)^{-1/4}\Phi(t,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$ уравнение (5) приводится к более простому виду:

$$(\ i\hbar\partial_t + eA_0)\Psi = \frac{1}{2m}\left[(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g(x)}}\partial_k\sqrt{-g(x)} + \frac{e}{c}\,A_k)(-g^{kl}(t,x))(i\hbar\partial_l + \frac{e}{c}A_l)\right]\Psi. \quad (6)$$

В случае $\Gamma \neq 1$ вместо (6) получим более общее уравнение:

$$\left[(1 + \frac{1}{24}\frac{\hbar^2 R(x)}{m^2c^2})(i\hbar\partial_t + eA_0) + \frac{i\hbar}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial t}\right]\Psi =$$

$$= \frac{1}{2m}\left[(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}}\partial_k\sqrt{-g} + \frac{e}{c}\,A_k)(-g^{kl})(i\hbar\partial_l + \frac{e}{c}A_l)] + \hbar^2\,\frac{R(x)}{6}\right]\Psi. \quad (7)$$

Полученное уравнение следует рассматривать как обобщенное уравнение Шредингера в пространстве-времени с ненулевой скалярной кривизной $R(x) \neq 0$, учитывающее неминимальное взаимодействие с внешним геометрическим фоном.

Сделаем несколько дополнительных замечаний. Нужно обратить внимание на то, что волновой функцией уравнения Шредингера – нерелятивистского предела исходного уравнения Клейна–Фока–Гордона – является вовсе не скалярная функция исходного уравнения Клейна–Фока–Гордона. В действительности мы имеем следующее представление:

$$\Psi = \Phi + \Phi_0, \qquad \Phi_0 \in \{\,\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\,\}. \quad (8)$$

Этот факт следует рассматривать как логичную необходимость. Действительно, пусть мы начинаем с вещественного поля частицы со спином 0. Взаимодействовать с электромагнитным полем такая частица не может, однако нерелятивистский предел по-прежнему должен существовать; при этом мы приходим к тому, что нерелятивистская волновая функция $\Psi(x)$ обязательно будет комплексной функцией. Действительно, в силу первого уравнения в (1) составляющая

$$\Phi_0 = i\frac{\hbar}{mc}\nabla_0\Phi\,, \qquad \Phi^* = +\Phi$$

является комплексной функцией координат. Данная ситуация тем более удовлетворительна еще и потому, что принципиально важно: невозможно написать уравнение Шредингера для вещественного поля – оно обязательно должно быть комплексным.

2. Уравнение Шредингера в пространстве де Ситтера, разделение переменных

Уравнение (7) при отсутствии электромагнитного поля упрощается

$$i\hbar\left[(1+\frac{1}{24}\lambda^2 R(x))\frac{\partial}{\partial_t}+\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial t}\right]\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_k\sqrt{-g}\,g^{kl}\partial_l - \frac{1}{6}R(x)\right)\Psi\,. \quad (9)$$

Будем рассматривать случай пространства де Ситтера, параметризованного нестатическими координатами [12]

$$dS^2 = c^2dt^2 - \rho^2\cosh^2\frac{ct}{\rho}\left[dr^2+\sin^2 r(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\right],\ R^2(x) = +\frac{1}{\rho^2}\,; \qquad (10)$$

дальше будем пользоваться безразмерными координатами. Координаты (t,r,θ,ϕ) связаны с 5-мерными координатами (они позволяют отождествить пространство де Ситтера с поверхностью в 5-мерном пространстве с группой движения $SO(4,1)$) соотношениями:

$$(\xi^0)^2-(\xi^1)^2-(\xi^2)^2-(\xi^3)^2-(\xi^4)^2 = -\rho^2 = -1\,,$$
$$\xi^1 = \cosh t\sin r\sin\theta\cos\phi\,, \qquad \xi^2 = \cosh t\sin r\sin\theta\sin\phi\,,$$
$$\xi^3 = \cosh t\sin r\cos\theta\,, \qquad \xi^0 = \sinh t, \qquad \xi^4 = \cosh t\cos r\,,$$
$$t\in(-\infty,+\infty), \qquad r\in[0,\pi], \qquad \theta\in[0,\pi], \qquad \phi\in[0,2\pi]. \qquad (11)$$

