

УДК 539.12:530.145

В.А. Плетюхов, В.И. Стражев**РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ
ДЛЯ КИРАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 3/2**

Получено релятивистское волновое уравнение для киральной частицы со спином 3/2, не распа-
дающееся в P -инвариантном смысле. Рассмотрены матричная и спинорная формулировки этого уравнения.

Введение

В стандартном подходе теории релятивистских волновых уравнений (РВУ) обычно рассматривается набор неприводимых представлений группы Лоренца, минимально необходимый для описания частицы со спином S . В то же время использование расширенного набора представлений, включая кратные, позволяет учитывать дополнительные внутренние (изоспиновые) степени свободы, соответствующие иным квантовым числам [1]. Одним из таких квантовых чисел может быть, например, киральность, которая различает двукратно вырожденные состояния частицы с данным значением спина, сопряженные относительно операции пространственной инверсии.

Понятие киральности получило широкое распространение в современной теоретической физике после того, как в основу теории электрослабых взаимодействий было положено представление о существовании только левостороннего нейтрино. Однако разработка унитарной перенормируемой теории киральных частиц и их взаимодействий всё еще находится на самой начальной стадии. Существенный шаг в этом направлении для частиц со спином 1 сделан профессором Софийского университета Чижовым (см. обзор [2] и приведенные в нем ссылки). В настоящей работе в подходе Гельфанда – Яглома [3] построено РВУ первого порядка для киральной частицы с ненулевой массой и спином 3/2.

Матричная формулировка РВУ первого порядка для киральной частицы со спином 3/2

Рассмотрим следующую схему зацеплений неприводимых представлений группы Лоренца:

$$\begin{array}{ccc} 2\left(\frac{1}{2}, 1\right) & - & 2\left(1, \frac{1}{2}\right) \\ | & & | \\ \left(0, \frac{1}{2}\right) & - & \left(\frac{1}{2}, 0\right). \end{array} \quad (1)$$

Набор представлений, содержащихся в (1), отличается от набора, используемого при построении известного уравнения Фирца – Паули [4; 5], наличием кратных (повторяющихся) компонент $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ и $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Используя подход Гельфанда – Яглома [3], проанализируем схему (1) с точки зрения возможности построения матричного РВУ первого порядка

$$\left(\gamma_\mu \partial_\mu + m\right)\psi = 0 \quad (2)$$

для частицы со спином 3/2 и внутренним квантовым числом – киральностью.

Введем нумерацию неприводимых компонент, входящих в (1):

$$\begin{aligned} \left(0, \frac{1}{2}\right) \sim \tau_1 \sim 1, \quad \left(\frac{1}{2}, 1\right) \sim \tau_2 \sim 2, \quad \left(1, \frac{1}{2}\right) \sim \tau_3 \sim 3, \\ \left(\frac{1}{2}, 0\right) \sim \tau_4 \sim 4, \quad \left(1, \frac{1}{2}\right)' \sim \tau_5 \sim 5, \quad \left(\frac{1}{2}, 1\right)' \sim \tau_6 \sim 6 \end{aligned} \quad (3)$$

(штрихи здесь нужны для различения кратных представлений). Тогда матрица γ_4 уравнения (2) со схемой зацеплений (1) будет иметь структуру

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} C^{1/2} \otimes I_2 & \\ & C^{3/2} \otimes I_4 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $C^{1/2}$ и $C^{3/2}$ – спиновые блоки, соответствующие спинам 1/2 и 3/2:

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & c_{12}^{1/2} & 0 & c_{14}^{1/2} & 0 & c_{16}^{1/2} \\ c_{21}^{1/2} & 0 & c_{23}^{1/2} & 0 & c_{25}^{1/2} & 0 \\ 0 & c_{32}^{1/2} & 0 & c_{34}^{1/2} & 0 & c_{36}^{1/2} \\ c_{41}^{1/2} & 0 & c_{43}^{1/2} & 0 & c_{45}^{1/2} & 0 \\ 0 & c_{52}^{1/2} & 0 & c_{54}^{1/2} & 0 & c_{56}^{1/2} \\ c_{61}^{1/2} & 0 & c_{63}^{1/2} & 0 & c_{65}^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & c_{23}^{3/2} & c_{25}^{3/2} & 0 \\ c_{32}^{3/2} & 0 & 0 & c_{36}^{3/2} \\ c_{52}^{3/2} & 0 & 0 & c_{56}^{3/2} \\ 0 & c_{63}^{3/2} & c_{65}^{3/2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Остальные матрицы $\gamma_i (i=1, 2, 3)$ выражаются через γ_4 и «бусты» J^{i4} представления (1) по формуле

