УДК 535.51

Е. Овсиюк, О. Веко, М. Неагу, В. Балан, В. Редьков

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПАРАМЕТРОВ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА И УРАВНЕНИЯ ТРАНЗИТИВНОСТИ В ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ОПТИКЕ

Свойства группы Лоренца исследуются в контексте их применения в поляризационной оптике в рамках формализма Стокса – Мюллера. Используется факторизованное представление матриц Лоренца в виде произведения двух преобразований $L(q,q) = A(q_a)A^*(q_a)$; $a = 0,1,2,3$. Множество матриц Лоренца – Мюллера $M = L$ в явном виде выделено как часть линейной вещественной группы $GL(4,R)$. Произвольный элемент из этого множества разложен по 16-мерному базису матриц Дирака. На этой основе развит метод нахождения параметров q_a матриц L. Показано, что факторизованное представление для матриц Лоренца позволяет в явном виде получить ряд простых уравнений транзитивности, часть из которых можно интерпретировать в рамках поляризационной оптики.

1. О нахождении параметров по явному виду матриц Лоренца

Многие свойства группы Лоренца [1–4] оказываются полезными в поляризационной оптике (см. [5–10] и приведенную там литературу). Ниже рассмотрим некоторые новые применения теории этой группы в оптике. Исходим из факторизованного представления произвольной матрицы Лоренца [1, 3]

$$[\, L_b{}^a(q,\overline{q}^*)\,] = A(q)A^*(q)\,, \tag{1}$$

$$A(q) = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ -q_1 & q_0 & -iq_3 & iq_2 \\ -q_2 & iq_3 & q_0 & -iq_1 \\ -q_3 & -iq_2 & iq_1 & q_0 \end{pmatrix}, \qquad A^*(q) = \begin{pmatrix} q_0^* & -q_1^* & -q_2^* & -q_3^* \\ -q_1^* & q_0^* & iq_3^* & -iq_2^* \\ -q_2^* & -iq_3^* & q_0^* & iq_1^* \\ -q_3^* & iq_2^* & -iq_1^* & q_0^* \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Можно построить матрицы, для которых комплексные векторы q и q^* будут собственными. В самом деле выполняются следующие тождества:

$$L\, q = \overline{q}^*, \qquad L\, q^* = \overline{q}\,, \qquad \overline{q}^* = (q_0^*, -\mathbf{q}^*)\,, \qquad \overline{q} = (q_0, -\mathbf{q})\,. \tag{3}$$

С использованием специального элемента δ соотношения (3) представимы в виде

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \delta\, L\, q = q^*\,, \qquad \delta\, L\, q^* = q\,; \tag{4}$$

отсюда после элементарного преобразования получаем

$$\delta\, L\, \delta\, L\, q = \delta L\, q^* = q\,, \qquad \delta\, L\, \delta\, L\, q^* = \delta\, L\, q = q^*\,,$$

т.е.

$$Q = (\delta\, L)^2\,, \qquad Qq = q\,, \qquad Qq^* = q^*\,. \tag{5}$$

С учетом свойства псевдоортогональности для матриц Лоренца: $\delta L\delta = (L^t)^{-1}$ матрица Q может быть представлена следующим образом:

$$Q = (L^t)^{-1} L \,. \tag{6}$$

В частности, для ортогональной подгруппы 3-вращений имеем (t – операция транспонирования матрицы)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix}, \qquad (L^t) = L^{-1}, \qquad Q = L^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O^2 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

причем $OO^t = I_3$, $\det O = 1$. Явное выражение для произвольного евклидового вращения определяется 4-мерным параметром $q_0 = n_0$, $q_j = -in_j$ и имеет вид:

$$L = \begin{pmatrix} n_0 & in_1 & in_2 & in_3 \\ in_1 & n_0 & -n_3 & n_2 \\ in_2 & n_3 & n_0 & -n_1 \\ in_3 & -n_2 & n_1 & n_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0 & -in_1 & -in_2 & -in_3 \\ -in_1 & n_0 & -n_3 & n_2 \\ -in_2 & n_3 & n_0 & -n_1 \\ -in_3 & -n_2 & n_1 & n_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix},$$

$$O = \begin{pmatrix} 1-2(n_2^2+n_3^2) & -2n_0n_3+2n_1n_2 & +2n_0n_2+2n_1n_3 \\ +2n_0n_3+2n_1n_2 & 1-2(n_3^2+n_1^2) & -2n_0n_1+2n_2n_3 \\ -2n_0n_2+2n_1n_3 & +2n_0n_1+2n_2n_3 & 1-2(n_1^2+n_2^2) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Такие (4×4)-матрицы L действуют на 4-вектор n_a согласно правилу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0 \\ -i\mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_0 \\ -i\mathbf{n} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Рассмотрим произвольные псевдоевклидовые вращения – они задаются следующими 4-мерными параметрами: $q_0 = m_0$, $q_j = m_j$, $m_0^2 - \mathbf{m}^2 = +1$. С использованием обозначения $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ имеем:

$$m_0 = \cosh(\chi/2), \qquad m_j = \sinh(\chi/2)\, e_j, \qquad \mathbf{e}^2 = 1; \tag{10}$$

$$L = \begin{pmatrix} \cosh\chi & -\sinh\chi e_1 & -\sinh\chi e_2 & -\sinh\chi e_3 \\ -\sinh\chi e_1 & 1+(\cosh\chi-1)e_1^2 & (\cosh x-1)e_1e_2 & (\cosh x-1)e_1e_3 \\ -\sinh\chi e_2 & (\cosh x-1)e_1e_2 & 1+(\cosh\chi-1)e_2^2 & (\cosh x-1)e_2e_3 \\ -\sinh\chi e_3 & (\cosh x-1)e_3e_1 & (\cosh x-1)e_2e_3 & 1+(\cosh\chi-1)e_3^2 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Прямым вычислением легко получаем

