УДК 517.925;519.6

А. Киндыбалюк, Н. Притула

ОБОСНОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ СТЕПЕННЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ АДВЕКЦИИ – ДИФФУЗИИ

Проведено априорное сравнение вычислительных схем на основе степенных базисных функций с противопотоковой схемой и со схемой Ильина – Аллена – Саусвелла. Изучен вопрос устойчивости и сходимости вычислительной схемы с использованием степенных базисных функций метода конечных элементов.

Введение

В математическом моделировании процессов миграции примесей значительную роль играют краевые задачи для уравнения адвекции – диффузии. При некоторых условиях, а именно при доминировании процессов адвекции над процессами диффузии или при некоторых краевых условиях, такие задачи превращаются в сингулярно возмущенные [1–9]. Применение к таким задачам классических схем метода конечных разностей (МКР) или метода конечных элементов (МКЭ) непригодно, поскольку при больших значениях числа Пекле образуются неестественные осцилляции приближенного решения [1, 2, 8, 9]. Их можно избежать путем применения сетки с узлами, количество которых равняется числу Пекле. Однако это приводит к значительным вычислительным затратам.

Методы и подходы к решению таких задач берут свое начало в 50-х годах XX ст. Была предложена схема Ильина – Аллена – Саусвелла, с помощью которой в узлах сетки вычисляют точные решения. Были разработаны противопотоковые схемы, применялись аппроксимации Хэмкэра [1, 3], экспоненциальные базисные функции метода конечных элементов [4, 7, 8]. Также разработан подход, который базируется на симметризации исходной задачи путем выбора тестовых функций в методе Петрова – Галеркина [9].

Пусть $\mu > 0$ – коэффициент диффузии, $\beta > 0$ – коэффициент адвективного переноса, а $h > 0$ – шаг дискретизации. Отметим, что упомянутые схемы позволяют снизить осцилляции приближенного решения путем искусственного повышения коэффициента диффузии. В работе [9] показано, что противопотоковая схема для краевой задачи

$$\begin{cases} \text{найти функцию } u = u(x) \text{ такую, что:} \\ -\mu u'' + \beta u' = \tilde{f} \text{ на } \Omega := (0,\, 1), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{0.1}$$

аппроксимирует краевую задачу

$$\begin{cases} \text{найти функцию } u = u(x) \text{ такую, что:} \\ -\left(\mu + \dfrac{\beta h}{2}\right) u'' + \beta u' = \tilde{f} \text{ на } \Omega := (0,\, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{0.2}$$

В работе [9] показано, что в случае постоянных коэффициентов схема Ильина – Аллена – Саусвелла может быть получена с применением разнообразных подходов: аппроксимации Хэмкэра (L – сплайны), экспоненциальных базисных функций метода конечных элементов, симметризации краевой задачи и применения к ней метода Петрова – Галеркина.

Схему Ильина – Аллена – Саусвелла, как показано в [9], можно получить применением классической схемы МКР для уравнения

$$-\mu\left(\frac{h\beta}{2\mu}cth\left(\frac{h\beta}{2\mu}\right)\right)u''+\beta u'=\tilde{f}\ . \tag{0.3}$$

Так как вышеперечисленные стабилизационные вычислительные схемы в случае постоянных коэффициентов в уравнении (0.1) приводят к схеме Ильина – Аллена – Саусвелла, то подход к решению задачи на основе степенных базисных функций, предложенный в [5], будем сравнивать со схемой Ильина – Аллена – Саусвелла.

1. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу с уравнением адвекции – диффузии [5],

$$\begin{cases} \text{найти функцию } u=u(x) \text{ такую, что}: \\ -u''+Peu'=f \ \text{ на } \Omega:=(0,1), \\ u(0)=u(1)=0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $Pe=\dfrac{\beta}{\mu}>0$ – число Пекле, характеризующее отношение скорости процессов адвекции к скорости процессов диффузии, а функция $f=\dfrac{\tilde{f}}{\mu}$ характеризует интенсивность внутренних распределенных источников примесей. Для этой задачи в [5] была построена эффективная вычислительная схема МКЭ на основе степенных базисных функций и проведен анализ погрешностей относительно точного решения.

