УДК 517.923

Е.А. Натынчик, Т.И. Шило

СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ПРАВЫЕ ЧАСТИ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ ПОЛИНОМАМИ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ ОТНОСИТЕЛЬНО ИСКОМЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящей работе найдены необходимые и достаточные условия принадлежности специальной системы второго порядка, правые части которой являются полиномами третьей степени относительно искомых функций, к классу P-типа, т.е. найдены необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных многозначных особых точек в решениях данной системы. Эта проблема не нова, однако для данной системы еще далека от завершения. Наряду с методом малого параметра Пенлеве и методом основанным на редукции от системы второго порядка к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка, в данной заметке применен метод сведения систем упрощенных уравнений к системе двух дифференциальных уравнений Брио и Буке. Предлагаемый метод позволяет сравнительно легко выписать условия отсутствия подвижных критических особых точек в решениях исходной системы в явном виде.

Найденные в данной работе условия принадлежности системы к классу P-типа легко проверяются на практике.

Рассмотрим специальную систему двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dz}=P(y,x,z),\ \ \frac{dx}{dz}=Q(y,x,z), \tag{1}$$

где P и Q — полиномы третьей степени по y и x с коэффициентами, голоморфными относительно z в некоторой области *D*.

Будем искать необходимые и достаточные условия того, чтобы все подвижные особые точки решений системы вида (1) были однозначными.

Пусть система (1) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dz}=a_{30}y^3+a_{21}y^2x+a_{20}y^2+a_{02}x^2+a_{11}xy+a_{10}y+a_{01}x+a_{00}, \\ \dfrac{dx}{dz}=b_{30}x^3+b_{21}y^2x+b_{12}yx^2+b_{02}x^2+b_{11}xy+b_{01}x+b_{10}y+b_{00}, \end{cases} \tag{2}$$

где a_{ij} и $b_{ij}\ (i,j=\overline{0,3})$ — голоморфные функции относительно $z\in D$, причем $b_{12}(z)\neq 0$.

Для нахождения необходимых условий отсутствия подвижных критических особых точек применим метод малого параметра Пенлеве [1]. Неопределенность, с которой вводится параметр λ, позволяет придать этому методу особую гибкость. Вводя параметр λ в рассматриваемую систему различным образом, мы тем самым получим необходимые условия отсутствия у нее подвижных критических особых точек.

Введем в систему (2) параметр λ следующим образом:

$$y=Y,\ x=\frac{X}{\lambda},\ z=z_0+\lambda^2 Z, \tag{3}$$

где z_0 – произвольная точка области *D*, не обращающая $b_{12}(z)$ в нуль.

Получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dz} = \lambda a_{21}(z_0+\lambda^2 Z)Y^2X + \lambda^2 a_{30}(z_0+\lambda^2 Z)Y^3 + a_{02}(z_0+\lambda^2 Z)X^2 + \\ + \lambda a_{11}(z_0+\lambda^2 Z)XY + \lambda^2 a_{10}(z_0+\lambda^2 Z)Y + \lambda a_{01}(z_0+\lambda^2 Z)X + \\ + \lambda^2 a_{00}(z_0+\lambda^2 Z), \\ \dfrac{dX}{dz} = b_{03}(z_0+\lambda^2 Z)X^3 + \lambda b_{12}(z_0+\lambda^2 Z)YX^2 + \lambda^2 b_{21}(z_0+\lambda^2 Z)Y^2X + \\ + \lambda b_{02}(z_0+\lambda^2 Z)X^2 + \lambda^2 b_{11}(z_0+\lambda^2 Z)XY + \lambda^2 b_{01}X + \lambda^3 b_{10}(z_0+\lambda^2 Z)Y + \\ + \lambda^3 b_{00}(z_0+\lambda^2 Z). \end{cases} \tag{4}$$

В системе (4) положим $\lambda = 0$, тогда получим систему упрощенных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dY_0}{dz} = a_{02}(z_0)X_0^2, \\ \dfrac{dX_0}{dz} = b_{03}(z_0)X^3, \end{cases} \tag{5}$$

откуда

$$X_0(z) = \frac{1}{\sqrt{-2b_{03}(z_0)}(z-z_0)^{\frac{1}{2}}}, \quad Y_0(z) = -\frac{a_{02}(z_0)}{a_{12}(z_0)}.$$

Очевидно, что точка z_0 для компоненты $X_0(z)$ решения системы (5), а, значит, и для решения системы (2) является подвижным критическим полюсом. Предшествующее рассуждение отпадает при $b_{03}(z) \equiv 0$.

