УДК 519.6 + 517.983.54

В.Ф. Савчук, О.В. Матысик

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С САМОСОПРЯЖЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В гильбертовом пространстве для решения операторного уравнения I рода с положительным ограниченным и самосопряженным оператором предлагается неявный итерационный метод. Изучен случай неединственного решения. Показано, что в этом случае итерационный метод сходится к решению с минимальной нормой. Для предложенного метода доказана сходимость в энергетической норме гильбертова пространства, получены априорные оценки погрешности. Использование энергетической нормы позволяет сделать метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения уравнения.

1. Постановка задачи

Будем рассматривать в гильбертовом пространстве H уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

с ограниченным положительным самосопряженным оператором A, для которого нуль является собственным значением оператора A (случай неединственного решения уравнения (1)). Предположим, что при точной правой части y решение (неединственное) уравнения (1) существует. Будем искать его при помощи неявного итерационного метода

$$\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)x_{n+1} = \left(E - \alpha A^k\right)^2 x_n + 2\alpha A^{k-1} y,\ x_0 = 0,\ k \in N. \tag{2}$$

2. Сходимость метода в случае неединственного решения

Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, и $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 1. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$, $y \in H, \alpha > 0$, *тогда для итерационного метода* (2) *верны следующие утверждения:*

а) $Ax_n \to \Pi(A)y, \|Ax_n - y\| \to I(A, y) = \inf\limits_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) итерационный метод (2) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* *– минимальное решение.*

Доказательство

Применим оператор A к (2), получим

$$A\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)x_n = A\left(E - \alpha A^k\right)^2 x_{n-1} + 2\alpha A^k y,\ \text{где}\ y = P(A)y + \Pi(A)y.$$

Так как $AP(A)y = 0$, то получим $A\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)x_n = A\left(E - \alpha A^k\right)^2 x_{n-1} + 2\alpha A^k \Pi(A)y$, отсюда $\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)\left(Ax_n - \Pi(A)y\right) = \left(E - \alpha A^k\right)^2 \left(Ax_n - \Pi(A)y\right)$. Обозначим $Ax_n - \Pi(A)y = \upsilon_n$, $\upsilon_n \in M(A)$, тогда $\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)\upsilon_n = \left(E - \alpha A^k\right)^2 \upsilon_{n-1}$. Отсюда

$\upsilon_n = \left(E+\alpha^2 A^{2k}\right)^{-1}\left(E-\alpha A^k\right)^2 \upsilon_{n-1}$, следовательно, $\upsilon_n = \left(E+\alpha^2 A^{2k}\right)^{-n}\left(E-\alpha A^k\right)^{2n} \upsilon_0$. Имеем $A \ge 0$ и A положителен в $M(A)$, т.е. $(Ax,x) > 0$ $\forall x \in M(A)$. Так как $\alpha > 0$, то $\left\|\left(E+\alpha^2 A^{2k}\right)^{-1}\left(E-\alpha A^k\right)^2\right\| \le 1$. Поэтому справедлива цепочка неравенств:

$$\|\upsilon_n\| = \left\|\left(E+\alpha^2 A^{2k}\right)^{-n}\left(E-\alpha A^k\right)^{2n}\upsilon_0\right\| = \left\|\int_0^{\|A\|}\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_\lambda\upsilon_0\right\| \le$$

$$\le \left\|\int_0^{\varepsilon}\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_\lambda\upsilon_0\right\| + \left\|\int_\varepsilon^{\|A\|}\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_\lambda\upsilon_0\right\| \le$$

$$\le \left\|\int_0^{\varepsilon} dE_\lambda\upsilon_0\right\| + q^n(\varepsilon)\left\|\int_\varepsilon^{\|A\|} dE_\lambda\upsilon_0\right\| = \|E_\varepsilon\upsilon_0\| + q^n(\varepsilon)\|\upsilon_0\| \to 0$$

при $n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$. Здесь $\left|\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^2}{1+\alpha^2\lambda^2}\right| \le q(\varepsilon) < 1$ при $\lambda \in \left[\varepsilon, \|A\|\right]$. Следовательно, $\upsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Отсюда $\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A,y)$ $[1-2]$. Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \to Az = \Pi(A)y,$ следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (2) примет вид:

$$\left(E+\alpha^2 A^{2k}\right)x_n = \left(E-\alpha A^k\right)^2 x_{n-1} + 2\alpha A^{k-1}\Pi(A)y =$$
$$= \left(E-\alpha A^k\right)^2 x_{n-1} + 2\alpha A^k x^* = \left(E+\alpha^2 A^{2k}\right)x_{n-1} -$$
$$- 2\alpha A^k x_{n-1} + 2\alpha A^k x^* = \left(E+\alpha^2 A^{2k}\right)x_{n-1} + 2\alpha A^k\left(x^* - x_{n-1}\right).$$

Отсюда $x_n = x_{n-1} + 2\alpha A^k\left(E+\alpha^2 A^{2k}\right)^{-1}\left(x^* - x_{n-1}\right)$. Последнее равенство разобьем на два: $P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + 2\alpha\left(E+\alpha^2 A^{2k}\right)^{-1}A^k P(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0$.

