УДК 519.6+517.983.54

В.Ф. Савчук

К ВОПРОСУ ОБ АПРИОРНОМ ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В НЕЯВНОМ МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИБЛИЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

В гильбертовом пространстве предлагается неявный метод итераций решения операторных уравнений I рода с неотрицательным самосопряженным и несамосопряженным ограниченным оператором. Доказана сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций в исходной норме гильбертова пространства, в предположении, что погрешности имеются не только в правой части уравнения, но и в операторе. Получены оценки погрешности и априорный момент останова.

1. Постановка задачи

Пусть H и F – гильбертовы пространства и $A \in \mathrm{L}\,(H,F)$, т.е. A – линейный непрерывный оператор, действующий из H в F. Предполагается, что нуль не является его собственным значением, однако принадлежит его спектру. Решается уравнение

$$Ax = y. \qquad (1)$$

Задача отыскания элемента $x \in H$ по элементу $y \in F$ является некорректной, так как сколь угодно малые возмущения в правой части y могут вызывать сколь угодно большие возмущения решения.

Предположим, что точное решение $x^* \in H$ уравнения (1) существует и является единственным. Будем искать его с помощью неявного метода итераций

$$(E + \alpha A^k)x_{n+1} = x_n + \alpha A^{k-1}y, \quad x_0 = 0,\ k \in N, \qquad (2)$$

где E – тождественный оператор, α – итерационный шаг. Считаем, что оператор A и правая часть y уравнения (1) заданы приближённо, т.е. вместо y известно приближение y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$, а вместо оператора A известен оператор A_η, $\|A - A_\eta\| \le \eta$. Предполагаем, что $0 \in Sp(A_\eta)$ и $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$. Тогда метод итераций (2) примет вид

$$(E + \alpha A_\eta^k)x_{n+1} = x_n + \alpha A_\eta^{k-1}y_\delta, \quad x_0 = 0,\ k \in N. \qquad (3)$$

Случай приближенной правой части уравнения y_δ и точного оператора A для метода (3) изучен в работе [1]. Там исследован априорный и апостериорный выбор параметра регуляризации, изучен случай неединственного решения задачи (1), доказана сходимость метода (3) в энергетической норме гильбертова пространства. Докажем сходимость метода (3) в случае априорного выбора параметра регуляризации при решении уравнения $A_\eta x = y_\delta$ и получим априорные оценки погрешности.

2. Случай самосопряжённых неотрицательных операторов

Пусть $H = F$, $A = A^* \ge 0$, $A_\eta = A_\eta^* \ge 0$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $0 < \eta \le \eta_0$. Итерационный метод (3) запишется в виде:

$$x_n = g_n(A_\eta)y_\delta, \qquad (3^1)$$

где $g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\dfrac{1}{(1+\alpha\lambda^k)^n}\right]\ge 0.$ В [1] при $\alpha>0$ получены следующие условия для функции $g_n(\lambda)$:

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\left|g_n(\lambda)\right|\le k(n\alpha)^{1/k},\ (n>0), \tag{4}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda^s\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right|\le\gamma_s n^{-s/k},\ (n>0),\ 0<s<\infty,\quad \gamma_s=\left(\frac{s}{2k\alpha}\right)^{s/k} \tag{5}$$

(здесь s – степень истокопредставимости точного решения $x^*=A^s z,\ s>0,\ \|z\|\le\rho$);

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right|\le\gamma_0,\quad \gamma_0=1,\quad (n>0), \tag{6}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right|\to 0,\quad n\to\infty. \tag{7}$$

Справедлива

Лемма 1. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\quad A_\eta=A_\eta^*\ge 0,\quad \left\|A_\eta-A\right\|\le\eta,\quad Sp(A_\eta)\subseteq[0,M]$, $(0<\eta\le\eta_0)$, $\alpha>0$ *и выполнены условия* (6), (7). *Тогда* $\left\|G_{n\eta}v\right\|\to 0$ *при* $n\to\infty,\ \eta\to 0$ $\forall v\in N(A)^{\perp}=\overline{R(A)}$, *где* $N(A)=\{x\in H\,|\,Ax=0\}$ *и* $G_{n\eta}=E-A_\eta g_n(A_\eta)$.

Доказательство.