Введя в систему (2) параметр λ по формулам

$$x = X,\ y = \frac{Y}{\lambda},\ z = z_0 + \lambda^2 Z, \tag{3'}$$

получим при λ=0 систему упрощенных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dY_0}{dz} = a_{30}(z_0)Y_0^3, \\ \dfrac{dX_0}{dz} = b_{21}(z_0)Y_0^2 X_0. \end{cases} \tag{6}$$

Интегралы системы (6) имеют вид

$$Y_0(z) = \frac{1}{\sqrt{-2a_{30}(z_0)}(z-z_0)^{\frac{1}{2}}}, \quad X_0(z) = C_1(z-z_0)^{-\frac{b_{21}(z_0)}{a_{30}(z_0)}}.$$

Для отсутствия подвижных критических особых точек необходимо, чтобы $a_{30}(z) \equiv 0$.

В дальнейшем будем считать, что члены $a_{30}y^3$ и $b_{03}x^3$ в системе (2) отсутствуют. В этом случае делая замену

$$y = \frac{Y}{\lambda},\ x = \frac{X}{\lambda},\ z = z_0 + \lambda^2 Z, \tag{7}$$

при λ=0 получим систему упрощенных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dY_0}{dz} = a_{21}(z_0)Y_0^2 X_0, \\ \dfrac{dX_0}{dz} = b_{21}(z_0)Y_0^2 X_0 + b_{12}(z_0)X_0^2 Y_0. \end{cases} \tag{8}$$

Положив в автономной системе (8) $Y_0 = vX_0$, где v – некоторая функция z, получим

$$\begin{cases} \dfrac{dX_0}{dz} = X_0^3\left(b_{21}v^2 + b_{12}v\right), \\ \dfrac{dv}{dz} = X_0^2\left(a_{21}v^2 - v\left(b_{12}v + b_{21}v^2\right)\right). \end{cases} \tag{9}$$

Введем обозначения

$$P(v) = b_{21}v^2 + b_{12}v,\ Q(v) = a_{21}v^2,\ R(v) = Q(v) - vP(v) = a_{21}v^2 - b_{21}v^3 - b_{12}v^2.$$

Тогда система (9) перепишется в виде

$$\begin{cases} X_0' = X_0^3 P(v), \\ v' = X_0^2 R(v). \end{cases} \tag{10}$$

Исключая переменную X_0 из системы (10), получим уравнение

$$v'' = A_0(v)v'^2, \tag{11}$$

где $A_0(v) = \dfrac{2P(v) + R_v'}{R} = \dfrac{2a_{21}v - b_{21}v^2}{-b_{21}v^3 + (a_{21} - b_{12})v^2}$.

В работе рассмотрен случай, когда $A_0(v) \equiv 0,$ т.е. когда $a_{21} \equiv 0, b_{21} \equiv 0, b_{12} \neq 0$.

Итак, в дальнейшем будем исследовать систему вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dz} = a_{20}y^2 + a_{02}x^2 + a_{11}xy + a_{10}y + a_{01}x + a_{00}, \\ \dfrac{dx}{dz} = b_{12}yx^2 + b_{02}x^2 + b_{11}xy + b_{01}x + b_{10}y + b_{00}. \end{cases} \tag{12}$$

Делая в системе (12) замену вида (7), получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dz} = \lambda a_{20}(z_0 + \lambda^2 Z)Y^2 + \lambda a_{02}(z_0 + \lambda^2 Z)X^2 + \lambda a_{11}(z_0 + \lambda^2 Z)XY + \\ + \lambda^2 a_{10}(z_0 + \lambda^2 Z)Y + \lambda^2 a_{01}(z_0 + \lambda^2 Z)X + \lambda^3 a_{00}(z_0 + \lambda^2 Z), \\ \dfrac{dX}{dz} = b_{12}YX^2 + \lambda b_{02}X^2 + \lambda b_{11}XY + \lambda^2 b_{01}X + \lambda^2 b_{10}Y + \lambda^3 b_{00}. \end{cases} \tag{13}$$

При λ=0 имеем

$$\begin{cases} \dfrac{dY_0}{dz} = 0, \\ \dfrac{dX_0}{dz} = b_{12}(z_0)Y_0X_0^2, \end{cases}$$