$$\gamma_i = [J^{i4}, \gamma_4].$$

Требование инвариантности уравнения (2) относительно преобразований собственной группы Лоренца налагает следующие ограничения на элементы $c_{\tau\tau'}^s$ матрицы γ_4 [3]:

$$\begin{aligned} c_{\tau\tau'}^s &= c_{\tau\tau'} \sqrt{(s+l_+ + 2)(s-l_+ - 1)}, \quad \text{если } l'_+ = l_+ + 1, l'_- = l_-, \\ c_{\tau\tau'}^s &= c_{\tau\tau'} \sqrt{(s+l_- + 2)(s-l_-)}, \quad \text{если } l'_+ = l_+, l'_- = l_- + 1, \\ c_{\tau\tau'}^s &= c_{\tau\tau'} \left(s + \frac{1}{2}\right), \quad \text{если } l'_+ = l_+, l'_- = l_-, \end{aligned} \quad (6)$$

где $l_+ = l_1 + l_2$, $l_- = |l_1 - l_2|$, $l'_+ = l'_1 + l'_2$, $l'_- = |l'_1 - l'_2|$, $c_{\tau\tau'}^s$ – произвольные комплексные числа для случая, когда представления τ , τ' зацепляются, и равные нулю во всех остальных случаях. Применительно к рассматриваемому РВУ условия (6) приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} c_{23}^{3/2} = 2c_{23}^{1/2}, \quad c_{32}^{3/2} = 2c_{32}^{1/2}, \quad c_{36}^{3/2} = 2c_{36}^{1/2}, \quad c_{63}^{3/2} = 2c_{63}^{1/2}, \\ c_{25}^{3/2} = 2c_{25}^{1/2}, \quad c_{52}^{3/2} = 2c_{52}^{1/2}, \quad c_{56}^{3/2} = 2c_{56}^{1/2}, \quad c_{65}^{3/2} = 2c_{65}^{1/2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Инвариантность РВУ (2) относительно операции пространственного отражения накладывает на числа $c_{\tau\tau'}$ условия:

$$\begin{aligned} c_{\tau\tau'}^s &= c_{\tau'\tau}^s, & \text{если } \dot{\tau} = \tau, \dot{\tau}' = \tau'; \\ c_{\tau\tau'}^s &= \pm c_{\tau'\tau}^s, & \text{если } \dot{\tau} = \tau, \dot{\tau}' \neq \tau' \\ & & \text{либо } \dot{\tau} \neq \tau, \dot{\tau}' = \tau'. \end{aligned} \quad (8)$$

При этом знак «+» во втором условии (8) (для определенности считаем $\dot{\tau} = \tau$, $\dot{\tau}' \neq \tau'$) берется тогда, когда оператор пространственного отражения P действует в подпространствах R^τ , $R^{\tau'}$ по формулам

$$P\xi_{sm}^{\tau} = (-1)^s \xi_{sm}^{\tau}, \quad P\xi_{sm}^{\tau'} = (-1)^s \xi_{sm}^{\tau'}, \quad (9a)$$

а знак «-» выбирается, если

$$P\xi_{sm}^{\tau} = (-1)^{s+1} \xi_{sm}^{\tau}, \quad P\xi_{sm}^{\tau'} = (-1)^s \xi_{sm}^{\tau'}, \quad (9b)$$