$$Q = (\delta L)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Это тождество можно доказать иначе. Поскольку чисто лоренцевское преобразование задается симметричной матрицей, то соотношение (6) можно записать так:

$$Q = (L^t)^{-1} L = L^{-1} L = I. \tag{13}$$

Ниже нам потребуется представление для произвольного преобразования из группы Лоренца в блочной форме:

$$L = \begin{pmatrix} K & N \\ L & M \end{pmatrix};$$

(K)

$$L_{00} = (q_0\, q_0^* + q_1\, q_1^*) + (q_2\, q_2^* + q_3\, q_3^*), \qquad L_{01} = -(q_0\, q_1^* + q_1\, q_0^*) + i\,(q_2\, q_3^* - q_3\, q_2^*),$$
$$L_{10} = -(q_0\, q_1^* + q_1\, q_0^*) - i\,(q_2\, q_3^* - q_3\, q_2^*), \qquad L_{11} = (q_0\, q_0^* + q_1\, q_1^*) - (q_2\, q_2^* + q_3\, q_3^*);$$

(M)

$$L_{22} = (q_0\, q_0^* - q_1\, q_1^*) + (q_2\, q_2^* - q_3\, q_3^*), \qquad L_{23} = i\,(q_0\, q_1^* - q_1\, q_0^*) + (q_2\, q_3^* + q_3\, q_2^*),$$
$$L_{32} = -i\,(q_0\, q_1^* - q_1\, q_0^*) + (q_2\, q_3^* + q_3\, q_2^*), \qquad L_{33} = (q_0\, q_0^* - q_1\, q_1^*) - (q_2\, q_2^* - q_3\, q_3^*);$$

(N)

$$L_{02} = -(q_0\, q_2^* + q_2\, q_0^*) - i\,(q_1\, q_3^* - q_3\, q_1^*), \qquad L_{03} = -(q_0\, q_3^* + q_3\, q_0^*) + i\,(q_1\, q_2^* - q_2\, q_1^*),$$
$$L_{12} = i\,(q_0\, q_3^* - q_3\, q_0^*) + (q_1\, q_2^* + q_2\, q_1^*), \qquad L_{13} = -i\,(q_0\, q_2^* - q_2\, q_0^*) + (q_1\, q_3^* + q_3\, q_1^*);$$

(L)

$$L_{20} = -(q_0\, q_2^* + q_2\, q_0^*) + i\,(q_1\, q_3^* - q_3\, q_1^*), \qquad L_{21} = -i\,(q_0\, q_3^* - q_3\, q_0^*) + (q_1\, q_2^* + q_2\, q_1^*),$$
$$L_{30} = -(q_0\, q_3^* + q_3\, q_0^*) - i\,(q_1\, q_2^* - q_2\, q_1^*), \qquad L_{31} = i\,(q_0\, q_2^* - q_2\, q_0^*) + (q_1\, q_3^* + q_3\, q_1^*).$$

Определенная структура может быть замечена для матриц L, если их разложить в сумму симметричной S и антисимметричной A частей:

$$S_{00} = L_{00} = q_0\, q_0^* + q_1\, q_1^* + q_2\, q_2^* + q_3\, q_3^*\,, \qquad S_{11} = L_{11} = q_0\, q_0^* + q_1\, q_1^* - q_2\, q_2^* - q_3\, q_3^*\,,$$
$$S_{22} = q_0\, q_0^* + q_2\, q_2^* - q_1\, q_1^* - q_3\, q_3^*\,, \qquad S_{33} = q_0\, q_0^* + q_3\, q_3^* - q_1\, q_1^* - q_2\, q_2^*\,,$$
$$S_{01} = -(q_0 q_1^* + q_0^* q_1)\,,\; S_{02} = -(q_0 q_2^* + q_0^* q_2)\,,\; S_{03} = -(q_0 q_3^* + q_0^* q_3)\,,$$
$$S_{12} = q_1 q_2^* + q_1^* q_2\,, \qquad S_{13} = q_1 q_3^* + q_1^* q_3\,, \qquad S_{23} = q_2 q_3^* + q_2^* q_3\,,$$
$$A_{01} = i(q_2 q_3^* - q_2^* q_3)\,,\; A_{02} = i(q_3 q_1^* - q_3^* q_1)\,,\; A_{03} = i(q_1 q_2^* - q_1^* q_2)\,,$$
$$A_{12} = -i(q_3 q_0^* - q_3^* q_0)\,,\; A_{13} = +i(q_2 q_0^* - q_2^* q_0)\,,\; A_{23} = -i(q_1 q_0^* - q_1^* q_0)\,.$$

Легко получаем

$$Q_0^2 = q_0 q_0^* = \frac{1}{4}\mathrm{Sp}\, L = \frac{S_{00} + S_{11} + S_{22} + S_{33}}{4}\,,$$
$$Q_1^2 = q_1 q_1^* = \frac{S_{00} + S_{11}}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{Sp}\, L = \frac{S_{00} + S_{11} - S_{22} - S_{33}}{4}\,,$$
$$Q_2^2 = q_2 q_2^* = \frac{S_{00} + S_{22}}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{Sp}\, L = \frac{S_{00} + S_{22} - S_{11} - S_{33}}{4}\,,$$

$$Q_3^2 = q_3 q_3^* = \frac{S_{00}+S_{33}}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{Sp}\, L = \frac{S_{00}+S_{33}-S_{11}-S_{22}}{4}, \tag{14}$$