откуда

$$X_0(z) = -\frac{1}{cb_{12}(z_0)\left(z - z_0\right)}, Y_0(z) = c_1. \tag{14}$$

Разлагая интегралы системы (13) по степеням λ, получаем

$$X(z) = X_0(z) + \lambda X_1(z) + \lambda^2 X_2(z) + \ldots + \lambda^n X_n(z) + \ldots\ ,$$

$$Y(z) = Y_0(z) + \lambda Y_1(z) + \lambda^2 Y_2(z) + \ldots + \lambda^n Y_n(z) + \ldots\ .$$

Для нахождения $Y_1(z),\ X_1(z)$ получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dY_1}{dz} = a_{20}(z_0)Y_0^2 + a_{11}(z_0)X_0Y_0 + a_{02}(z_0)X_0^2, \\ \dfrac{dX_1}{dz} = b_{12}(z_0)X_0^2Y_0 + 2b_{12}(z_0)X_0Y_0X_1 + b_{02}(z_0)X_0^2 + b_{11}(z_0)X_0Y_0. \end{cases}$$

Откуда, учитывая (14), получаем

$$Y_1(z) = a_{20}(z_0)c_1^2 z - \frac{a_{11}(z_0)}{b_{12}(z_0)} Ln(z - z_0) + \frac{a_{02}(z_0)}{c_1^2 b_{12}^2(z_0)(z - z_0)},$$

$$X_1(z) = \frac{a_{20}(z_0) - b_{11}(z_0)}{2b_{12}(z_0)} - \frac{a_{02}(z_0)Ln(z - z_0)}{c_1^4 b_{12}^3(z_0)(z - z_0)^2} + \frac{b_{02}}{c_1^2 b_{02}^2(z - z_0)} + \frac{c_2}{(z - z_0)^2}.$$

Следовательно, $Y_1(z)$ и $X_1(z)$, а потому $Y(z)$ и $X(z)$ имеют подвижную многозначную особенность в точке $z = z_0$.

Таким образом, для того чтобы $Y(z)$ и $X(z)$ не имели критических подвижных особых точек, необходимо, чтобы $a_{11}(z) = 0, a_{02}(z) \equiv 0.$

Для нахождения $Y_2(z)$ получим уравнение

$$\frac{dY_2}{dz} = 2a_{20}(z_0)Y_0Y_1 + a_{10}(z_0)Y_0 + a_{01}(z_0)X_0,$$

где $Y_0 = c_1,\ x_0 = -\dfrac{1}{c_1 b_{12}(z_0)(z - z_0)}.$

Отсюда находим

$$Y_2(z) = 2a_{20}^2(z_0)c_1^3 \frac{z^2}{2} + a_{10}c_1 z - \frac{a_{01}(z_0)}{c_1 b_{12}(z_0)} Ln(z - z_0) + c_3\ .$$

Для отсутствия подвижных многозначных особенностей у решений системы (2) необходимо, чтобы $a_{01}(z) \equiv 0.$

При перечисленных выше ограничениях система (2) принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dz} = a_{20}y^2 + a_{10}y + a_{00}, \\ \dfrac{dx}{dz} = b_{12}yx^2 + b_{02}x^2 + b_{11}xy + b_{01}x + b_{10}y + b_{00}. \end{cases} \quad (15)$$

Система (15) при любом конечном y_0 и $b_{12}(z_0)y_0 + b_{02}(z_0) \neq 0$ имеет единственное решение $(x(z), y(z))$, обладающее свойством:

$x(z) \to \infty,\ y(z) \to y_0$ при $z \to z_0 \in D.$

Для компоненты решения $x(z)$ точка $z = z_0$ является подвижным полюсом первого порядка.

Если $a_{20}(z) \equiv 0$, то первое уравнение системы (15) является линейным. Подставляя в этом случае вместо y голоморфное решение $y(z)$ во второе уравнение системы (15), мы получим уравнение Риккати, которое, как известно [1], является уравнением с неподвижными критическими особыми точками.

Из вышесказанного следует

Теорема 1. Система (2) при выполнении условий

$a_{30}(z) \equiv 0,\ b_{03}(z) \equiv 0,\ a_{21}(z) \equiv 0,\ b_{21}(z) \equiv 0,\ a_{11}(z) \equiv 0,\ a_{01}(z) \equiv 0,\ a_{20}(z) \equiv 0,$
$a_{02}(z) \equiv 0$

представляет собой класс системы типа Пенлеве, т.е. является системой, решение которой не имеет подвижных критических особых точек.

