УДК 512.542

А.А. Трофимук, И.Н. Фенчук

О КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ С НЕБОЛЬШИМИ ИНДЕКСАМИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Исследуются конечные разрешимые группы с индексами несверхразрешимых максимальных подгрупп, равными простым числам, квадратам простых чисел или 27. В частности, установлено, что нильпотентная длина таких групп не превышает 4. В работе получена оценка производной длины конечных разрешимых групп с индексами максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, равными простым числам, квадратам простых чисел или 27. Исследованы такие A_4-свободные группы. Построены примеры, показывающие точность полученных оценок. В доказательствах использовались фрагменты теории формаций и вычисления в системе компьютерной алгебры GAP.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

В теории конечных групп особое внимание уделяется исследованию групп, у которых максимальные подгруппы обладают определенными свойствами. В 1954 году Б. Хупперт [2] доказал, что группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда индексы её максимальных подгрупп являются простыми числами. Ф. Холл [3] в 1958 году установил разрешимость группы, у которой индексы максимальных подгрупп есть простые числа или квадраты простых чисел.

Детальное исследование разрешимых групп, у которых индексы максимальных подгрупп есть простые числа или квадраты простых чисел, получено в работе [4]. В частности, установлено, что производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, нильпотентная длина таких групп не превышает 4, 2-длина и 3-длина не превышает 2, p-длина не превышает 1 для всех простых $p>3$.

Строение разрешимых групп, у которых индексы максимальных подгрупп, равны простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел, получено в работе [5]. В частности, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6, нильпотентная длина таких групп не превышает 5, p-длина не превышает 2.

Если рассматривать группы с индексами максимальных подгрупп равными простым числам, квадратам простых чисел или 8, то такие группы могут быть неразрешимыми. Примером служит простая группа $PSL(2,7)$. Строение разрешимых групп с такими ограничениями на индексы максимальных подгрупп было изучено Е.Е. Грибовской [6] и А.А. Трофимуком [7].

В.С. Монахов и Д.А. Ходанович [8] развили эти результаты за счет рассмотрения индексов только несверхразрешимых максимальных подгрупп. В их работе установлено, что в разрешимой группе, у которой индексы несверхразрешимых максимальных подгрупп равны простым числам или квадратам простых чисел, нильпотентная длина не превышает 4, а в разрешимой группе, у которой индексы несверхразрешимых максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел, нильпотентная длина не превышает 5. Установлено, что в разрешимой группе, у которой индексы несверхразрешимых максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел или 8, нильпотентная длина не превышает 4.

В настоящей заметке получена оценка нильпотентной длины разрешимой группы, у которой индексы несверхразрешимых максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел или 27. Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G – разрешимая группа, максимальные подгруппы которой либо сверхразрешимы, либо имеют индексы равные простым числам, квадратам простых чисел или 27. Тогда нильпотентная длина группы G не превышает 4. В частности, если G является A_4-свободной, то нильпотентная длина не превышает 3.*

Напомним, что группа называется A_4-свободной, если она не содержит секций, изоморфных знакопеременной группе A_4.

В работе В.С. Монахова [9] показано, что в определениях функций $m_p(G)$ и $m(G)$ можно ограничиться только максимальными подгруппами, не содержащими подгруппу Фиттинга. Поэтому верхние оценки производной длины не изменятся, если подобные ограничения накладывать на максимальные подгруппы, не содержащие подгруппу Фиттинга. Доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть G – разрешимая группа, у которой индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, равны простым числам, квадратам простых чисел или 27. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, а нильпотентная длина группы G не превышает 4 . В частности, если G является A_4-свободной, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 3.*

Следствие 1. *Пусть G – разрешимая группа, у которой индексы максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел или 27. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, нильпотентная длина таких групп не превышает 4, 2-длина и 3-длина не превышает 2, p-длина не превышает 1 для всех простых $p>3$.*

Пример 1. В системе компьютерной алгебры GAP построен пример группы, подтверждающий точность полученных оценок в следствии 1. Так группа $G=[E_{3^5}]GL(2,3)$ порядка 11664 с единичной подгруппой Фраттини, индексы максимальных подгрупп которой принадлежат множеству $\{2,\ 3, 4, 9, 27\}$, имеет производную длину равную 5, нильпотентную длину равную 4, 2- и 3-длину равную 2. Здесь E_{3^5} – элементарная абелева группа порядка 3^5.