далее, используя тождества

$$\begin{aligned} S_{01}+iA_{23} &= -2q_0 q_1^*, \qquad & S_{23}+iA_{01} &= 2q_2^* q_3, \\ S_{02}+iA_{31} &= -2q_0 q_2^*, \qquad & S_{31}+iA_{02} &= 2q_3^* q_1, \\ S_{03}+iA_{12} &= -2q_0 q_3^*, \qquad & S_{12}+iA_{03} &= 2q_1^* q_2 \end{aligned} \tag{15}$$

и вводя полярное разложение для комплексных величин (обозначаем $Q_k = \mathrm{abs}(q_k)$, $\alpha_k = arg(q_k)$), имеем

$$\begin{aligned} S_{01}+iA_{23} &= -2Q_0 Q_1 e^{i(\alpha_0-\alpha_1)}, \qquad & S_{23}+iA_{01} &= 2Q_2 Q_3 e^{i(-\alpha_2+\alpha_3)}, \\ S_{02}+iA_{31} &= -2Q_0 Q_2 e^{i(\alpha_0-\alpha_2)}, \qquad & S_{31}+iA_{02} &= 2Q_3 Q_1 e^{i(-\alpha_3+\alpha_1)}, \\ S_{03}+iA_{12} &= -2Q_0 Q_3 e^{i(\alpha_0-\alpha_3)}, \qquad & S_{12}+iA_{03} &= 2Q_1 Q_2 e^{i(-\alpha_1+\alpha_2)}. \end{aligned} \tag{16}$$

В свою очередь, отсюда находим

$$\begin{aligned} e^{i\alpha_1} &= -\frac{2Q_0Q_1}{S_{01}+iA_{23}} e^{i\alpha_0} \quad &\Rightarrow\quad q_1 &= -\frac{2Q_1^2}{S_{01}+iA_{23}} q_0, \\ e^{i\alpha_2} &= -\frac{2Q_0Q_2}{S_{02}+iA_{31}} e^{i\alpha_0} \quad &\Rightarrow\quad q_2 &= -\frac{2Q_2^2}{S_{02}+iA_{31}} q_0, \\ e^{i\alpha_3} &= -\frac{2Q_0Q_3}{S_{03}+iA_{12}} e^{i\alpha_0} \quad &\Rightarrow\quad q_3 &= -\frac{2Q_3^2}{S_{03}+iA_{12}} q_0. \end{aligned} \tag{17}$$

Воспользовавшись условием связи на параметры

$$q_0^2 \left[1 - \frac{4Q_1^4}{(S_{01}+iA_{23})^2} - \frac{4Q_2^4}{(S_{02}+iA_{31})^2} - \frac{4Q_3^4}{(S_{03}+iA_{12})^2}\right] = +1, \tag{18}$$

находим q_0:

$$q_0 = \pm\left[1 - \frac{4Q_1^4}{(S_{01}+iA_{23})^2} - \frac{4Q_2^4}{(S_{02}+iA_{31})^2} - \frac{4Q_3^4}{(S_{03}+iA_{12})^2}\right]^{-1/2}, \tag{19}$$

после чего получаем выражения для q_j через q_0, S_{0j}, A_{ij} и Q_j ($j=\overline{1,3}$):

$$q_1 = -\frac{2Q_1^2}{S_{01}+iA_{23}} q_0, \qquad q_2 = -\frac{2Q_2^2}{S_{02}+iA_{31}} q_0, \qquad q_3 = -\frac{2Q_3^2}{S_{03}+iA_{12}} q_0. \tag{20}$$

2. О выделении матриц Лоренца – Мюллера из линейной группы $GL(4,R)$

Матрицы Мюллера лоренцевского типа $M = L$ образуют вещественную подгруппу в линейной группе $GL(4,R)$

$$G = \begin{pmatrix} k_0 + \mathbf{k}\,\vec{\sigma} & n_0 + \mathbf{n}\,\vec{\sigma} \\ l_0 + \mathbf{l}\,\vec{\sigma} & m_0 + \mathbf{m}\,\vec{\sigma} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где $k_0 \equiv k_0 I_2$ и $\sigma_0 = I_2$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ и $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Каждой матрице G вида (21) соответствует естественный инвариант – ее определитель (его явный вид в такой параметризации был получен в [4]):

$$\det G = (kk)\,(mm) + (nn)\,(ll) - 2\,(kn)\,(ml) -$$
$$-2\,(-k_0\,\mathbf{n} + n_0\,\mathbf{k} + i\,\mathbf{k}\times\mathbf{n})\,(-m_0\,\mathbf{l} + l_0\,\mathbf{m} + i\,\mathbf{m}\times\mathbf{l}), \qquad (22)$$

где $(kk) = k_0^2 - \mathbf{k}^2$ и т.д. В [7], [9], [10] была развита классификация для вырожденных матриц с нулевым определителем (только часть таких матриц может быть матрицами Мюллера). Этот вырожденный класс матриц ниже рассматриваться не будет.

Рассматривая матрицы Мюллера – Лоренца как составленные из четырех блоков

$$L(q,q^*) = \begin{pmatrix} k_0 + k_3 & k_1 - ik_2 & n_0 + n_3 & n_1 - in_2 \\ k_1 + ik_2 & k_0 - k_3 & n_1 + in_2 & n_0 - n_3 \\ l_0 + l_3 & l_1 - il_2 & m_0 + m_3 & m_1 - im_2 \\ l_1 + il_2 & l_0 - l_3 & m_1 + im_2 & m_0 - m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & N \\ L & M \end{pmatrix}, \qquad (23)$$

можно найти коэффициенты k, m, n, l, соответствующие матрице $L(q,q^*)$. При этом удобно выполнить простую замену

$$k_2 \Rightarrow ik_2, \qquad m_2 \Rightarrow im_2, \qquad n_2 \Rightarrow in_2, \qquad l_2 \Rightarrow il_2 .$$