Будем использовать обозначение для комптоновской длины волны частицы $\lambda^2 = \hbar^2/(m^2c^2)$. Уравнение Шредингера принимает соответственно вид:

$$i\hbar\left[(1+\frac{1}{24}\frac{\lambda^2}{\rho^2})\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{4g}\frac{\partial g}{\partial t}\right]\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_k\sqrt{-g}\;g^{kl}\;\partial_l - \frac{1}{6}\frac{1}{\rho^2})\right)\Psi\,. \qquad (12)$$

Уравнение (12) можно упростить подстановкой

$$\Psi(x) = \varphi(t)\,\Phi(x), \qquad \mu = (1+\frac{1}{24}\frac{\lambda^2}{\rho^2}), \qquad \varphi(t) = \left(\cosh^6\frac{ct}{\rho}\right)^{-1/4\mu},$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi = -\frac{\hbar^2}{2m\mu}\left(-\frac{1}{\sqrt{-g(x)}}\partial_k\sqrt{-g(x)}\;g^{kl}(x)\,\partial_l - \frac{1}{6}\frac{1}{\rho^2})\right)\Phi\,. \qquad (13)$$

Найдем явное представление для уравнения Шредингера; при этом введем безразмерную временную координату и используем следующую единицу измерения энергии:

$$\tau = \frac{ct}{\rho}, \qquad [\frac{\hbar c}{\rho}] = [\frac{\hbar^2}{\mu\rho^2}] = \text{энергия},$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\hbar^2}{2m\rho^2}, \qquad \frac{\hbar c}{\rho} / \frac{\hbar^2}{2m\mu\rho^2} = 2\mu\frac{\rho}{\hbar/mc} = \sigma, \tag{14}$$

тогда уравнение Шредингера запишется в виде:

$$\cosh^2\tau\left(i\sigma\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{6}\right)\Phi = -\left(\frac{1}{\sin^2 r}\partial_r \sin^2 r\partial_r - \frac{\mathbf{l}^2}{\sin^2 r}\right)\Phi. \tag{15}$$

Переменные разделяем подстановкой:

$$\Phi = T(\tau)\, R(r)\, Y_{lm}(\theta,\phi), \qquad \mathbf{l}^2 Y_{lm} = l(l+1)Y_{lm},$$

$$\frac{1}{T(\tau)}\cosh^2\tau\left(i\sigma\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{6}\right)T(\tau) = -\frac{1}{R(r)}\left(\frac{1}{\sin^2 r}\partial_r \sin^2 r\partial_r - \frac{l(l+1)}{\sin^2 r}\right)R(r) = \Lambda;$$

в результате приходим к двум уравнениям:

$$\cosh^2\tau\left(i\sigma\frac{d}{d\tau} - \frac{1}{6}\right)T(\tau) = \Lambda T(\tau), \qquad \left(\frac{1}{\sin^2 r}\frac{d}{dr}\sin^2 r\frac{d}{dr} + \Lambda - \frac{l(l+1)}{\sin^2 r}\right)R(r) = 0. \tag{16}$$

3. Уравнение Шредингера, решение дифференциальных уравнений

Обращаемся к анализу уравнений в пространстве де Ситтера (16). Уравнение по временной переменной решается прямым интегрированием:

$$i\sigma\frac{dT}{T} = \left(\frac{\Lambda}{\cosh^2\tau} - \frac{1}{6}\right)d\tau \qquad \Rightarrow \qquad T(\tau) = e^{i\sigma^{-1}(\tau/6 - \Lambda\tanh\tau)}. \tag{17}$$

Обращаем внимание на то, что найденная зависимость волновой функции от времени, хотя является экспоненциальной, говорит, что здесь речь не идет о стационарных состояниях квантово-механической частицы с фиксированной энергией. При этом, однако, квадрат модуля волновой функции (плотность вероятности распределения частиц в пространстве) не зависит от времени:

$$|\Phi(t,x)|^2\, dV = f(x)dV.$$

При устранении из исходного уравнения члена неминимального взаимодействия с кривизной пространства соотношение (17) упрощается: $T(\tau) = e^{-i\sigma^{-1}\Lambda\tanh\tau}$.