Из теоремы Гуральника следует, что если индекс любой максимальной подгруппы группы G примарен, то группа G либо разрешима, либо $G/S(G)$ изоморфна простой группе $PSL(2,7)$. Здесь $S(G)$ – разрешимый радикал группы G. Так как в $PSL(2,7)$ есть подгруппа, изоморфная знакопеременной группе A_4, то любая A_4-свободная группа, у которой индексы максимальных подгрупп примарны, является разрешимой.

Следствие 2. *Пусть G – A_4-свободная группа, у которой индексы максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел или 27. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ и нильпотентная длина группы G не превышает 3, 3-длина не превышает 2, p-длина не превышает 1 для всех простых $p\neq 3$.*

Пример 2. Пусть E_{3^3} – элементарная абелева группа порядка 3^3. A_4-свободная группа $G=[E_{3^3}]([Z_{13}]Z_3)$ порядка 1053 с единичной подгруппой Фраттини, индексы максимальных подгрупп которой принадлежат множеству $\{3, 13, 27\}$, имеет производную длину равную 3, нильпотентную длину равную 3, 3-длину равную 2, 13-длину равную 1. Здесь Z_n – циклическая группа порядка *n*. Следовательно, оценки производной длины, нильпотентной длины и *p*-длины, полученные в следствии 2, являются точными.

1. Вспомогательные результаты

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотентных, абелевых и сверхразрешимых групп обозначают через $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{U}$ соответственно.

Для доказательства нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Доказательство. Согласно [11, с. 36], произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация – эквивалентные понятия, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Лемма 2 [12, лемма 10]. *Если H – разрешимая подгруппа группы $GL(3,3)$ и $O_3(H) = 1$, то $H \cong Z_2 \times D$ или $H \cong D$, где D либо 2-группа производной длины, не превосходящей 2, либо $D \in \{Z_{13}, A_4, S_4, [Z_{13}]Z_3, SL(2,3), GL(2,3)\}$. В частности, $H \in \mathfrak{A}^4$, а если H A_4-свободна, то H метабелева.*

Здесь S_n – симметрическая группа степени n.

Лемма 3 [12, лемма 7]. *Пусть G – разрешимая группа и k – натуральное число. Тогда и только тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^k$, когда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$.*

Лемма 4 [12, лемма 12]. *Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(2,p)$. Тогда $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$. Кроме того, если $p > 3$ и $O_p(H) = 1$, то H – p'-группа.*

Лемма 5 [12, лемма 13]. *Если H – разрешимая A_4-свободная подгруппа группы $GL(2,p)$, то H метабелева.*

Следующая лемма легко выводится из соответствующих определений.

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация и G – разрешимая группа. Предположим, что G не принадлежит $\mathfrak{F}$, но $G/N \in \mathfrak{F}$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G. Тогда G – примитивная группа.*

Лемма 7 [13 теорема I.8; 10, теорема II.3.2]. *Пусть G – примитивная разрешимая группа с примитиватором M. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\Phi(G) = 1$;

2) $F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G)$ и $F(G)$ является элементарной абелевой p-группой порядка p^n для некоторого простого p;

3) в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, совпадающая с $F(G)$;

4) $G = [F(G)]M$ и $O_p(M) = 1$;

5) M изоморфна неприводимой подгруппе группы $GL(n,p)$.

Лемма 8. Если G – разрешимая группа и $F(G) = E_4 \neq G$, то $G \cong A_4$ или $G \cong S_4$.