где ξ_{sm}^{τ} – базисные векторы в пространстве представления τ , описывающие состояния с определенными значениями абсолютной величины и проекции спина. Определяя операцию P -инверсии для схемы зацеплений (1) так, что

$$\dot{\tau}_2 = \tau_5, \dot{\tau}_3 = \tau_6, \quad (10)$$

в соответствии с формулами (8), (9a), (9b) получим:

$$\begin{aligned} c_{14}^{1/2} &= c_{41}^{1/2}, c_{12}^{1/2} = c_{45}^{1/2}, c_{16}^{1/2} = c_{43}^{1/2}, \\ c_{21}^{1/2} &= c_{54}^{1/2}, c_{23}^{1/2} = c_{56}^{1/2}, c_{25}^{1/2} = c_{52}^{1/2}, \\ c_{34}^{1/2} &= c_{61}^{1/2}, c_{32}^{1/2} = c_{65}^{1/2}, c_{36}^{1/2} = c_{63}^{1/2}, \\ c_{23}^{3/2} &= c_{56}^{3/2}, c_{25}^{3/2} = c_{52}^{3/2}, c_{32}^{3/2} = c_{65}^{3/2}, c_{36}^{3/2} = c_{63}^{3/2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Возможность лагранжевой формулировки теории предполагает выполнение соотношения [3]

$$c_{\tau\tau'}^s, \eta_{\tau'\tau}^s = (c_{\tau'\tau}^s)^* \eta_{\tau\tau}^s, \quad (12)$$

где $\eta_{\tau\tau}^s$ – ненулевые элементы матрицы билинейной формы η , имеющей в базисе Гельфанда – Яглома структуру, аналогичную (4). Элементы $\eta_{\tau\tau}^s$, не уменьшая общности, можно выбрать равными ± 1 , но при этом

$$\eta_{\tau\tau}^s = \eta_{\tau\tau}^s = -\eta_{\tau\tau}^{s+1}. \quad (13)$$

Применение условий (12) к рассматриваемому случаю даёт:

$$c_{54}^{1/2} = f_1 (c_{12}^{1/2})^*, c_{65}^{1/2} = f_2 (c_{23}^{1/2})^*, c_{34}^{1/2} = f_1 f_2 (c_{16}^{1/2})^*, \quad (14)$$

где использованы обозначения

$$f_1 = \frac{\eta_{25}^{1/2}}{\eta_{14}^{1/2}}, f_2 = \frac{\eta_{36}^{1/2}}{\eta_{25}^{1/2}}, f_1 f_2 = \frac{\eta_{36}^{1/2}}{\eta_{14}^{1/2}}. \quad (15)$$

Совместное применение условий (7), (11), (14) оставляет у спиновых блоков $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ шесть независимых элементов, в качестве которых можно выбрать, например, $c_{12}^{1/2}$, $c_{14}^{1/2}$, $c_{16}^{1/2}$, $c_{23}^{1/2}$, $c_{25}^{1/2}$, $c_{36}^{1/2}$. Рассмотрим вариант РВУ, когда

$$c_{14}^{1/2} = c_{16}^{1/2} = c_{25}^{1/2} = c_{36}^{1/2} = 0. \quad (16)$$

Тогда вводя (с целью удобства) для оставшихся ненулевых элементов обозначения

$$c_{12}^{1/2} = a, \quad c_{23}^{1/2} = b, \quad (17)$$

придем к следующему виду спиновых блоков $C^{1/2}$, $C^{3/2}$:

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_1 a^* & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 b^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_1 a^* & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_2 b^* & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 2b & 0 & 0 \\ 2f_2 b^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 2f_2 b^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Возможные значения массы частицы $m_k^{(s)}$ связаны соотношением

$$m_k^{(s)} = \frac{m}{\lambda_k^{(s)}} \quad (19)$$

с ненулевыми корнями $\pm \lambda_k^{(s)}$ спиновых блоков C^s , которые (корни), следовательно, должны быть вещественными. Для обеспечения вещественности корней блока $C^{3/2}$ параметр f_2 должен быть положительным, то есть

$$f_2 = 1. \quad (20)$$

Тогда двукратно вырожденный корень ± 1 у этого блока получится, если положить

$$b = \frac{1}{2}. \quad (21)$$

При выборе параметров f_2 , b согласно (20), (21) для блока $C^{3/2}$ будем иметь окончательно выражение

$$C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Спиновый блок $C^{1/2}$ при этом принимает вид

$$C^{1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2f_1 a^* & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2f_1 a^* & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Условием обращения в нуль всех корней данного блока является равенство

$$f_1 |a|^2 + \frac{1}{4} = 0, \quad (24)$$

котарому можна удзволіворыць, палагая, напрыклад:

$$f_1 = -1, \quad a = \frac{1}{2}. \quad (25)$$

В ітоге прыходзім к спіновому блоку $C^{1/2}$ віда

$$C^{1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Выбор (20), (25) параметров f_1, f_2 означае, с ўчетом абазначеній (15), заданіе матрыцы білінейнай формы η спосабом:

$$-\eta_{14}^{1/2} = \eta_{25}^{1/2} = \eta_{36}^{1/2} = -\eta_{25}^{3/2} = -\eta_{36}^{3/2} = 1. \quad (27)$$