В силу (6) $\left\|G_{n\eta}\right\|=\left\|E-A_\eta g_n(A_\eta)\right\|\le\gamma_0$, $(n>0,\quad 0<\eta\le\eta_0)$. Для элементов вида $v=Aw$, образующих в $\overline{R(A)}$ плотное подмножество, на основании (7) имеем

$$\left\|G_{n\eta}v\right\|=\left\|G_{n\eta}Aw\right\|\le\left\|G_{n\eta}(A-A_\eta)w\right\|+\left\|G_{n\eta}A_\eta w\right\|\le\left(\gamma_0\eta+\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right|\right)\|w\|\to 0$$

при $n\to\infty,\ \eta\to 0$. Лемма 1 доказана.

Условие сходимости для метода (3) дает

Теорема 1. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\quad A_\eta=A_\eta^*\ge 0,\quad \left\|A_\eta-A\right\|\le\eta,\quad Sp(A_\eta)\subseteq[0,M]$, $(0<\eta\le\eta_0)$, $\alpha>0$, $y\in R(A)$, $\|y-y_\delta\|\le\delta$ *и выполнены условия* (4), (6), (7). *Выберем параметр* $n=n(\delta,\eta)$ *в приближении* (3) *так, чтобы* $(\delta+\eta)n^{1/k}(\delta,\eta)\to 0$ *при* $n(\delta,\eta)\to\infty,\ \delta\to 0,\ \eta\to 0.$ *Тогда* $x_{n(\delta,\eta)}\to x^*$ *при* $\delta\to 0,\eta\to 0.$

Доказательство.

Из (3^1) имеем $x_n=g_n(A_\eta)y_\delta$. Тогда

$$x_n-x^*=g_n(A_\eta)y_\delta-x^*=-G_{n\eta}x^*+G_{n\eta}x^*+g_n(A_\eta)y_\delta-x^*=$$
$$=-G_{n\eta}x^*+(E-A_\eta g_n(A_\eta))x^*+g_n(A_\eta)y_\delta-x^*=-G_{n\eta}x^*+g_n(A_\eta)(y_\delta-A_\eta x^*).$$

Следовательно, $x_n-x^*=-G_{n\eta}x^*+g_n(A_\eta)(y_\delta-A_\eta x^*)$.

Так как по условию (4) $\left\|g_n(A_\eta)\right\|\le\sup\limits_{0\le\lambda\le M}\left|g_n(\lambda)\right|\le\gamma n^{1/k}$, $\gamma=k\alpha^{1/k}$, то

$$\left\|y_\delta-A_\eta x^*\right\|\le\|y_\delta-y\|+\left\|y-A_\eta x^*\right\|=\|y_\delta-y\|+\left\|Ax^*-A_\eta x^*\right\|\le\delta+\left\|A-A_\eta\right\|\left\|x^*\right\|\le\delta+\eta\left\|x^*\right\|.$$

Следовательно, $\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\|\le\left\|G_{n\eta}x^*\right\|+\left\|g_n(A_\eta)\left(y_\delta-A_\eta x^*\right)\right\|\le\left\|G_{n\eta}x^*\right\|+\gamma n^{1/k}\left(\delta+\eta\left\|x^*\right\|\right)$.

Из леммы 1 следует, что $\left\|G_{n\eta}x^*\right\|\to 0$ при $n\to\infty$, $\eta\to 0$, а по условию теоремы 1 $n^{1/k}(\delta+\eta)\to 0$ при $\delta\to 0$, $\eta\to 0$. Таким образом, $\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\|\to 0$, $\delta\to 0$, $\eta\to 0$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть* $A=A^*\ge 0$, $A_\eta=A_\eta^*\ge 0$, $\left\|A_\eta-A\right\|\le\eta$, $Sp(A_\eta)\subseteq[0,M]$, $(0<\eta\le\eta_0)$, $\alpha>0$, $y\in R(A)$, $\left\|y_\delta-y\right\|\le\delta$ *и выполнены условия* (4), (5). *Если точное решение истокопредставимо, т.е.* $x^*=A^s z$, $s>0$, $\|z\|\le\rho$, *то справедлива оценка погрешности*

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\|\le\gamma_0 c_s\eta^{\min(1,s)}\rho+\gamma_s n^{-s/k}\rho+\gamma n^{1/k}\left(\delta+\eta\left\|x^*\right\|\right),\ 0<s<\infty.$$

Доказательство.