В радиальном уравнении устраним член с первой производной:

$$R(r) = \frac{1}{\sin r}F(r), \qquad F'' + \left(\Lambda + 1 - \frac{l(l+1)}{\sin^2 r}\right)F = 0. \tag{18}$$

Вводим переменную:

$$z = 1 - e^{-2ir}, \qquad z = 2\sin r\, e^{i(-r+\frac{\pi}{2})}, \qquad (z=0 \leftrightarrow r=0, \qquad z=1 \leftrightarrow r=+\infty);$$

уравнение примет вид:

$$4(1-z)^2\frac{d^2F}{dz^2} - 4(1-z)\frac{dF}{dz} - \left(\Lambda + 1 + l(l+1)\frac{4(1-z)}{z^2}\right)F = 0.$$

Используя подстановку $F = z^a(1-z)^b f(z)$, получим

$$z(1-z)\frac{d^2 f}{dz^2} + [2a - (2a+2b+1)z]\frac{df}{dz} +$$

$$+\left[\frac{\Lambda+1}{4} - (a+b)^2 + \frac{a(a-1) - l(l+1)}{z} + (b^2 - \frac{\Lambda+1}{4})\frac{1}{1-z}\right]f = 0;$$

требуя $a = l+1, -l$, $b = \pm\frac{\sqrt{\Lambda+1}}{2}$, приходим к уравнению гипергеометрического типа:

$$z(1-z)\frac{d^2 f}{dz^2}+\left[2a-(2a+2b+1)z\right]\frac{df}{dz}-\left[(a+b)^2-\frac{\Lambda+1}{4}\right]f=0,$$

$$\gamma=2a\,,\qquad \alpha=a+b-\frac{\sqrt{\Lambda+1}}{2}\,,\qquad \beta=a+b+\frac{\sqrt{\Lambda+1}}{2}\,.$$

Выберем

$$a=l+1,\quad b=-\frac{\sqrt{\Lambda+1}}{2}\,,\quad \gamma=2l+2\,,\quad \alpha=l+1-\sqrt{\Lambda+1}\,,\quad \beta=l+1\,. \tag{19}$$

Гипергеометрический ряд превращается в полином, если $\alpha=-n,\quad n=0,1,2,...$ – это дает спектр для Λ:

$$\Lambda=(n+l+1)^2-1\,; \tag{20}$$

соответствующие решения задаются согласно

$$\begin{aligned} F&=(1-e^{-2ir})^{l+1}\,e^{+i(n+l+1)r}\,F(-n,l+1,2l+1,z)=\\ &=(2i)^{l+1}(\sin r)^{l+1}e^{+inr}F(-n,l+1,2l+1,1-e^{-2ir})\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Отмечаем, что эти решения обращаются в ноль в особых точках $r=0,\ +\pi\ (z=1,\ 0)$.

4. Частица Клейна–Фока–Гордона в модели де Ситтера

Уравнение Клейна–Фока–Гордона в безразмерной форме имеет вид:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial}{\partial x^\beta}+\frac{1}{6}+m^2\right]\Psi(x)=0\qquad (\frac{M^2c^2\rho^2}{\hbar^2}\Rightarrow M^2). \tag{22}$$

В нестатических координатах пространства де Ситтера уравнение принимает вид:

$$\cosh^2 t\left(\frac{1}{\cosh^3 t}\partial_t\,\cosh^3 t\,\partial_t+\frac{1}{6}+m^2\right)\Psi(x)=\frac{1}{\sin^2 r}\left(\partial_r\,\sin^2 r\,\partial_r-\mathbf{l}^2\right)\Psi(x)\,. \tag{23}$$

Переменные разделяем подстановкой:

$$\Phi(x)=T(t)\,R(r)\,Y_{lm}(\theta,\phi),\qquad \mathbf{l}^2 Y_{lm}=l(l+1)Y_{lm}\,,$$

получаем (K^2 – постоянная разделения)

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{2}{\tan r}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+1)}{\sin^2 r}+K^2\right)R(r)=0\,, \tag{24}$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+3\,\mathrm{th}\,t\frac{d}{dt}+\frac{1}{6}+m^2+\frac{K^2}{\cosh^2 t}\right)T(t)=0\,. \tag{25}$$

Отметим, что в пределе пространства Минковского уравнение (25) примет вид:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+m^2+K^2\right)T(t)=0\,,\qquad T=e^{-i\varepsilon t},\qquad K^2=\varepsilon^2-m^2>0\,.$$

Отметим также, что уравнение (24) совпадает (точностью до замены обозначения $\Lambda\Longleftrightarrow K^2$) с уже исследованным уравнением (16). Таким образом, предстоит исследовать только уравнение (25).