Система (15) может иметь решение с подвижной многозначной особенностью в точке z_0 только в том случае, когда $y(z) \to \infty$ при $z \to z_0$. Эта возможность в действительности может как иметь место, так и не иметь, что видно из следующих примеров.

Пример 1. Пусть имеем систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dz} = -y^2, \\ \dfrac{dx}{dz} = yx^2 + y. \end{cases}$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$y(z) = \frac{1}{z - z_0},\ x(z) = tg(\ln(z - z_0) + c_1),$$

где $c_1,\ z_0$ — произвольные постоянные.

Откуда видно, что при $z \to z_0$ $y(z) \to \infty$, а компонента $x(z)$ остается неопределенной.

Пример 2.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dz} = y^2, \\ \dfrac{dx}{dz} = yx^2. \end{cases}$$

В этом случае общее решение представляется в виде

$$y(z) = -\frac{1}{z - z_0}, \; x(z) = \frac{1}{\ln(z - z_0)c_1},$$

откуда видим, что точка $z = z_0$ является подвижной многозначной особой точкой для компоненты $x(z)$.

Пример 3.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dz} = -y^2, \\ \dfrac{dx}{dz} = yx^2 - xy. \end{cases}$$

Общее решение представимо в виде

$$y(z) = \frac{1}{z - z_0}, \; x(z) = \frac{1}{1 - c_1(z - z_0)},$$

откуда замечаем, что $y(z)$ и $x(z)$ всегда стремятся к определенным значениям и точка z_0 не является многозначной особенностью для решений данной системы.

Пусть $a_{20}(z) \neq 0$. Исключив в этом случае переменную y из системы (15) с помощью подстановки

$$y(z) = -\frac{x' - b_{02}x^2 - b_{01}x - b_{00}}{b_{12}x^2 + b_{11}x + b_{10}},$$

получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$x'' = A_0(x,z)x'^2 + A_1(x,z)x' + A_2(x,z), \tag{16}$$

где $A_0(x,z) = \dfrac{2b_{12}x + a_{20} + b_{11}}{b_{12}x^2 + b_{11}x + b_{10}}$,

$$A_1(x,z) = a_{10} + b_{01} + 2b_{02}x + \frac{(2b_{12}x + b_{11})(-b_{02}x^2 - b_{01}x - b_{00}) + b'_{12}x^2 + b'_{11}x +}{b_{12}x^2 + b_{11}x + b_{10}}$$

$$\frac{+ b'_{10} - 2a_{20}b_{02}x^2 - 2a_{20}b_{01}x - 2a_{20}b_{00}}{b_{12}x^2 + b_{11}x + b_{10}},$$

$$A_2(x,z) = (b_{12}a_{00} + b'_{02} - a_{10}b_{02})x^2 + (b'_{01} + b_{11}a_{00} - a_{10}b_{01})x + b_{10}a_{00} - a_{10}b_{00} +$$

$$+ \frac{a_{20}b_{02}^2x^4 + a_{20}b_{01}^2x^2 + a_{20}b_{00}^2 + 2a_{20}b_{00}b_{01} + (b'_{12}x^2 + b'_{11}x + b'_{10})(-b_{02}x^2 - b_{01}x - b_{00})}{b_{12}x^2 + b_{11}x + b_{10}}.$$

Как известно [1], для отсутствия подвижных критических особых точек у решений уравнения (16) необходимо, чтобы коэффициент имел одну из девяти форм [4], а полюсы $A_1(x,z)$, $A_2(x,z)$ относительно x были простые и совпадали с полюсами $A_0(x,z)$.

Если $b_{12}(z) \neq 0$, $a_{20}(z) \neq 0$, то $A_0(x,z)$ может принимать лишь форму $A_0(x,z) = \dfrac{2}{x}$. Это возможно, если

$$b_{10}(z) \equiv 0, \; b_{11}(z) \equiv a_{20}(z). \tag{17}$$

Решения системы (15) при условии, что $b_{10}(z)\equiv 0,$ обладающие свойством

$$y(z)\to\infty,\ x(z)\to x_0 \text{ при } z\to z_0, \tag{18}$$

будем искать в виде

$$y(z)=\frac{\alpha_0+u(z)}{z-z_0},\ x(z)=x_0+v(z), \tag{19}$$

где $\alpha_0\cdot x_0\neq 0,$ а $u(z)$ и $v(z)$ — голоморфные функции z, обладающие следующими свойствами:

$$u(z)\to 0,\ v(z)\to 0,\ (z-z_0)u'(z)\to 0,\ (z-z_0)v'(z)\to 0, \text{ при } z\to z_0.$$