Имеем, используя истокопредставимость точного решения,

$$\left\|G_{n\eta}x^*\right\|=\left\|G_{n\eta}A^s z\right\|\le\left\|G_{n\eta}\left(A^s-A_\eta^s\right)z\right\|+\left\|G_{n\eta}A_\eta^s z\right\|\le\gamma_0 c_s\eta^{\min(1,s)}\rho+\gamma_s n^{-s/k}\rho,$$

так как по лемме 1.1 [2, с. 91] $\left\|A_\eta^s-A^s\right\|\le c_s\eta^{\min(1,s)}$, $c_s=\text{const}$ ($c_s\le 2$ для $0<s\le 1$). Тогда

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\|\le\gamma_0 c_s\eta^{\min(1,s)}\rho+\gamma_s n^{-s/k}\rho+\gamma n^{1/k}\left(\delta+\eta\left\|x^*\right\|\right),\ 0<s<\infty. \tag{8}$$

Теорема 2 доказана.

Если минимизировать правую часть оценки (8) по n, то получим значение априорного момента останова:

$$n_{\text{опт}}=\left[\frac{s\gamma_s\rho}{\gamma\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)}\right]^{k/(s+1)}=d_s\rho^{k/(s+1)}\left[\delta+\eta\left\|x^*\right\|\right]^{-k/(s+1)},$$

где $d_s=\left(\dfrac{s\gamma_s}{\gamma}\right)^{k/(s+1)}$. Отсюда $n_{\text{опт}}=\left(\dfrac{s}{k}\right)^{(s+k)/(s+1)}2^{-s/(s+1)}\alpha^{-1}\rho^{k/(s+1)}\left(\delta+\eta\left\|x^*\right\|\right)^{-k/(s+1)}$.

Подставим $n_{\text{опт}}$ в оценку (8), получим

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\|_{\text{опт}}\le\gamma_0 c_s\eta^{\min(1,s)}\rho+\gamma_s\rho\left[d_s\rho^{k/(s+1)}\left(\delta+\eta\left\|x^*\right\|\right)^{-k/(s+1)}\right]^{-s/k}+$$

$$+\gamma\left[d_s\rho^{k/(s+1)}\left(\delta+\eta\left\|x^*\right\|\right)^{-k/(s+1)}\right]^{1/k}\left(\delta+\eta\left\|x^*\right\|\right)=$$

$$=\gamma_0 c_s\eta^{\min(1,s)}\rho+\rho^{1/(s+1)}\left(d_s^{-s/k}\gamma_s+\gamma d_s^{1/k}\right)\left(\delta+\eta\left\|x^*\right\|\right)^{s/(s+1)}=$$

$$=\gamma_0 c_s\eta^{\min(1,s)}\rho+\rho^{1/(s+1)}c_s'\left(\delta+\eta\left\|x^*\right\|\right)^{s/(s+1)},$$

где $c_s'=d_s^{-s/k}\gamma_s+\gamma d_s^{1/k}=(1+s)\left(\dfrac{s}{k}\right)^{s(1-k)/(k(s+1))}2^{-s/(k(s+1))}$. Отсюда

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\|_{\text{опт}} \le c_s \eta^{\min(1,s)}\rho+(1+s)\left(\frac{s}{k}\right)^{s(1-k)/(k(s+1))} 2^{-s/(k(s+1))}\rho^{1/(s+1)}\left(\delta+\eta\left\|x^*\right\|\right)^{s/(s+1)}.$$

Замечание. *Оптимальная оценка погрешности не зависит от* α, *но* $n_{опт}$ *зависит от* α. *Поскольку на* α *нет ограничений сверху* ($\alpha>0$), *то за счет выбора* α *можно добиться того, чтобы оптимальная оценка погрешности достигалась уже на первом шаге итераций. Для этого достаточно выбрать*

$$\alpha_{опт}=\left(\frac{s}{k}\right)^{(s+k)/(s+1)} 2^{-s/(s+1)}\rho^{k/(s+1)}\left(\delta+\eta\left\|x^*\right\|\right)^{-k/(s+1)}.$$

3. Случай несамосопряжённых операторов

В случае несамосопряжённой задачи итерационный метод (3) примет вид

$$\left[E+\alpha\left(A_\eta^*A_\eta\right)^k\right]x_{n+1}=x_n+\alpha(A_\eta^*A_\eta)^{k-1}A_\eta^*y_\delta,\ x_0=0,\ k\in N. \tag{9}$$