В силу (0.2) и (0.3) следует, что противопотоковая схема для задачи (1.1) аппроксимирует краевую задачу

$$\begin{cases} \text{найти функцию } u=u(x) \text{ такую, что}: \\ -\left(1+\dfrac{Pe\,h}{2}\right)u''+Peu'=f \ \text{ на } \Omega:=(0,1), \\ u(0)=u(1)=0, \end{cases} \tag{1.2}$$

а схема Ильина – Аллена – Саусвелла для задачи (1.1) аппроксимирует краевую задачу

$$\begin{cases} \text{найти функцию } u=u(x) \text{ такую, что}: \\ -\left(\dfrac{Peh}{2}cth\left(\dfrac{Peh}{2}\right)\right)u''+Peu'=f \ \text{ на } \Omega:=(0,1), \\ u(0)=u(1)=0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Изучим вопрос устойчивости и сходимости вычислительной схемы решения задачи (1.1) на основе степенных базисных функций, а также сравним значение повышенного коэффициента диффузии, обусловленное степенными базисными функциями со значениями повышенного коэффициента диффузии, обусловленными противопотоковой схемой и схемой Ильина – Аллена – Саусвелла.

2. Устойчивость и сходимость вычислительной схемы со степенными базисными функциями

Для доказательства сходимости вычислительной схемы для решения задачи (1.1) на основе степенных базисных функций исследуем порядок аппроксимации этой схемы и ее устойчивость.

Пусть $\rho(\alpha)$ – искусственно повышенный коэффициент диффузии и схема решения задачи (1.1) имеет вид:

$$-\rho(\alpha)\left(\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}\right)+\frac{Pe}{2h}(u_{i+1}-u_{i-1})=f_i. \tag{2.1}$$

Разложением в ряд Тейлора u_{i+1},u_{i-1} убеждаемся, что схема (2.1) аппроксимирует дифференциальное уравнение вида

$$-\rho(\alpha)u''+Peu'=f\ \ \forall x\in\Omega:=(0,1) \tag{2.2}$$

с погрешностью аппроксимации $O(h^2)$.

Теорема 1. О безусловной устойчивости схемы с искусственно повышенным коэффициентом диффузии для уравнения адвекции – диффузии.

Пусть $\rho(\alpha)$ – искусственно повышенный коэффициент диффузии и α – параметр стабилизации. Тогда для безусловной устойчивости схемы (2.1) необходимо, чтобы значение искусственно повышенного коэффициента диффузии удовлетворяло условию $\rho(\alpha)\geq\frac{Peh}{2}$. При значении коэффициента диффузии $\rho(\alpha)=\frac{Peh}{2}$ схема вносит минимальную избыточную диффузию.

Доказательство. Запишем схему (2.1) относительно узлового значения u_i:

$$\frac{2\rho(\alpha)}{h^2}u_i=\left(\frac{\rho(\alpha)}{h^2}+\frac{Pe}{2h}\right)u_{i-1}+\left(\frac{\rho(\alpha)}{h^2}-\frac{Pe}{2h}\right)u_{i+1}+f_i. \tag{2.3}$$

Если коэффициенты при узловых значениях u_{i-1},u_{i+1} неотрицательные, то схема будет монотонной, а значит, корректной. Из того что $Pe>0,h>0$, коэффициент при узловом значении u_{i-1} есть всегда положительный. Для того чтобы коэффициент при узловом значении u_{i+1} был неотрицательный, необходимо, чтобы $\rho(\alpha)\geq\frac{Peh}{2}$. В случае $\rho(\alpha)=\frac{Peh}{2}$ искусственно повышенный коэффициент диффузии принимает минимальное значение, обеспечивая при этом корректность схемы.

Покажем безусловную устойчивость схемы (2.1) с использованием М-критерия [2]. Систему уравнений (2.1) запишем в матричной форме $AU=F$. Матрица A есть М-матрицей, так как диагональные элементы строго положительные, а недиагональные элементы или отрицательные, или равны нулю. Пусть $Lu:=-\rho(\alpha)u''+Peu'$ – дифференциальный оператор задачи (1.1), а L_hu_h – его дискретный аналог. Выберем функцию $e(x)=1+x>0\,\forall x\in\Omega$, причем $Le(x)=Pe>0$. Для функции $e(x)$ введем ее дискретный аналог, а именно вектор $e_h=\{1+x_i\}_{i=0}^{N}>0$. Выполнением арифметических операций убеждаемся в том, что $L_he_h=Pe>0,\forall x_i\in\Omega$. Тогда, согласно М-критерию, приближенное решение (2.1) можно оценить так:

$$\|U\|_\infty\leq\|A^{-1}\|_\infty\|F\|_\infty\leq\frac{\|e_h\|_\infty\|f\|_\infty}{\min\limits_k(Ae_h)_k}=\frac{2\|f\|_\infty}{Pe},$$

откуда следует безусловная устойчивость схемы (2.1).