Доказательство. Поскольку $F(G)$ – абелева подгруппа, то согласно теореме 4.22 [1] $C_G(F(G)) = F(G)$. Так как $\mathrm{Aut}(F(G)) \cong GL(2,2) \cong S_3$, то либо $G/F(G) \cong Z_3$, либо $G/F(G) \cong S_3$. Если $G/F(G) \cong Z_3$, то $G \cong A_4$. Если $G/F(G) \cong S_3$, то $G \cong S_4$.

2. Доказательство теоремы 1

Применим индукцию по порядку группы G. Покажем, что $G \in \mathfrak{N}^4$. Пусть K – нормальная неединичная подгруппа группы G и M/K – произвольная максимальная подгруппа группы G/K. Тогда M – максимальная подгруппа группы G и по условию теоремы M либо сверхразрешима, либо ее индекс $|G:M|$ есть простое число, квадрат простого числа или 27. Поэтому в первом случае фактор-группа M/K является сверхразрешимой, а так как $|G:M| = |G/K : M/K|$, то во втором случае индекс максимальной подгруппы M/K в группе G/K есть простое число, квадрат простого числа или 27. Таким образом, условие теоремы наследуют все фактор-группы G/K. Поэтому справедливо включение $G/K \in \mathfrak{N}^4$. Так как по лемме 1 формация $\mathfrak{N}^4$ является насыщенной, то согласно лемме 6 группа G является примитивной.

Таким образом, по лемме 7 подгруппа Фраттини $\Phi(G) = 1$, подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является минимальной нормальной подгруппой в группе G. Причем $F = C_G(F)$ и $G = [F]M$, где M – некоторая максимальная подгруппа группы G. В соответствии с условием теоремы подгруппа M либо сверхразрешима, либо $|G:M| = p$, $|G:M| = q^2$, $|G:M| = 27$, где p, q – некоторые простые числа. Если подгруппа M сверхразрешима, то справедливо включение $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}$, и так как сверхразрешимая группа является метанильпотентной, то $G \in \mathfrak{N}^3 \subset \mathfrak{N}^4$.

Пусть подгруппа M не является сверхразрешимой. Предположим сначала, что индекс подгруппы M является простым числом, т.е. $|G:M| = p$. Тогда фактор-группа G/F является циклической группой, как группа автоморфизмов группы F простого порядка p. Ясно, что в этом случае группа G будет сверхразрешимой, т.е. справедливо включение $G \in \mathfrak{U} \subset \mathfrak{N}^4$.

Пусть теперь $|G:M| = q^2$. Тогда по лемме 7 фактор-группа G/F изоморфна некоторой неприводимой разрешимой подгруппе H группы $GL(2,q)$. В этом случае по лемме 4 подгруппа $H \in \mathfrak{N}^3$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}^4$.

Осталось рассмотреть случай, когда $|G:M| = 27$. Фактор-группа G/F будет изоморфна некоторой неприводимой разрешимой подгруппе H группы $GL(3,3)$, причем $O_3(H) = 1$. Тогда по лемме 2 подгруппа H группы $GL(3,3)$ исчерпывается следующими подгруппами: $Z_{13}, A_4, S_4, [Z_{13}]Z_3, Z_{31}, SL(2,3), GL(2,3)$. Очевидно, что все группы из предложенного списка принадлежат произведению $\mathfrak{N}^3$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}^4$.

Пусть G является A_4-свободной группой. Повторяя предложенное выше доказательство и используя лемму 1 и лемму 5, несложно показать, что $G \in \mathfrak{N}^3$.