Такім образом, РВУ пераго парадка (2) со схемой зацепленій (1), матрыцей γ_4 со спіновымі блокамі $C^{3/2}$ (22) и $C^{1/2}$ (26) пры выборе матрыцы білінейнай формы η согласно (27) описывает частицу со спином $\frac{3}{2}$ и двукратным вырождением состояний по некоторому дополнительному (помимо спина) квантовому числу.

Минимальные полиномы блоков $C^{3/2}, C^{1/2}$ и матрыцы γ_4 имеют соответственно вид

$$\left(C^{3/2}\right)^2 - 1 = 0, \quad \left(C^{1/2}\right)^3 = 0, \quad (28)$$

$$\gamma_4^3 (\gamma_4^2 - 1) = 0, \quad (29)$$

то ест, как и в случае уравнения Фирца – Паули, матрыца γ_4 неприводима к диагональному виду. В то же время минимальный полином (29) отличается от минимального полинома

$$\gamma_4^2 (\gamma_4^2 - 1) = 0$$

матрыцы γ_4 в уравнении Фирца – Паули.

Выясним физический смысл вышеуказанного двукратного вырождения состояний. Выбор (16) элементов блоков $C^{3/2}, C^{1/2}$ означае, что схема зацепленій (1) распадается в смысле собственной группы Лоренца на две схемы:

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}, 1\right) - \left(1, \frac{1}{2}\right) \quad (30)$$

и

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) - \left(1, \frac{1}{2}\right)' - \left(\frac{1}{2}, 1\right)'. \quad (31)$$

При этом в соответствии с заданием операции пространственной инверсии согласно (10) фрагменты (30), (31) являются P -сопряженными друг другу.

В структуре спиновых блоков $C^{3/2}$ (22), $C^{1/2}$ (26) данное обстоятельство отражается тем, что каждый из этих блоков представляет собой прямую сумму двух одинаковых клеток, соответствующих схемам зацеплений (30) и (31). При этом в блоке $C^{3/2}$ каждая из клеток имеет собственные значения ± 1 . Следовательно, внутреннее квантовое число, различающее кратные корни этого блока, описывает P -сопряженные состояния, относящиеся к представлениям (30), (31). Такое квантовое число называется киральностью (см., напр., [2]).

Следует заметить, что описание безмассовых частиц, обладающих киральностью, основывается только на представлениях $(0,S)$ и $(S,0)$, причем понятия киральности и спиральности (проекция спина на направление импульса частицы), по существу, совпадают. Для частиц с ненулевой массой это, очевидно, уже не так.

Спинорная формулировка

Спинорную формулировку построенного выше уравнения можно получить, если осуществить переход из базиса Гельфанда – Яглома в спинорный базис, в котором волновая функция ψ имеет вид

$$\psi = (\psi_a, \psi_{(bc)}^{\dot{a}}, \psi_a^{(bc)}, \psi^{\dot{a}}, \varphi_a^{(bc)}, \varphi_{(bc)}^{\dot{a}}) - \text{столбец.} \quad (32)$$

Здесь $\psi_a, \psi^{\dot{a}}$ – спиноры первого ранга, отвечающие представлениям $(0, \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2}, 0)$;

$\psi_{(bc)}^{\dot{a}}, \psi_a^{(bc)}, \varphi_{(bc)}^{\dot{a}}, \varphi_a^{(bc)}$ – симметричные по двум индексам спиноры третьего ранга, со-

ставляемые соответственно представлениям $(\frac{1}{2}, 1), (1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1)', (1, \frac{1}{2})'$;