Теорема 2. О безусловной устойчивости схемы с использованием степенных базисных функций для уравнения адвекции – диффузии.

Схема (2.1), построенная с применением степенных базисных функций МКЭ, безусловно устойчивая, если значение параметра стабилизации $\alpha_h \geq \frac{Peh}{2} + \sqrt{\frac{Peh}{2}\left(\frac{Peh}{2} - 1\right)}$. *При выборе параметра стабилизации* $\alpha_h = \frac{Peh}{2} + \sqrt{\frac{Peh}{2}\left(\frac{Peh}{2} - 1\right)}$ *схема вносит минимальную избыточную диффузию, обеспечивая при этом корректность схемы.*

Доказательство. С теоремы 1 следует, что схема (2.1) безусловно устойчивая, если значения искусственно повышенного коэффициента диффузии удовлетворяют условию $\rho(\alpha) \geq \frac{Peh}{2}$. В работе [5] показано, что коэффициент искусственно повышенной диффузии зависит от параметра стабилизации $\rho(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2\alpha - 1}$. С неравенства $\frac{\alpha^2}{2\alpha - 1} \geq \frac{Peh}{2}$, при $\alpha \geq 1$, получаем область допустимых значений параметра стабилизации $\alpha_h \geq \frac{Peh}{2} + \sqrt{\frac{Peh}{2}\left(\frac{Peh}{2} - 1\right)}$. При $\alpha_h = \frac{Peh}{2} + \sqrt{\frac{Peh}{2}\left(\frac{Peh}{2} - 1\right)}$ схема минимально повышает коэффициент диффузии для обеспечения безусловной устойчивости схемы (2.1).

Отметим, что при шаге дискретизации $h = \frac{2}{Pe}$ схема (2.1) аппроксимирует исходное уравнение, то есть коэффициент диффузии равен единице.

Отметим, что при выборе значения параметра стабилизации $\alpha_h = \frac{Peh}{2} cth\left(\frac{Peh}{2}\right) + \sqrt{\frac{Peh}{2} cth\left(\frac{Peh}{2}\right)\left(\frac{Peh}{2} cth\left(\frac{Peh}{2}\right) - 1\right)}$ схема с применением степенных базисных функций (2.1) совпадает со схемой Ильина – Аллена – Саусвелла.

Согласно теореме Лакса об эквивалентности [6], схема (2.1) является сходящейся со вторым порядком сходимости.

3. Априорное сравнение вычислительных схем

Проведем сравнение схемы с применением степенных базисных функций МКЭ с противопотоковой схемой и схемой Ильина – Аллена – Саусвелла для уравнения адвекции – диффузии (1.1). Критерием сравнения является значение искусственно повышенного коэффициента диффузии, так как чем больше отличается коэффициент искусственной диффузии от исходного значения, тем большей будет погрешность приближенного решения относительно точного решения задачи (1.1).

Теорема 3. Об априорном преимуществе схемы с применением степенных базисных функций над противопотоковой схемой и схемой Ильина – Аллена – Саусвелла для уравнения адвекции – диффузии.

Пусть $\rho_F = 1 + \dfrac{Peh}{2}$ *– коэффициент диффузии, полученный с применением противопотоковой схемы,* $\rho_E = \dfrac{Peh}{2} cth\left(\dfrac{Peh}{2}\right)$ *– коэффициент диффузии, полученный с применением схемы Ильина – Аллена – Саусвелла,* $\rho_P = \dfrac{hPe}{2}$ *– коэффициент диффузии, полученный с применением степенных базисных функций, тогда для любых* $Pe > 0,\ h > 0$ *справедливы следующие оценки:*

$$\rho_P < \rho_F,\ \rho_P < \rho_E. \tag{3.1}$$

Доказательство. *1.Сравнение с противопотоковой схемой.*

Коэффициент диффузии $\rho_F = 1 + \dfrac{Peh}{2}$, полученный с применением противопотоковой схемы, учитывая $\rho_P = \dfrac{Peh}{2}$, можно записать в виде $\rho_F = 1 + \rho_P$, откуда немедленно следует, что $\rho_P < 1 + \rho_P = \rho_F$.