Для сокращения записи введем обозначение $m^2/4+1/24=M^2$. В функции $T(t)$ из уравнения (25) выделим множитель $T(t)=(\cosh^{-\frac{3}{2}}t)\,f(t)$; уравнение для $f(t)$ следующее:

$$\frac{d^2 f}{dt^2}+\left((M^2-3/4)+\frac{(K^2-3/4)}{\mathrm{ch}^2 t}\right)f(t)=0\,. \tag{26}$$

Перейдем в (26) к переменной y:

$$y = \tanh t,$$

$$(1-y^2)\frac{d^2 f}{dy^2} - 2y\frac{df}{dy} + \left[(K^2 - 3/4) + \frac{M^2 - 3/4}{1-y^2} \right] f(y) = 0\,; \qquad (27)$$

это уравнение можно отождествить с уравнением Лежандра [13]:

$$(1-y^2)\frac{d^2 W}{dy^2} - 2y\frac{dW}{dy} + \left(\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-y^2} \right) W = 0\,,$$

$$\nu = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{K^2 - 1/2}, \qquad \nu + 1 = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{K^2 - 1/2}, \qquad \mu = \pm i\sqrt{M^2 - 3/4}\,. \qquad (28)$$

Перейдем в (27) к новой переменной $z = (1-y)/2$, сделаем подстановку (параметр γ зафиксируем позже):

$$f = (1-y^2)^{\gamma} F = [\,4z(1-z)\,]^{\gamma} F\,,$$

в результате приходим к уравнению:

$$\left[z(1-z)\frac{d^2}{dz^2} + (1-2z)\frac{d}{dz} + (K^2 - 3/4) + \frac{M^2 - 3/4}{4z(1-z)} \right] z^{\gamma}(1-z)^{\gamma} F = 0$$

или

$$z(1-z)F'' + 2\gamma(1-z)F' - 2\gamma z F' + (1-2z)F' +$$

$$+\frac{\gamma(\gamma-1)}{1-z}F + \frac{\gamma}{1-z}F + \frac{1}{1-z}\frac{M^2 - 3/4}{4}F +$$

$$+\frac{M^2 - 3/4}{4}\frac{1}{z}F + \frac{\gamma(\gamma-1)}{z}F + \frac{\gamma}{z}F +$$

$$+(K^2 - 3/4\ F -)2\gamma(\gamma-1)F - 4\gamma F - 2\gamma^2 F = 0\,.$$

Требуем обращения в ноль коэффициентов при $(1-z)^{-1}$ и z^{-1}:

$$\gamma = \pm\frac{i\sqrt{M^2 - 3/4}}{2} = \frac{\mu}{2}\,; \qquad (29)$$

в результате приходим к уравнению гипергеометрического типа (вспоминаем, что $K^2 - 3/4 = \nu(\nu+1)$):

$$z(1-z)\frac{d^2 F}{dz^2} + \left[(\mu+1) - 2(\mu+1)z \right]\frac{dF}{dz} + \left[\nu(\nu+1) - 2\gamma(2\gamma+1) \right] F = 0\,.$$

Находим параметры гипергеометрического уравнения:

$$a = \mu - \nu, \qquad b = \mu + \nu + 1, \qquad c = \mu + 1\,,$$

$$F(z) = F(a,b,c,z), \qquad f(z) = z^{\mu/2}\,(1-z)^{\mu/2}\,F(z)\,; \qquad (30)$$

напоминаем, что

$$z = \frac{1 - \tanh t}{2}, \qquad 1 - z = \frac{1 + \tanh t}{2},$$

$$\nu = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{K^2 - 1/2}\,, \qquad \mu = \pm i\sqrt{M^2 - 3/4}\,.$$

Найдем поведение этого решения при $t \to +\infty$:

$$t \to +\infty\,, \qquad z = \frac{1 - \tanh t}{2} \to 0\,, \qquad F(a,b,c,0) = 1\,,$$

$$f(z) = z^{\mu/2}\,(1-z)^{\mu/2}\,F(z) \sim \left(\frac{1 - \tanh t}{2} \right)^{\mu/2} = e^{-\mu t} = e^{\mp i\sqrt{M^2 - 3/4}\,t}\,. \qquad (31)$$

Эти асимптотики, по-видимому, можно рассматривать как отвечающие решениям с «положительной» и «отрицательной» энергией $\pm\sqrt{M^2-3/4}$ соответственно.