Для определения коэффициентов α_0 и x_0 получим систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha_0+a_{20}(z_0)\alpha_0^2=0,\\ b_{12}(z_0)\alpha_0x_0^2+a_{20}(z_0)\alpha_0x_0=0,\end{cases}$$

откуда

$$\alpha_0=-\frac{1}{a_{20}(z_0)},\ x_0=-\frac{a_{20}(z_0)}{b_{12}(z_0)}.$$

Делая замену переменных

$$z-z_0=\tau,\ y=\tau^{-1}(\alpha_0+u),\ x=x_0+v, \tag{20}$$

придем от системы (15) при выполнении условий (17) к системе уравнений Брио и Буке.

$$\begin{cases}\tau\dfrac{du}{d\tau}=-u+F_1(\tau,u,v),\\ \tau\dfrac{dv}{d\tau}=v+F_2(\tau,u,v),\end{cases} \tag{21}$$

где F_1 и F_2 суть полиномы относительно τ,u,v.

Характеристическое уравнение системы (21) имеет корни $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1.$ Следовательно [3], система (21) или вовсе не имеет решений со свойством

$$u(\tau)\to 0,\ v(\tau)\to 0 \text{ при } \tau\to 0, \tag{22}$$

или имеет однопараметрическое семейство. Все зависит от того, будет выполняться или нет некоторое условие (A), выражающееся через коэффициенты системы (21). В нашем случае условие (A) заключается в том, чтобы система

$$\begin{cases}2\alpha_1=\dfrac{a_{10}a_{20}^2+a_{20}'}{a_{20}^2},\\ \beta_1=\beta_1-\dfrac{b_{12}'a_{20}}{b_{12}^2}+\dfrac{a_{20}'}{b_{12}}+b_{02}\dfrac{a_{20}^2}{b_{12}^2}-\dfrac{b_{01}a_{20}}{b_{12}}+b_{00}\end{cases}$$

имела решение, для чего необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$\frac{b_{12}'a_{20}}{b_{12}^2}-\frac{a_{20}'}{b_{12}}-b_{02}\frac{a_{20}^2}{b_{12}^2}+\frac{b_{01}a_{20}}{b_{12}}-b_{00}\equiv 0. \tag{A}$$

Если условие (A) не выполнено, то голоморфных решений со свойством (22) система (21) не имеет.

Но в этом случае она будет иметь [3] семейство неголоморфных решений вида

$$u(\tau)=-\frac{1}{a_{20}(z_0)}\tau^{-1}+\frac{a_{10}(z_0)a_{20}^2(z_0)+a'_{20}(z_0)}{2a_{20}(z_0)}+\alpha_2\tau+\ldots$$

$$u(\tau)=-\frac{a_{20}(z_0)}{b_{12}(z_0)}+\sum_{\sigma=1}^{\infty}\beta_\sigma\left(\tau\ln\tau\right)^{\sigma},$$

обладающих свойством (22) при $\tau\to 0$ по путям конечного раствора с вершиной в точке $\tau=0.$ Тогда, очевидно, система

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dz}=a_{20}y^2+a_{10}y+a_{00},\\ \dfrac{dx}{dz}=b_{12}yx^2+b_{02}x^2+a_{20}xy+b_{01}x+b_{00}\end{cases}\tag{23}$$

будет иметь семейство неголоморфных решений вида

$$y(z)=-\frac{1}{a_{20}(z_0)(z-z_0)}+\frac{a_{10}(z_0)a_{20}^2(z_0)+a'_{20}(z_0)}{2a_{20}^2(z_0)}+\alpha_2(z-z_0)+\ldots$$

$$x(z)=-\frac{a_{20}(z_0)}{b_{12}(z_0)}+\sum_{\sigma=1}^{\infty}\beta_\sigma\left((z-z_0)\ln(z-z_0)\right)^{\sigma},$$

где β_1 — произвольный параметр.