3. Доказательство теоремы 2

Вначале докажем, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. Воспользуемся индукцией по порядку G. Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$ и $M/\Phi(G)$ – максимальная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Тогда M – максимальная подгруппа группы G и по условию теоремы M

либо содержит подгруппу Фиттинга $F(G)$, либо ее индекс $|G:M|$ есть простое число, квадрат простого числа или 27. Поэтому в первом случае, так как $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$, фактор-группа $M/\Phi(G)$ содержит подгруппу Фиттинга $F(G/\Phi(G))$ группы $G/\Phi(G)$, а так как $|G:M| = |G/\Phi(G):M/\Phi(G)|$, то во втором случае индекс максимальной подгруппы $M/\Phi(G)$ в группе $G/\Phi(G)$ есть простое число, квадрат простого числа или 27. Таким образом, фактор-группа $G/\Phi(G)$ удовлетворяет условию теоремы и $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Так как по лемме 1 формация $\mathfrak{F}$ насыщенна, то $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\Phi(G) = 1$.

По теореме III.4.5 [10] подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп F_i группы G, где $1 \le i \le k$. Поэтому по теореме I.4.5 [10] для каждого F_i фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_i)$. По лемме I.9.6 [10] фактор-группа $G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i)$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп $G/C_G(F_i)$, $1 \le i \le k$. Так как в разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает со своим централизатором, то $\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i) = C_G(F) = F$ и $G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i) = G/F$.

Пусть F_i – элементарная абелева p_i-подгруппа. Ясно, что для каждого i существует максимальная подгруппа M_i в группе G такая, что $G = [F_i]M_i$. Так как M_i не содержит F_i, то M_i не содержит F. Поэтому порядок $|F_i|$ равен p_i, либо p_i^2, либо 27, где p_i – простое число. Поэтому возможны следующие варианты: $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна циклической группе порядка $p_i - 1$; $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(2, p_i)$; $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(3,3)$.

В первом случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ циклическая. Поэтому $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$.

Во втором случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$ и по лемме 4 фактор-группа $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$.

В третьем случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(3,3)$ и из леммы 2 следует, что

$$G/C_G(F_i) \in \{Z_{13}, A_4, S_4, [Z_{13}]Z_3, SL(2,3), GL(2,3)\}.$$

Значит, $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{A}^3 \subset \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$. Так как $\mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$ – формация, то $G/F \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}$.

Итак, мы доказали, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. По лемме 3 $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^5$ и производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5. Так как $G \in \mathfrak{N}^4$, то нильпотентная длина G не превышает 4.

Пусть G является A_4-свободной группой. Повторим предложенное выше доказательство, за исключением случаев, когда $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(2, p_i)$ и $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(3,3)$.

Если фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$, то по лемме 5 фактор-группа $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{U}^2$.

Если фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(3,3)$, то из леммы 2 следует, что $G/C_G(F_i) \in \{Z_{13}, [Z_{13}]Z_3\}$. Значит, $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{U}^2$. Так как $\mathfrak{U}^2$ – формация, то $G/F \in \mathfrak{U}^2$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^2$ и по лемме 3 $G/\Phi(G) \in \mathfrak{U}^3$. Таким образом, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 3.

4. Доказательство следствия 1

Из теоремы 1 и теоремы 2 следует, что производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, а нильпотентная длина не превышает 4. Покажем, что 2-длина и 3-длина группы G не превышают 2, *p*-длина не превышает 1 для всех простых $p > 3$.

Так как p-длина метанильпотентной группы не превышает 1, то из включения $G \in \mathfrak{N}^4$ следует, что *p*-длина не превышает 2 для любого простого p. Применим индукцию по порядку группы G. Покажем, что $l_p(G) \le 1$ для любого простого $p > 3$. По лемме VI.6.9 [10] можно считать, что $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ – единственная минимальная нормальная p-подгруппа и $|F| = |G : M|$. По теореме I.4.5 [10] для подгруппы F фактор-группа G/F изоморфна неприводимой подгруппе группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F)$. Из условия теоремы следует, что порядок $|F|$ равен p, либо p^2, либо 27.

Если $|F| = p$, то G/F изоморфна подгруппе циклической группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}F$ группы F, порядок которой равен $p-1$. Отсюда силовская p-подгруппа группы G совпадает с подгруппой F и *p*-длина не превышает 1 для всех простых $p > 3$.