В результате находим явный вид 16 вещественных коэффициентов:

$$k_0 = q_0\,q_0^* + q_1\,q_1^*, \qquad k_1 = -(q_0\,q_1^* + q_1\,q_0^*),$$
$$k_2 = i\,(q_2\,q_3^* - q_3\,q_2^*), \qquad k_3 = q_2\,q_2^* + q_3\,q_3^*,$$
$$m_0 = q_0\,q_0^* - q_1\,q_1^*, \qquad m_1 = q_2\,q_3^* + q_3\,q_2^*,$$
$$m_2 = i\,(q_0\,q_1^* - q_1\,q_0^*), \qquad m_3 = -q_2\,q_2^* - q_3\,q_3^*,$$
$$\begin{aligned}
2\,l_0 &= -(q_0\,q_2^* + q_2\,q_0^*) + i\,(q_0\,q_2^* - q_2\,q_0^*) + i\,(q_1\,q_3^* - q_3\,q_1^*) + (q_1\,q_3^* + q_3\,q_1^*),\\
2\,l_3 &= -(q_0\,q_2^* + q_2\,q_0^*) - i\,(q_0\,q_2^* - q_2\,q_0^*) + i\,(q_1\,q_3^* - q_3\,q_1^*) - (q_1\,q_3^* + q_3\,q_1^*),\\
2\,l_1 &= -i\,(q_0\,q_3^* - q_3\,q_0^*) - (q_0\,q_3^* + q_3\,q_0^*) + (q_1\,q_2^* + q_2\,q_1^*) - i\,(q_1\,q_2^* - q_2\,q_1^*),\\
2\,l_2 &= -i\,(q_0\,q_3^* - q_3\,q_0^*) + (q_0\,q_3^* + q_3\,q_0^*) + (q_1\,q_2^* + q_2\,q_1^*) + i\,(q_1\,q_2^* - q_2\,q_1^*),\\
2n_0 &= -(q_0\,q_2^* + q_2\,q_0^*) - i\,(q_0\,q_2^* - q_2\,q_0^*) - i\,(q_1\,q_3^* - q_3\,q_1^*) + (q_1\,q_3^* + q_3\,q_1^*),\\
2n_3 &= -(q_0\,q_2^* + q_2\,q_0^*) + i\,(q_0\,q_2^* - q_2\,q_0^*) - i\,(q_1\,q_3^* - q_3\,q_1^*) - (q_1\,q_3^* + q_3\,q_1^*),\\
2n_1 &= -(q_0\,q_3^* + q_3\,q_0^*) + i\,(q_0\,q_3^* - q_3\,q_0^*) + i\,(q_1\,q_2^* - q_2\,q_1^*) + (q_1\,q_2^* + q_2\,q_1^*),\\
2n_2 &= -(q_0\,q_3^* + q_3\,q_0^*) - i\,(q_0\,q_3^* - q_3\,q_0^*) + i\,(q_1\,q_2^* - q_2\,q_1^*) - (q_1\,q_2^* + q_2\,q_1^*).
\end{aligned} \qquad (24)$$

3. О разложении матриц Лоренца в дираковском базисе

Разложим произвольную матрицу из группы Лоренца по 16-мерному базису матриц Дирака

$$L(q,q^*) = Z + \gamma^5\,\tilde{Z} + \gamma^l\,Z_l + \gamma^l\gamma^5\,\tilde{Z}_l + \sigma^{mn}\,Z_{mn}\,, \qquad (25)$$

где 16 коэффициентов задаются формулами (символ Sp обозначает след матрицы):

$$Z = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\; L(q,q^*)\,, \qquad \tilde{Z} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\;\gamma^5 L(q,q^*)\,,$$
$$Z_k = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\;\gamma_k L(q,q^*)\,, \qquad \tilde{Z}_k = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\;\gamma^5\gamma_k L(q,q^*)\,, \qquad Z_{kl} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\;\sigma_{kl} L(q,q^*)\,. \tag{26}$$

После простых вычислений приходим к формулам:

$$Z = q_0\, q_0^*\,, \qquad \tilde{Z} = q_1\, q_1^*\,, \qquad Z_{03} = q_3\, q_3^*\,, \qquad -iZ_{12} = q_2\, q_2^*\,,$$
$$Z_0 \;\underset{1}{=} -\frac{1}{2}[(q_0\, q_1^* + q_1\, q_0^*) + (q_2\, q_3^* + q_3\, q_2^*)], \qquad Z_2 \;\underset{3}{=} \frac{i}{2}[-(q_0\, q_1^* + q_1\, q_0^*) + (q_2\, q_3^* + q_3\, q_2^*)]\,,$$
$$Z_0 \;\underset{2}{=} \frac{1}{2}[(q_0\, q_1^* - q_1\, q_0^*) - (q_2\, q_3^* - q_3\, q_2^*)], \qquad Z_3 \;\underset{1}{=} \frac{i}{2}[-(q_0\, q_1^* - q_1\, q_0^*) - (q_2\, q_3^* - q_3\, q_2^*)]\,,$$
$$Z_0 = \frac{1}{2}[-(q_0\, q_2^* + q_2\, q_0^*) + (q_1\, q_3^* + q_3\, q_1^*)], \qquad \tilde{Z}_0 = \frac{i}{2}[+(q_0\, q_2^* - q_2\, q_0^*) + (q_1\, q_3^* - q_3\, q_1^*)],$$
$$Z_3 = -\frac{i}{2}[(q_0\, q_2^* - q_2\, q_0^*) - (q_1\, q_3^* - q_3\, q_1^*)], \qquad \tilde{Z}_3 = -\frac{1}{2}[(q_0\, q_2^* + q_2\, q_0^*) + (q_1\, q_3^* + q_3\, q_1^*)],$$
$$Z_1 = -\frac{i}{2}(q_0\, q_3^* - q_3\, q_0^* + q_1\, q_2^* - q_2\, q_1^*), \qquad \tilde{Z}_1 = -\frac{1}{2}[(q_0\, q_3^* + q_3\, q_0^*) - (q_1\, q_2^* + q_2\, q_1^*)],$$
$$Z_2 = -\frac{i}{2}(-q_0\, q_3^* - q_3\, q_0^* - q_1\, q_2^* - q_2\, q_1^*), \qquad \tilde{Z}_2 = -\frac{1}{2}[-(q_0\, q_3^* - q_3\, q_0^*) + (q_1\, q_2^* - q_2\, q_1^*)]. \tag{27}$$