$\partial_{\dot{a}b} = \partial_{\mu} (\sigma_{\mu})_{\dot{a}b}$ (σ_i – матрицы Паули, σ_4 – единичная матрица). В результате придем к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{6}} \partial_{\dot{c}}^b \psi_{(ab)}^{\dot{c}} + m \psi_a &= 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{6}} (\partial_b^{\dot{a}} \psi_c + \partial_c^{\dot{a}} \psi_b) + \frac{1}{2} (\partial_{\dot{a}b} \psi_c^{(\dot{a}\dot{a})} + \partial_{\dot{a}c} \psi_b^{(\dot{a}\dot{a})}) + m \psi_{(bc)}^{\dot{a}} &= 0, \\ \frac{1}{2} (\partial^{db} \psi_{(da)}^{\dot{c}} + \partial^{d\dot{c}} \psi_{(da)}^b) + m \psi_a^{(bc)} &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \partial_{\dot{b}}^c \varphi_c^{(\dot{a}\dot{b})} + m \psi^{\dot{a}} &= 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{6}} (\partial_a^b \psi_c^{\dot{c}} + \partial_a^{\dot{c}} \psi_b^{\dot{c}}) + \frac{1}{2} (\partial^{db} \varphi_{(da)}^{\dot{c}} + \partial^{d\dot{c}} \varphi_{(da)}^b) + m \varphi_a^{(bc)} &= 0, \\ \frac{1}{2} (\partial_{\dot{a}b} \varphi_c^{(\dot{a}\dot{a})} + \partial_{\dot{a}c} \varphi_b^{(\dot{a}\dot{a})}) + m \varphi_{(bc)}^{\dot{a}} &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

В эквивалентности этих двух формулировок можно убедиться, если записать систему (33) в матричной форме (2) с волновой функцией (32) и найти вид минимального полинома для полученной таким образом матрицы γ_4 (равно и остальных матриц

γ_i). Он оказывается совпадающим с минимальным полиномом (29), что и означает указанную эквивалентность.

Заклучение

Используемое нами понятие киральности находится в полном соответствии с исходными посылками введения такого понятия в теории дираковских частиц. Действительно, P -инвариантное уравнение для частицы со спином $3/2$ строится здесь на основе двух нераспадающихся схем зацеплений, связанных операцией пространственной инверсии. В свою очередь, каждая из них может служить в качестве исходной для получения P -неинвариантного РВУ, описывающего частицу со спином $3/2$. Как и в случае уравнения Дирака, могут быть введены проективные операторы, коммутирующие с генераторами группы Лоренца и выделяющие компоненты волновой функции, которые соответствуют вышеуказанным P -сопряженным схемам зацеплений. Возможно и задание оператора киральности, аналогичного по физическому смыслу такому же оператору в теории Дирака.

Важно отметить, что проведенное рассмотрение представляет не только теоретический интерес. Использование понятия киральности широко обсуждается в адронной физике, в которой оно появляется при пренебрежении массами легких u и d кварков. Уже существует ряд высокопрецизионных экспериментов при низких энергиях, результаты которых свидетельствуют в пользу существования новых взаимодействий, переносимых киральными частицами. Последние экспериментальные данные из Национальной ускорительной лаборатории имени Э. Ферми (США), полученные при высоких энергиях, также согласуются с представлениями о существовании киральных частиц [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плетюхов, В.А. Релятивистские волновые уравнения с кратными представлениями и внутренние степени свободы частиц : дисс. ... докт. физ.-мат. наук / В.А. Плетюхов. – Минск, 1992. – 280 л.
2. Чижов, М.В. Теория и феноменология киральных частиц со спином единица / М.В. Чижов // ЭЧАЯ. – 2011. – Т. 42, вып. 1. – С. 169–350.
3. Гельфанд, И.М. Общие релятивистски-инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И.М. Гельфанд, А.М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.
4. Fierz, M. Über die relativistische theorie Kräftefreier teilchen mit beliebigem spin / M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Vol. 12, №1. – P. 3–37.
5. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. – 1939. – Vol. A173. – P. 211–232.

V.A. Pletyukhov, V.I. Strazhev. Relativistic Wave Equation for Chiral Particle with Spin - 3/2

Nondissociating P- invariant relativistic wave equation for chiral particle with spin - 3/2 is obtained. Matrix and spinor formulations of this equation is considered.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 07.03.2013