2. Сравнение со схемой Ильина – Аллена – Саусвелла.

Коэффициент диффузии $\rho_E = \dfrac{Peh}{2} cth\left(\dfrac{Peh}{2}\right)$, полученный с применением схемы *Ильина – Аллена – Саусвелла*, учитывая $\rho_P = \dfrac{Peh}{2}$, можно записать в виде $\rho_E = \rho_P cth\left(\dfrac{Peh}{2}\right)$.

Так как $cth\left(\dfrac{Peh}{2}\right) = \dfrac{e^{Peh}+1}{e^{Peh}-1} = 1 + \dfrac{2}{e^{Peh}-1}$, то $\rho_E = \rho_P\left(1 + \dfrac{2}{e^{Peh}-1}\right)$. Поскольку $Pe, h > 0$ и $e^{Peh} > 1$, то выражения $\dfrac{2}{e^{Peh}-1} > 0$ и $1 + \dfrac{2}{e^{Peh}-1} > 1$. Отсюда следует $\rho_P > \rho_E$. Это значит, что решение задачи (1.1), полученное схемой с применением степенных базисных функций, имеет априори меньшую погрешность относительно точного решения задачи (1.1), нежели погрешность приближенного решения, полученного схемой Ильина – Аллена – Саусвелла или противопотоковой схемой. Теорема доказана.

Теорема 4. Об относительном сравнении значений коэффициентов искусственной диффузии.

Искусственно повышенный коэффициент, полученный схемой Ильина – Аллена – Саусвелла, на 31% выше, чем искусственно повышенный коэффициент, полученный схемой с использованием степенных базисных функций. Искусственно повышенный коэффициент, полученный противопотоковой схемой, на 100% выше, чем искусственно повышенный коэффициент, полученный схемой с использованием степенных базисных функций.

Доказательство. Рассмотрим значение относительной погрешности коэффициента диффузии с противопотоковой схемой $\varepsilon = \dfrac{\rho_F - \rho_P}{\rho_P} \times 100\%$.

Приняв во внимание теорему 3, получим $\varepsilon(h)=\frac{\rho_F-\rho_P}{\rho_P}\times 100\% = \frac{1+\frac{Peh}{2}-\frac{Peh}{2}}{\frac{Peh}{2}}\times 100\% = \frac{2}{Peh}\times 100\%$. Рассмотрим функцию относительной погрешности как функцию от количества конечных элементов. Пусть количество конечных элементов $N=\frac{1}{h}$, тогда функция относительной погрешности имеет вид $\varepsilon(N)=\frac{2N}{Pe}\times 100\%$. Для того чтобы определить свойства функции, изучим свойства ее первой производной. Производная функции относительной погрешности имеет вид $\varepsilon'(N)=\frac{2}{Pe}$. Так как первая производная положительная, то функция относительной погрешности возрастает. Применение степенных базисных функций имеет смысл при $N\le\frac{Pe}{2}$. Функция относительной погрешности принимает максимальное значение в точке $N_0=\frac{Pe}{2}$. Подставив это значение в функцию относительной погрешности, получим $\varepsilon_{\max}=\varepsilon(N_0)=\frac{2}{Pe}\frac{Pe}{2}\times 100\% = 100\%$.

Таким образом, противопотоковая схема повышает коэффициент диффузии на 100% больше, чем повышает схема с применением степенных базисных функций. Это значит, что при одинаковых вычислительных затратах схема с применением степенных базисных функций точнее отобразит решение, нежели противопотоковая схема.