На основе формул (27) можно развить еще один способ нахождения параметров q_a через найденные коэффициенты (25). Так, исходя из (27), замечаем

$$Z = q_0\, q_0^*\,, \qquad \tilde{Z} = q_1\, q_1^*\,, \qquad Z_{03} = q_3\, q_3^*\,, \qquad -iZ_{12} = q_2\, q_2^*\,; \tag{28}$$

затем

$$Z_{01} + iZ_{23} = -q_2 q_3^* - q_2^* q_3\,, \qquad Z_{01} - iZ_{23} = -q_0 q_1^* - q_0^* q_1\,,$$
$$Z_{02} + iZ_{31} = q_0 q_1^* - q_0^* q_1\,, \qquad Z_{02} - iZ_{31} = -q_2 q_3^* + q_2^* q_3\,,$$

т.е.

$$(Z_{01} - iZ_{23}) + (Z_{02} + iZ_{31}) = -2\; q_0^* q_1\,,$$
$$(Z_{01} - iZ_{23}) - (Z_{02} + iZ_{31}) = -2\; q_0 q_1^*\,,$$
$$(Z_{01} + iZ_{23}) + (Z_{02} - iZ_{31}) = -2\; q_2 q_3^*\,,$$
$$Z_{01} + iZ_{23}) - (Z_{02} - iZ_{31}) = -2\; q_2^* q_3\,; \tag{29}$$

затем

$$Z_0 - \tilde{Z}_3 = (q_1 q_3^* + q_1^* q_3)\,, \qquad Z_0 + \tilde{Z}_3 = -(q_0 q_2^* + q_0^* q_2)\,,$$
$$\tilde{Z}_0 - Z_3 = i(q_0 q_2^* - q_0^* q_2)\,, \qquad \tilde{Z}_0 + Z_3 = i(q_1 q_3^* - q_1^* q_3)\,,$$

т.е.

$$(Z_0 - \tilde{Z}_3) + i(\tilde{Z}_0 + Z_3) = 2\; q_1^* q_3\,,$$
$$(Z_0 - \tilde{Z}_3) - i(\tilde{Z}_0 + Z_3) = 2\; q_1 q_3^*\,,$$
$$(Z_0 + \tilde{Z}_3) + i(\tilde{Z}_0 - Z_3) = -2\; q_0 q_2^*\,,$$

$$(Z_0+\tilde{Z}_3)-i(\tilde{Z}_0-Z_3)=-2\,q_0^* q_2\,; \qquad (30)$$

и затем

$$Z_1+i\tilde{Z}_2=-i(q_1q_2^*-q_1^*q_2)\,,\qquad Z_1-i\tilde{Z}_2=-i(q_0q_3^*-q_0^*q_3)\,,$$
$$\tilde{Z}_1+iZ_2==q_0q_3^*-q_0^*q_3\,,\qquad \tilde{Z}_1-iZ_2=q_1q_2^*+q_1^*q_2\,,$$

т.е.

$$(Z_1+i\tilde{Z}_2)+i(\tilde{Z}_1-iZ_2)=+2i\,q_1^*q_2\,,$$
$$(Z_1+i\tilde{Z}_2)-i(\tilde{Z}_1-iZ_2)=-2i\,q_1q_2^*\,,$$
$$(Z_1-i\tilde{Z}_2)+i(\tilde{Z}_1+iZ_2)=-2i\,q_0q_3^*\,,$$
$$(Z_1-i\tilde{Z}_2)-i(\tilde{Z}_1+iZ_2)=+2i\,q_0^*q_3\,. \qquad (31)$$

Полученные соотношения позволяют найти параметры лоренцевских матриц. Учтем равенства

$$Z=q_0\,q_0^* \qquad q_0=\sqrt{Z}e^{i\alpha}\,,$$
$$q_1=-\frac{1}{2\,q_0^*}[(Z_{01}-iZ_{23})+(Z_{02}+iZ_{31})]=\frac{1}{q_0^*}M_1\,,$$
$$q_2=-\frac{1}{2\,q_0^*}[(Z_0+\tilde{Z}_3)-i(\tilde{Z}_0-Z_3)]=\frac{1}{q_0^*}M_2\,,$$
$$q_3=-i\frac{1}{2\,q_0^*}[(Z_1-i\tilde{Z}_2)-i(\tilde{Z}_1+iZ_2)]=\frac{1}{q_0^*}M_3\,. \qquad (32)$$

С использованием квадратичного дополнительного условия $q_0^2-\mathbf{q}^2=1$, получаем

$$e^{i\alpha}=\pm\sqrt{\frac{Z}{Z^2-\mathbf{M}^2}},\qquad q_0=\sqrt{Z}e^{i\alpha}\,,\qquad q_j=\frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{Z}}M_j\,. \qquad (33)$$

Разложение произвольной матрицы Лоренца по дираковскому базису может быть записано в спинорном представлении как

$$L=\begin{pmatrix} Z+\tilde{Z}+\Sigma^{mn}Z_{mn} & \bar{\sigma}^n(Z_n-\tilde{Z}_n) \\ \sigma^n(Z_n+\tilde{Z}_n) & Z-\tilde{Z}+\bar{\Sigma}^{mn}Z_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (34)$$