Если $|F| = p^2$, то $\mathrm{Aut}F = GL(2, p)$, G/F – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(2, p)$ и $O_p(G/F) = 1$. По лемме 4 G/F – p'-группа, т.е. *p*-длина не превышает 1 для всех простых $p > 3$.

Осталось рассмотреть случай, когда $|F| = 27$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе H группы $GL(3,3)$, причем $O_3(G/F) = 1$. Из леммы 2 следует, что $G/F \in \{Z_{13}, A_4, S_4, [Z_{13}]Z_3, SL(2,3), GL(2,3)\}$ и G является $\{2,3,13\}$-группой. Очевидно, что 13-длина не превышает 1. Теорема доказана.

5. Доказательство следствия 2

Из теоремы 1 и теоремы 2 для A_4-свободной группы следует, что производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 3, а нильпотентная длина таких групп также не превышают 3. Покажем, что 3-длина не превышает 2, p-длина не превышает 1 для всех простых $p \ne 3$.

В силу ранее доказанного следствия 2-длина и 3-длина группы G не превышают 2, *p*-длина не превышает 1 для всех простых $p > 3$. Используя индукцию по порядку группы, докажем, что 2-длина не превышает 1. По лемме VI.6.9 [10] можно считать, что $O_{2'}(G) = \Phi(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа порядка 2^α, обладающая дополнением M в группе G, т.е $G = [F]M$. Поскольку $|F| = |G : M|$ и M – максимальная подгруппа группы G , то $\alpha \leq 2$. Так как $C_G(F) = F$, то фактор-группа G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(\alpha, 2)$. Если $|F| = 2$, то группа G изоморфна F и 2-длина не превышает 1. Если $|F| = 4$, то по лемме 8 группа G изоморфна или A_4 , или S_4 , а значит, не A_4 -свободна. Противоречие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классо в / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
2. Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Zeitschr. – 1954. – V. 60. – P. 409–434.
3. Холл, М. Теория групп / М. Холл. М. : ИЛ, 1962. – 468 с.
4. Монахов, В.С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Матеем. заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.
5. Монахов, В.С. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов, М.В. Селькин, Е.Е. Грибовская // Украин. матем. журн. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 940–950.
6. Грибовская, Е.Е. Конечные разрешимые группы с индексами максимальных подгрупп, равными p , p^2 или 8 / Е.Е. Грибовская // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2001. – № 4. – С. 11–14.
7. Трофимук, А.А. Конечные группы с ограничениями на индексы максимальных подгрупп / А.А. Трофимук // Весн. Брэсц. ун-та Сер. прыродазн. навук. – 2009. – № 2 (33). – С. 25–31.
8. Монахов, В.С. О конечных группах с ограниченными индексами максимальных подгрупп / В.С. Монахов, Д.А. Ходанович // Докл. АН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 3. – С. 20–24.
9. Монахов, В.С. Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Докл. АН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 31–33.
10. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York, 1967.
11. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М : Наука, 1978. – 272 с.
12. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.
13. Gaschutz, W. Lectures of subgroups of Sylow type in finite soluble groups / W. Gaschutz // Notes on pure mathematics / Australian National University. – Canberra, 1979. – № 11. – 100 p.

***A.A. Trofimuk, I.N. Fenchuk.* On Finite Solvable Groups with a Small Indexes of Maximal Subgroups**

We study finite solvable groups in which indexes of nonsupersolvable maximal subgroups are equal to prime numbers, squares of primes or 27. In particular found that the nilpotent length of such groups does not exceed 4. An estimate of the derived length of finite soluble groups in which indices of maximal subgroups that do not contain the Fitting subgroup are equal to prime numbers, squares of primes or 27. Such A4-free groups are investigated . We construct examples showing the accuracy of the estimates. The proofs include fragments of the theory of formations and calculations in the system of computer algebra GAP

Рукапіс пастуміў у рэдкалегію 25.04.2013