Изучим вопрос об относительной погрешности, вносящейся схемой Ильина – Аллена – Саусвелла. Приняв во внимание теорему 3, получим $\varepsilon(h)=\frac{\rho_E-\rho_P}{\rho_P}\times 100\% = \left(\frac{2}{e^{Peh}-1}\right)\times 100\%$. Рассмотрим функцию относительной погрешности как функцию от количества конечных элементов. Пусть $N=\frac{1}{h}$, тогда функция относительной погрешности имеет вид $\varepsilon(N)=\frac{2}{e^{Pe/N}-1}\times 100\%$. Для того чтобы определить свойства функции, изучим свойства ее первой производной. Производная функции относительной погрешности имеет вид $\varepsilon'(N)=\frac{2e^{Pe/N}Pe}{\left(e^{Pe/N}-1\right)^2 N^2}$. Так как первая производная положительная, то функция относительной погрешности возрастает. Применение степенных базисных функций имеет смысл при $N\le\frac{Pe}{2}$. Функция относительной погрешности принимает максимальное значение в точке $N_0=\frac{Pe}{2}$. Подставив это значение в функцию относительной погрешности, получим $\varepsilon_{\max}=\varepsilon(N_0)=\frac{2}{e^2-1}\times 100\% \approx 31\%$.

Таким образом, применение схемы Ильина – Аллена – Саусвелла повышает коэффициент диффузии на 31% больше, чем применение схемы с использованием степенных базисных функций. Это значит, что при одинаковых вычислительных затратах схема с применением степенных базисных функций точнее отобразит решение, нежели схема Ильина – Аллена – Саусвелла.

4. Заключение

Схема с использованием степенных базисных функций оказалась более эффективной, чем схема Ильина – Аллена – Саусвелла и противопотоковая схема для сингулярно возмущенной задачи для уравнения адвекции – диффузии. Полученные результаты являются новыми в теории метода конечных элементов, а также могут быть использованы для решения широкого ряда задач экологии, прогнозирования погоды и миграции примесей. Главным результатом работы является аналитическое и априорное сравнение вычислительных схем, что позволяет убедиться в эффективности степенных базисных функций для решения подобного рода задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. De Groen, P.P.N. Error bounds for exponentially fitted Galerkin methods applied to stiff two-point boundary value problems / P.P.N. De Groen, P.W. Hemker // Numerical Analysis of Singular Perturbations Problems, Hemker P.W., J.J. II. Miller eds. – New York : Academic Press, 1979. – P. 217– 249.

2. Ross, Hans Görg. Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection – Diffusion – Reaction and flow problems / Hans Görg Ross, Martin Stynes, Lutz Tobiska // Springer – Verlag, Berlin Heidelberg, 2008. – 598 p.

3. Hemker, P.W. A numerical study of stiff two-point boundary value problems / P.W. Hemker. – Amsterdam : Mathematical Center, 1977. – 178 p.

4. Блажиевская, О. В. Об эффективности метода экспоненциальной подгонки при решении задач тепломассопереноса в пористых средах / О.В. Блажиевская, Т.И. Мандзак // Вестн. Львов. ун-та. Сер. прикл. матем. и информ. – 2000. – № 1. – С. 26–31.

5. Киндыбалюк, А.А. Применение степенных базисных функций МКЭ к решению сингулярно возмущенной задачи адвекции – диффузии // А.А. Киндыбалюк, Н.Н. Притула // Матем. вестн. НТШ. – 2012. – Т. 9. – С. 140–157.

6. Рихтмайер, Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Моротон. – М. : Мир, 1972. – 418 с.

7. Савула, Я.Г. Разномерная задача математической модели адвекции – диффузии в среде с тонким включением / Я.Г. Савула, Т.И. Мандзак // Компьютерная математика. – 2007. – № 2. – С. 59–70.

8. Синчук, Ю. Экспоненциальные аппроксимации МКЭ для сингулярно возмущенных задач конвекции – диффузии – реакции / Ю. Синчук, Г. Шинкаренко // Вестн. Львов. ун-та. Сер. прикл. матем. и информ. – 2007. – № 12. – С. 157–169.

9. Синчук, Ю. Аппроксимации метода конечных элементов с экспоненциальными весовыми функциями / Ю. Синчук, Г. Шинкаренко // Вестн. Львов. ун-та. Сер. прикл. матем. и информ. – 2007. – № 5. – С. 61–70.

A. Kindybaliuk, N. Prytula. **Rationale for the Use of Power Basis Functions in Finite Element Method for Singularly Perturbed Boundary Value Problem Advection – Diffusion**

A priori comparison of computational schemes based on power basis functions with the upwind scheme and the scheme by Il'in–Allen–Southwell has been conducted. Problem of stability and convergence of the computational scheme using the power basis functions of the finite elements has been discussed.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 27.02.2013