где

$$\sigma^a=(I,+\sigma^j)\,,\qquad \sigma_a=(I,-\sigma^j)\,,\qquad \gamma^a=\begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^a \\ \sigma^a & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} +I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}=\gamma^5,\qquad \sigma^{ab}=\frac{1}{4}(\gamma^a\gamma^b-\gamma^b\gamma^a)=\begin{pmatrix} \Sigma^{ab} & 0 \\ 0 & \bar{\Sigma}^{ab} \end{pmatrix},$$
$$\Sigma^{01}=\frac{1}{4}(\bar{\sigma}^0\sigma^1-\bar{\sigma}^1\sigma^0)=\frac{1}{2}\sigma^1\,,\qquad \Sigma^{02}=\frac{1}{2}\sigma^2\,,\qquad \Sigma^{03}=\frac{1}{2}\sigma^3\,,$$
$$\Sigma^{12}=\frac{1}{4}(\bar{\sigma}^1\sigma^2-\bar{\sigma}^2\sigma^1)=-\frac{i}{2}\sigma^3\,,\qquad \Sigma^{23}=-\frac{i}{2}\sigma^1\,,\qquad \Sigma^{31}=-\frac{i}{2}\sigma^2\,,$$

$$\bar{\Sigma}^{01} = \frac{1}{4}(\sigma^0 \bar{\sigma}^1 - \sigma^1 \bar{\sigma}^0) = -\frac{1}{2}\sigma^1 , \qquad \bar{\Sigma}^{02} = -\frac{1}{2}\sigma^2 , \qquad \bar{\Sigma}^{03} = -\frac{1}{2}\sigma^3 ,$$

$$\bar{\Sigma}^{12} = \frac{1}{4}(\sigma^1 \bar{\sigma}^2 - \sigma^2 \bar{\sigma}^1) = -\frac{i}{2}\sigma^3 , \qquad \bar{\Sigma}^{23} = -\frac{i}{2}\sigma^1 , \qquad \bar{\Sigma}^{31} = -\frac{i}{2}\sigma^2 . \tag{35}$$

Соотношение (34) можно представить в виде

$$L = \begin{pmatrix} Z + \tilde{Z} + \sigma^1 Z_1^- + \sigma^2 Z_2^- + \sigma^3 Z_3^- & Z_0 - \tilde{Z}_0 - \sigma^j (Z_j - \tilde{Z}_j) \\ Z_0 + \tilde{Z}_0 + \sigma^j (Z_j + \tilde{Z}_j) & Z - \tilde{Z} - \sigma^1 Z_1^+ - \sigma^2 Z_2^+ - \sigma^3 Z_3^+ \end{pmatrix}, \tag{36}$$

$$Z_1^- = +Z_{01} - iZ_{23}, \qquad Z_2^- = +Z_{02} - iZ_{31}, \qquad Z_3^- = +Z_{03} - iZ_{12} ,$$

$$Z_1^+ = Z_{01} + iZ_{23}, \qquad Z_2^+ = Z_{02} + iZ_{31}, \qquad Z_3^+ = Z_{03} + iZ_{12} . \tag{37}$$

Матрица (36) может рассматриваться как составленная из четырех блоков

$$L = \begin{pmatrix} k_0 + k_j \sigma^j & n_0 + n_j \sigma^j \\ l_0 + l_j \sigma^j & m_0 + m_j \sigma^j \end{pmatrix}; \tag{38}$$

отсюда получаем

$$k_0 = Z + \tilde{Z} , \qquad m_0 = Z - \tilde{Z} , \qquad k_j = +Z_j^- , \qquad m_j = -Z_j^+ ,$$

$$n_0 = Z_0 - \tilde{Z}_0 , \qquad l_0 = Z_0 + \tilde{Z}_0 , \qquad n_j = -Z_j + \tilde{Z}_j , \qquad l_j = Z_j + \tilde{Z}_j ; \tag{39}$$

можно легко убедиться, что они совпадают с (24).

4. О параметрах матриц Мюллера – Лоренца и уравнениях транзитивности

Будем исходить из факторизованной формы лоренцевских преобразований

$$AA^* = L \qquad \Rightarrow \qquad A = L(A^*)^{-1} ,$$

$$A^* A = L \qquad \Rightarrow \qquad A^* = LA^{-1} , \tag{40}$$

отсюда получаем

$$L\,[(A^*)^{-1} + A^{-1}] = A + A^* , \qquad L\,[(A^*)^{-1} - A^{-1}] = A - A^* , \tag{41}$$

$$A = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ -q_1 & q_0 & -iq_3 & iq_2 \\ -q_2 & iq_3 & q_0 & -iq_1 \\ -q_3 & -iq_2 & iq_1 & q_0 \end{pmatrix}, \qquad A^* = \begin{pmatrix} q_0^* & -q_1^* & -q_2^* & -q_3^* \\ -q_1^* & q_0^* & iq_3^* & -iq_2^* \\ -q_2^* & -iq_3^* & q_0^* & iq_1^* \\ -q_3^* & iq_2^* & -iq_1^* & q_0^* \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & iq_3 & -iq_2 \\ q_2 & -iq_3 & q_0 & iq_1 \\ q_3 & iq_2 & -iq_1 & q_0 \end{pmatrix}, \qquad (A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} q_0^* & q_1^* & q_2^* & q_3^* \\ q_1^* & q_0^* & -iq_3^* & iq_2^* \\ q_2^* & iq_3^* & q_0^* & -iq_1^* \\ q_3^* & -iq_2^* & iq_1^* & q_0^* \end{pmatrix}.$$