Его можно записать так:

$$x_n=g_n(A_\eta^*A_\eta)A_\eta^*y_\delta. \tag{10}$$

Из леммы 1 следует

Лемма 2. *Пусть* $A, A_\eta \in$ L (H, F), $\left\|A_\eta-A\right\|\le\eta$, $\left\|A_\eta\right\|^2\le M$, $\alpha>0$ *и выполнены условия* (6), (7). *Тогда*

$$\left\|K_{n\eta}v\right\|\to 0 \text{ при } n\to\infty,\quad \eta\to 0,\ \forall v\in N(A)^\perp=\overline{R(A^*)}, \tag{11}$$

$$\left\|\tilde{K}_{n\eta}z\right\|\to 0 \text{ при } n\to\infty,\quad \eta\to 0,\ \forall z\in N\left(A^*\right)^\perp=\overline{R(A)}, \tag{12}$$

где $K_{n\eta}=E-A_\eta^*A_\eta g_n\left(A_\eta^*A_\eta\right)$, $\tilde{K}_{n\eta}=E-A_\eta A_\eta^* g_n\left(A_\eta A_\eta^*\right)$.

Используем лемму 2 для доказательства следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть* $A, A_\eta\in$ L (H, F), $\left\|A-A_\eta\right\|\le\eta$, $\left\|A_\eta\right\|^2\le M$, $(0<\eta\le\eta_0)$, $\alpha>0$, $y\in R(A)$, $\left\|y_\delta-y\right\|\le\delta$ *и выполнены условия* (4), (6), (7). *Выберем параметр* $n=n(\delta,\eta)$ *так, чтобы*

$$(\delta+\eta)^2 n^{1/k}(\delta,\eta)\to 0 \text{ при } n(\delta,\eta)\to\infty, \delta\to 0,\ \eta\to 0. \tag{13}$$

Тогда $x_{n(\delta,\eta)}\to x^*$ *при* $\delta\to 0$, $\eta\to 0$.

Доказательство.

Для погрешности приближения $x_{n(\delta,\eta)}$ имеем

$$x_{n(\delta,\eta)}-x^*=-K_{n\eta}x^*+g_n(A_\eta^*A_\eta)A_\eta^*\left(y_\delta-A_\eta x^*\right). \tag{14}$$

Здесь $\left\|g_n\left(A_\eta^*A_\eta\right)A_\eta^*\right\|=\left\|g_n\left(A_\eta^*A_\eta\right)\left(A_\eta^*A_\eta\right)^{1/2}\right\|\le\gamma_* n^{1/(2k)}$, где

$$\gamma_*=\sup_{n>0}\left(n^{-1/(2k)}\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda^{1/2}\left|g_n(\lambda)\right|\right)\le k^{1/2}\alpha^{1/(2k)}\ [1].$$

Поскольку

$$\left\|y_\delta-A_\eta x^*\right\|\le\left\|y_\delta-y\right\|+\left\|y-A_\eta x^*\right\|=\left\|y_\delta-y\right\|+\left\|Ax^*-A_\eta x^*\right\|\le\delta+\eta\left\|x^*\right\|,$$

то $\left\|g_n\left(A_\eta^*A_\eta\right)A_\eta^*\left(y_\delta-A_\eta x^*\right)\right\|\le k^{1/2}\alpha^{1/(2k)}n^{1/(2k)}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)$. Поэтому

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\| \le \left\|K_{n\eta}x^*\right\| + \left\|g_n\left(A_\eta^*A_\eta\right)A_\eta^*\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le \left\|K_{n\eta}(x^*)\right\| + k^{1/2}\alpha^{1/(2k)}n^{1/(2k)}\left(\delta+\eta\left\|x^*\right\|\right).$$

Из леммы 2 следует, что $\left\|K_{n\eta}x^*\right\| \to 0$ при $n\to\infty$, $\eta\to 0$, а из условия (13) $n^{1/k}(\delta+\eta)^2 \to 0$ *при* $n\to\infty$, $\delta\to 0$, $\eta\to 0$. Отсюда $k^{1/2}\alpha^{1/(2k)}n^{1/(2k)}\left(\delta+\eta\left\|x^*\right\|\right)\to 0,$ при $n\to\infty$, $\delta\to 0$, $\eta\to 0$. Таким образом, $\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\|\to 0,$ $n\to\infty$, $\delta\to 0$, $\eta\to 0$. Теорема 3 доказана.