Чтобы получить описание построенных решений около точки $t\to-\infty\,(z\to 1)$, воспользуемся соотношением Куммера [13]:

$$U_1=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}U_2+\frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}U_6,$$

$$U_1=F(a,b,c,z),\qquad U_2=F(a,b,a+b+1-c,1-z),$$

$$U_6=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c+1-a-b,1-z)\,. \qquad (32)$$

При $z\to 1\ (t\to-\infty)$ это соотношение дает (с учетом $c-a-b=-\mu$)

$$f(z)=\left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left(\frac{1+\tanh t}{2}\right)^{\mu/2}+\frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left(\frac{1+\tanh t}{2}\right)^{-\mu/2}\right]=$$

$$=\left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}e^{\mu t}+\frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}e^{-\mu t}\right].$$

Это суперпозиция двух осциллирующих решений, поскольку $\mu=\pm i\sqrt{M^2-3/4}$.

Авторы благодарны В.М. Редькову за полезные советы в работе над задачей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cunningham, E. The principle of relativity in electrodynamics and an extension thereof / E. Cunningham // Proc. London Math. Soc. – 1909. – Vol. 8. – P. 77–98.
2. Cunningham, E.The Application of the Mathematical Theory of Relativity to the Electron Theory of Matter / E. Cunningham // Proc. London Math. Soc. – 1911–1912. – Vol. 10. – P. 116–127.
3. Bateman, H. On the conformal transformations of the space of four dimensional and their applications to geometric optics / H. Bateman // Proc. London Math. Soc. – 1909. – Vol. 7. – P. 70–92.
4. Bateman, H. The transformation of the electrodynamical equations / H. Bateman // Proc. London Math. Soc. – 1910. – Ser. 8. – P. 223–264.
5. Bateman, H. The Mathematical Analysis of Electrical and Optical Wave Motion on the Basis of Maxwell’s Equations / H. Bateman. – Cambridge : University press, 1915. – 160 p.
6. Pauli, W. Über die Invarianz der Dirac’schen Wellengleichungen gegenüber Ähnlichkeitstransformationen des Linienelementes im Fall verschwindender Ruhmasse / W. Pauli // Helv. Phys. Acta. – 1940. – Bd. 13. – S. 204–208.
7. Gürsey, F. On a conform invariant spinor wave equation / F. Gürsey // Nuovo Cim. – 1956. – Vol. 3, № 10. – P. 988–1006.
8. Gürsey, F. On some conform invariant worldlines / F. Gürsey // Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul. A. – 1956. – Vol. 21. – P. 129–142.
9. Gürsey, F. Reformulation of general relativity in accordance with Mach’s principle / F. Gürsey // Ann. Phys. – 1963. – Vol. 24. – P. 211–244.
10. Kisel, V.V. Scalar particle in Riemannian space, nonminimal interaction, and non-relativistic approximation / V.V.Kisel, N.G. Tokarevskaya , V.M. Red’kov // Non-Euclidean geometry in modern physics: Proceedings of the International Conference BGL-5, Minsk, October 10–13, 2006 / National Academy of Sciences of Belarus, B.I. Stepanov Institute of Physics; Eds.: Yu. Kurochkin, V. Red’kov. – Minsk, 2006. – P. 111–115.

11. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск : Белорус. наука, 2009. – 495 с.

12. Хокинг, С. Крупномасштабная структура пространства-времени / С. Хокинг, Дж. Эллис. – М. : Мир, 1977. – 429 с.

13. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдеи. – М. : Наука, 1973. – Т. 1 : Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. – 294 с.

O.V. Veko, K.V. Kazmerchuk, E.M. Ovsiyuk **On Exact Solutions of the Klein–Fock–Gordon and Schrödinger Equations in Space-Time De Sitter: the Case of Non-Static Coordinate**

It is shown that in extending de Sitter universe one can formulate a quantum mechanical nonrelativistic equation of Schrödinger type for a spin zero particle; at this the energy operator varies in time accordingly to law of expansion of the sitter model. Exact solution of this equation are constructed; the spatial motion is quantized. Though the wave functions depend on time, their squared modulus do not depend on time, so the expansion of the universe is escaped from observation. In the same nonstatic coordinates, exact solution of the relativistic Klein–Fock–Gordon equation are found. Dependence of the wave function is expressed in term of hypergeometric functions. Spatial motion is quantized in the same manner as for Schrödinger particle. In both cases, there are found asymptotical behavior of the solutions at infinite times in the future and the past. Non-minimal interaction with the curvature trough Ricci scalar is taken into account.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 07.02.14