В случае евклидовых вращений $q_0 = n_0$, $q_j = -in_j$ соотношения (41) дают

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ 0 & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ 0 & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_0 & n_3 & -n_2 \\ 0 & -n_3 & n_0 & n_1 \\ 0 & n_2 & -n_1 & n_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_0 & -n_3 & n_2 \\ 0 & n_3 & n_0 & -n_1 \\ 0 & -n_2 & n_1 & n_0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ 0 & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ 0 & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & in_1 & in_2 & in_3 \\ in_1 & 0 & 0 & 0 \\ in_2 & 0 & 0 & 0 \\ in_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & in_1 & in_2 & in_3 \\ in_1 & 0 & 0 & 0 \\ in_2 & 0 & 0 & 0 \\ in_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Фактически здесь есть только следующие четыре уравнения транзитивности:

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0 \\ -n_3 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_0 \\ n_3 \\ -n_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_3 \\ n_0 \\ -n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_3 \\ n_0 \\ n_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \\ n_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_2 \\ -n_1 \\ n_0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \qquad (42)$$

где

$$O = \begin{pmatrix} 1-2(n_2^2+n_3^2) & -2n_0n_3+2n_1n_2 & +2n_0n_2+2n_1n_3 \\ +2n_0n_3+2n_1n_2 & 1-2(n_3^2+n_1^2) & -2n_0n_1+2n_2n_3 \\ -2n_0n_2+2n_1n_3 & +2n_0n_1+2n_2n_3 & 1-2(n_1^2+n_2^2) \end{pmatrix}, \quad n_0^2+n_1^2+n_2^2+n_3^2=1. \qquad (43)$$

В контексте поляризационной оптики наиболее интересным является последнее уравнение из (42)

$$O \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}. \qquad (44)$$

Однако и остальные три соотношения могут быть полезными для поляризационной оптики: они дают простые уравнения транзитивности, определяющие действие оптического элемента с фиксированной матрицей Мюллера на три типа пучков света. Аналогично можно рассмотреть случай псевдоевклидовых вращений $q_0 = m_0$, $q_j = m_j$, при этом (41) дает

$$\begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{10} & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{20} & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{30} & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & m_3 \\ m_1 & m_0 & 0 & 0 \\ m_2 & 0 & m_0 & 0 \\ m_3 & 0 & 0 & m_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 & -m_1 & -m_2 & -m_3 \\ -m_1 & m_0 & 0 & 0 \\ -m_2 & 0 & m_0 & 0 \\ -m_3 & 0 & 0 & m_0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{10} & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{20} & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{30} & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -im_3 & im_2 \\ 0 & im_3 & 0 & -im_1 \\ 0 & -im_2 & im_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -im_3 & im_2 \\ 0 & im_3 & 0 & -im_1 \\ 0 & -im_2 & im_1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (45)$$

Используя соотношения $m_0 = \cosh \chi$, $m_j = \sinh \chi e_j$, $\mathbf{e}^2 = 1$, $m_0^2 - \mathbf{m}^2 = 1$, получаем представление для этого типа матриц Лоренца

$$L = \begin{vmatrix} m_0^2 + \mathbf{m}^2 & -2m_0 m_1 & -2m_0 m_2 & -2m_0 m_3 \\ -2m_0 m_1 & 1+2m_1^2 & 2m_1 m_2 & 2m_1 m_3 \\ -2m_0 m_2 & 2m_1 m_2 & 1+2m_2^2 & 2m_2 m_3 \\ -2m_0 m_3 & 2m_3 m_1 & 2m_2 m_3 & 1+2m_3^2 \end{vmatrix}. \qquad (46)$$

С помощью последнего легко проверяется, что действительно выполняются равенства

$$L \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & m_3 \\ m_1 & m_0 & 0 & 0 \\ m_2 & 0 & m_0 & 0 \\ m_3 & 0 & 0 & m_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_0 & -m_1 & -m_2 & -m_3 \\ -m_1 & m_0 & 0 & 0 \\ -m_2 & 0 & m_0 & 0 \\ -m_3 & 0 & 0 & m_0 \end{vmatrix},$$

$$L \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -im_3 & im_2 \\ 0 & im_3 & 0 & -im_1 \\ 0 & -im_2 & im_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -im_3 & im_2 \\ 0 & im_3 & 0 & -im_1 \\ 0 & -im_2 & im_1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (47)$$

Среди уравнений (47) имеем 7 нетривиальных соотношений транзитивности, причем только один вектор (первый) является времениподобным и поэтому пригодным для описания поляризованного света:

$$m_0^2 - m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 = 1, \qquad L \begin{vmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_0 \\ -m_1 \\ -m_2 \\ -m_3 \end{vmatrix}. \qquad (48)$$

Все остальные являются пространственноподобными и не допускают интерпретации в рамках поляризационной оптики. Например, $m_1^2 - m_0^2 = -(1 + m_2^2 + m_3^2) < 0$.

Теперь обратимся к анализу общего случая матриц Мюллера лоренцевского типа

$$L\,[(A^*)^{-1} + A^{-1}] = A + A^*, \qquad L\,[(A^*)^{-1} - A^{-1}] = A - A^*. \qquad (49)$$

Выражая параметры (q_0, q_1, q_2, q_3) через вещественные и мнимые части

$$q_0 = x_0 + iy_0, \qquad q_j = x_j + iy_j, \qquad q_0^* = x_0 - iy_0, \qquad q_j^* = x_j - iy_j,$$

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1, \qquad x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0, \qquad (50)$$