Справедлива

Теорема 4. *Пусть* $A, A_\eta \in \mathrm{L}\,(H, F)$, $\left\|A-A_\eta\right\|\le\eta$, $\left\|A_\eta\right\|^2 \le M$, $(0<\eta\le\eta_0)$, $\alpha>0$, $y\in R(A)$, $\left\|y_\delta - y\right\|\le\delta$. *Если точное решение представимо в виде* $x^* = |A|^s z$, $s>0$, $\|z\|\le\rho$, $|A| = \left(A^*A\right)^{1/2}$ *и выполнены условия* (4), (5), *то справедлива оценка погрешности*

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\| \le \gamma_0 c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_{s/2}n^{-s/(2k)}\rho + k^{1/2}\alpha^{1/(2k)}n^{1/(2k)}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right),\ 0<s<\infty.$$

Доказательство.

В случае истокообразно представимого точного решения $x^* = |A|^s z = \left(A^*A\right)^{s/2} z$ из (5) получим $\sup\limits_{0\le\lambda\le M} \lambda^{s/2}\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right| \le \gamma_{s/2}n^{-s/(2k)}$, где $\gamma_{s/2} = \left(\dfrac{s}{4k\alpha}\right)^{s/(2k)}$. Тогда

$$\left\|K_{n\eta}\left|A_\eta\right|^s z\right\| = \left\|\left|A_\eta\right|^s\left[E - A_\eta^*A_\eta g_n\left(A_\eta^*A_\eta\right)\right]z\right\| = \left\|\left(A_\eta^*A_\eta\right)^{s/2}\left[E - A_\eta^*A_\eta g_n\left(A_\eta^*A_\eta\right)\right]z\right\| \le \gamma_{s/2}n^{-s/(2k)}\rho.$$

Отсюда

$$\left\|K_{n\eta}x^*\right\| = \left\|K_{n\eta}|A|^s z\right\| = \left\|K_{n\eta}\left(\left|A_\eta\right|^s - |A|^s\right)z\right\| + \left\|K_{n\eta}\left|A_\eta\right|^s z\right\| \le \gamma_0 c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_{s/2}n^{-s/(2k)}\rho,$$

так как из [2, с. 92] имеем $\left\|\left|A_\eta\right|^s - |A|^s\right\| \le c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}$, $c_s = \mathrm{const}$, ($c_s \le 2$ для $0<s\le 1$). Из (14)

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\| \le \left\|K_{n\eta}x^*\right\| + \gamma_* n^{1/(2k)}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right) = \left\|K_{n\eta}x^*\right\| + k^{1/2}\alpha^{1/(2k)}n^{1/(2k)}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right) \le$$

$$\le \gamma_0 c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_{s/2}n^{-s/(2k)}\rho + k^{1/2}\alpha^{1/(2k)}n^{1/(2k)}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right),\ 0<s<\infty. \tag{15}$$

Теорема 4 доказана.

Минимизируя правую часть (15) по n, получим значение априорного момента останова: $n_{\text{опт}} = s^{(s+2k)/(s+1)}4^{-s/(s+1)}k^{-(k+s)/(s+1)}\alpha^{-1}\rho^{2k/(s+1)}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{-2k/(s+1)}$.

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (15), получим оптимальную оценку погрешности для метода итераций (9)

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\|_{\text{опт}} \le c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho +$$

$$+4^{s/(2k(s+1))}(s+1)k^{s(k-1)/(2k(s+1))}s^{s(1-2k)/(2k(s+1))}\rho^{1/(s+1)}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{s/(s+1)},\ 0<s<\infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О.В. Итерационная процедура неявного типа решения операторных уравнений / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 6. – С. 39–44.

2. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.

***V.F. Savchuk.* To the Question About Apriori Choice of Parameter Regularization in the Implicit Iteration Method for Solution of the Operator Equations with Approximately Operator**

The implicit iteration method for solution of the first–kind operator equations with a self–conjugated and non self–conjugated non negative bounded operator in the Hilbert space is proposed. Convergence of a method is proved in case of an apriori choice of number of iterations in ussual norm of Hilbert space, supposing that not only the right part of the equation but the operator as well have errors. The estimations of an error and apriori moment of stop are received.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 04.02.2013