При выполнении условия (А) уравнение (16) сводится к виду

$$x''=\frac{2}{x}x'^2+\left(a_{10}-b_{01}+\frac{b'_{12}}{b_{12}}-\frac{a_{20}b_{02}}{b_{12}}-\frac{3b_{00}}{x}\right)x'+$$

$$+\left(-\frac{a'_{20}b_{02}}{b_{12}}-\frac{b'_{12}b_{01}}{b_{12}}+\frac{2a_{20}b_{01}b_{02}}{b_{12}}-\frac{a_{20}^2b_{02}^2}{b_{12}^2}+\frac{a_{20}b_{02}b'_{12}}{b_{12}^2}+b'_{01}+a_{20}a_{00}-a_{10}b_{01}\right)x+$$

$$+\left(b_{12}a_{00}+b'_{02}-a_{10}b_{02}+\frac{a_{20}b_{02}^2}{b_{12}}-\frac{b'_{12}b_{01}}{b_{12}}\right)x^2+\frac{b_{00}^2}{x}+\frac{2a_{20}b_{02}b_{00}}{b_{12}}+\frac{a_{20}b_{01}^2}{b_{12}}-$$

$$-\frac{b'_{12}}{b_{12}}b_{00}-\frac{a'_{20}b_{01}}{b_{12}}-a_{11}b_{00}+\frac{a_{20}b_{02}a'_{20}}{b_{12}^2}+\frac{a_{20}b_{01}b'_{12}}{b_{12}^2}-\frac{2a_{20}^2b_{02}b_{01}}{b_{12}^2}.$$

Как известно [2], для того чтобы уравнение (24) не имело решений с подвижными критическими особыми точками, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент при x^2 тождественно был равен нулю, а $b_{00}\equiv 1$, т.е. выполнялось равенство

$$b'_{02}+b_{12}a_{00}-a_{10}b_{02}+\frac{a_{20}b_{02}^2}{b_{12}}-\frac{b'_{12}b_{02}}{b_{12}}\equiv 0.\tag{25}$$

Итак, из вышесказанного следует

<u>Теорема 2.</u> Если для системы (2) выполнены следующие условия:

1. $a_{30}(z)\equiv 0,\ b_{03}(z)\equiv 0,\ b_{21}(z)\equiv 0,\ a_{21}(z)\equiv 0;$
2. $b_{10}(z)\equiv 0,\ a_{01}(z)\equiv 0,\ a_{11}(z)\equiv 0,\ a_{02}(z)\equiv 0;$

3. $b_{11}(z) \equiv a_{20}(z),\ b_{00}(z) \equiv 1,\ b_{12}(z) \neq 0,\ a_{20}(z) \neq 0;$

4. $a'_{20} + b_{12} - a_{20}b_{01} - \dfrac{a_{20}b'_{12}}{b_{12}} + \dfrac{a_{20}^2 b_{02}}{b_{12}} \equiv 0;$

5. $b'_{02} + b_{12}a_{00} - a_{10}b_{02} - \dfrac{a_{20}b_{12}^2}{b_{12}} + \dfrac{b'_{12}b_{02}}{b_{12}} \equiv 0,$

то система не имеет решений с подвижными многозначными особенностями, т.е. представляет класс системы типа Пенлеве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев, В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В.В. Голубев. – М. : ГИТТЛ, 1950. – 436 с.
2. Айнс, Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харьков : ГТИУ, 1939. – 717 с.
3. Мячин, В.Ф. Системы уравнений Брио и Буке / В.Ф. Мячин // Вестн. Ленинград. ун-та. – 1958. – № 7. – С. 88–102.
4. Натынчик, Е.А. Уравнение второго порядка с неподвижными критическими особыми точками / Е.А. Натынчик, Т.И. Шило // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. – 2011. – № 1. – С. 117–122.

E.A. Natynchik, T.I. Shilo. **Second-order System, the Right-Which is a Polynomial of the ThirdDegree with Respect to the Unknown Functions**

In this paper we find necessary and sufficient conditions for a special second-order system, the right sides of which are third-degree polynomial in the unknown functions, the class of P-type, ie Necessary and sufficient conditions for the absence of movable valued singularities in the solutions of the system. This problem is not new, but for the system, this task is far from complete. Along with the small parameter method Painlev?, and a method based on the reduction of the second-order system to a nonlinear differential equation of second order, in this paper, the method of information system of simplified equations for a system of two differential equations of Briot and Bouquet. The proposed method makes it relatively easy to describe the condition of absence of movable critical singularities in the solutions of the original system explicitly.Found in this work conditions for membership of the class of P-type can easily be verified in practice.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 30.04.2013