уравнения (49) можно привести к виду

$$L\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_0 & -y_3 & y_2 \\ x_2 & y_3 & x_0 & -y_1 \\ x_3 & -y_2 & y_1 & x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ -x_1 & x_0 & y_3 & -y_2 \\ -x_2 & -y_3 & x_0 & y_1 \\ -x_3 & y_2 & -y_1 & x_0 \end{pmatrix},$$

$$L\begin{pmatrix} -y_0 & -y_1 & -y_2 & -y_3 \\ -y_1 & -y_0 & -x_3 & x_2 \\ -y_2 & x_3 & -y_0 & -x_1 \\ -y_3 & -x_2 & x_1 & -y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 & -y_1 & -y_2 & -y_3 \\ -y_1 & y_0 & -x_3 & x_2 \\ -y_2 & x_3 & y_0 & -x_1 \\ -y_3 & -x_2 & x_1 & y_0 \end{pmatrix}. \qquad (51)$$

В явном виде имеющиеся здесь уравнения транзитивности таковы:

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad L\psi_0 = \psi'_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}, \quad \psi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \\ y_3 \\ -y_2 \end{pmatrix}, \quad L\psi_1 = \psi'_1 = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_0 \\ -y_3 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -y_3 \\ x_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad L\Psi_2 = \Psi'_2 = \begin{pmatrix} -x_2 \\ y_3 \\ x_0 \\ -y_1 \end{pmatrix}, \quad \Psi_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_2 \\ -y_1 \\ x_0 \end{pmatrix}, \quad L\Psi_3 = \Psi'_3 = \begin{pmatrix} -x_3 \\ -y_2 \\ y_1 \\ x_0 \end{pmatrix},$$

$$L\Phi_0 = \Phi'_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ -y_1 \\ -y_2 \\ -y_3 \end{pmatrix}, \quad \Phi_1 = \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \quad L\Phi_1 = \Phi'_1 = \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} -y_2 \\ -x_3 \\ -y_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad L\Phi_2 = \Phi'_2 = \begin{pmatrix} -y_2 \\ -x_3 \\ y_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} -y_3 \\ x_2 \\ -x_1 \\ -y_0 \end{pmatrix}, \quad L\Phi_3 = \Phi'_3 = \begin{pmatrix} -y_3 \\ x_2 \\ -x_1 \\ y_0 \end{pmatrix}. \qquad (52)$$

Можно заметить, что четыре случая из перечисленных описывают преобразования над 4-векторами, которые меняют знак нулевой компоненты. Такие случаи не могут применяться в поляризационной оптике. Как стоксовы 4-векторы могут рассматриваться только четыре случая: $\Psi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$.

Таким образом, сам способ параметризации матриц из группы Лоренца, основанный на использовании факторизованного представления таких матриц в виде произведения двух взаимно коммутирующих преобразований, развитый много лет назад Ф.И. Федоровым [1], позволяет по-новому подойти к задаче нахождения параметров матриц Мюллера оптических элементов лоренцевского типа – через использование уравнений транзитивности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федоров, Ф.И. Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
2. Березин, А.В. Кватернионы в релятивистской физике / А.В. Березин, Ю.А. Курочкин, Е.А. Толкачев. – Минск : Наука и техника, 1989. – 211 с.

3. Bogush, A.A. On unique parametrization of the linear group $GL(4,C)$ and its subgroups by using the Dirac algebra basis / A.A. Bogush, V.M. Red'kov // NPCS. – 2008. – Vol. 11, № 1. – P. 1–24.

4. Red'kov, V.M. 4×4 matrices in Dirac parametrization: inversion problem and determinant / V.M. Red'kov, A.A. Bogush, N.G. Tokarevskaya // arXiv.org e-Print archive [Electronic resource]. – 2008. – Mode of access : http://arxiv.org/abs/0709.3574v2.

5. Red'kov, V.M. Lorentz group and polarization of the light / V.M. Red'kov // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2011. – Vol. 21. – P. 203–220.

6. Овсиюк, Е.М. Транзитивность в теории группы трехмерных вращений и формализм Стокса – Мюллера в поляризационной оптике / Е.М. Овсиюк // Весн. Магілёў. дзярж. ун-та імя А.А. Куляшова. Сер. B, Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2011. – № 1 (37). – С. 69–75.

7. Овсиюк, Е.М. Полугруппы Мюллера ранга 1 и 2 / Е.М. Овсиюк, О.В. Веко, В.М. Редьков // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (11). – С. 34–40.

8. Редьков, В.М. Транзитивность в теории группы Лоренца и формализм Стокса – Мюллера в поляризационной оптике / В.М. Редьков, Е.М. Овсиюк // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка, матэматыка. – 2012. – № 1. – С. 18–23.

9. Ovsiyuk, E.M. Degenerate 4-dimensional matrices with semi-group structure and polarization optics / E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // XLVIII All-Russia conference on problems in Particle Physics, Plasma Physics, Condensed Matter and Optoelectronics, Russia, Moscow, 15–18 May 2012 – Vestn. RUDN. – 2013. – 15 p.

10. Овсиюк, Е.М. Возможна ли финслерова геометризация поляризационной оптики / Е.М. Овсиюк, В.М. Редьков // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2012. – Т. 9, № 1 (17). – С. 1–56.

E. Ovsiyuk, O. Veko, M. Neagu, V. Balan, V. Red'kov. **Some Properties of Parameters of Lorentz Matrices and Transitivity Equations in Polarization Optics**

In the context of applying the Lorentz group theory to polarization optics in the frames of Stokes–Mueller formalism, some properties of the Lorentz group are investigated. Mueller matrices of the Lorentzian type $M = L$ are pointed out as a special sub-class in the total set of (4×4)-matrices of the linear group $GL(4,R)$. Any arbitrary Lorentz matrix is presented as a linear combination of 16 elements of the Dirac basis. On this ground, a method to construct parameters q_a by an explicitly given Lorentz matrix L is elaborated. It is shown that the factorized form of $L = M$ matrices provides us with a number of simple transitivity equations relating couples of initial and final 4-vectors, which are defined in terms of parameters q_a of the Lorentz group. Some of these transitivity relations can be interpreted within polarization optics.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 11.01.2013