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha\left(E+\alpha^2 A^{2k}\right)^{-1}A^k\Pi(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) =$$
$$= \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha\left(E+\alpha^2 A^{2k}\right)^{-1}A^k\left(\Pi(A)x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right) =$$
$$= \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha\left(E+\alpha^2 A^{2k}\right)^{-1}A^k\left(x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right),$$

так как $x^* \in M(A)$. Обозначим $\omega_n = \Pi(A)x_{n-1} - x^*$, тогда из равенства $\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* + 2\alpha\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-1} A^k\left(x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right)$ получим $\omega_n = \omega_{n-1} - 2\alpha\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-1} A^k \omega_{n-1} = \left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-1}\left(E - \alpha A^k\right)^2 \omega_n$ и, аналогично υ_n, можно показать, что $\omega_n \to 0$, $n \to \infty$. Таким образом, $\Pi(A)x_n \to x^*$. Отсюда $x_n \to P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. *Так как у нас* $x_0 = 0$*, то* $x_n \to x^*$*, т.е. итерационный метод* (2) *сходится к нормальному решению, т.е. к решению с минимальной нормой.*

3. Сходимость метода в энергетической норме

Ниже предполагается, что нуль не является собственным значением оператора A, следовательно, уравнение (1) имеет единственное решение. Однако нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, значит, некорректна. Для отыскания её решения используем метод (2). Правую часть уравнения (1), как это обычно бывает на практике, считаем известной приближенно, т. е. вместо y известно δ – приближение y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Тогда итерационный процесс (2) запишется виде

$$\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha A^k\right)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha A^{k-1} y_\delta,\ x_{0,\delta} = 0,\ k \in N. \tag{3}$$

Сходимость процессов (2) и (3) в исходной норме гильбертова пространства H была рассмотрена в статье [3]. Там показано, что предложенный неявный метод (3) сходится при условии $\alpha > 0$, если число итераций n выбирать в зависимости от уровня погрешности δ так, чтобы $n^{1/k}\delta \to 0$ при $n \to \infty$, $\delta \to 0$. В предположении, что точное решение уравнение (1) истокообразно представимо, получены априорные оценки погрешности и априорный момент останова. В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, затруднительно получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова. И тем не менее метод (3) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться энергетической нормой гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$ [4–5]. Покажем сходимость метода (3) в энергетической норме гильбертова пространства и получим для него в энергетической норме априорные оценки.

Рассмотрим разность:

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \tag{4}$$

Запишем первое слагаемое в виде:

$$x - x_n = A^{-1}\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-n}\left(E - \alpha A^k\right)^{2n} y = \left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-n}\left(E - \alpha A^k\right)^{2n} x.$$

Как было показано в [3], $x - x_n$ бесконечно мало в исходной норме гильбертова пространства H при $n \to \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для её оценки делалось предположение об истокообразной представимости точного решения. При использовании энергетической нормы нам это дополнительное предположение не понадобится. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора $A = \int_0^M \lambda dE_\lambda$, где $M = \|A\|$

и E_λ – соответствующая спектральная функция, имеем

$$\|x-x_n\|_A^2=\left(A\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-n}\left(E-\alpha A^k\right)^{2n}x,\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-n}\left(E-\alpha A^k\right)^{2n}x\right)=$$

$$=\int_0^M\lambda\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{4n}\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^{-2n}d\left(E_\lambda x,x\right).$$

Для оценки интересующей нас нормы найдем максимум подынтегральной функции $f(\lambda)=\lambda\dfrac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{4n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^{2n}}$ при $\lambda\in[0,M]$. Функция $f(\lambda)$ – частный случай при $s=1$ функций, оцененных в [3]. Там показано, что при условии $\alpha>0$ $\max\limits_{\lambda\in[0,M]}|f(\lambda)|\le(4kn\alpha e)^{-1/k}$. Следовательно, справедлива оценка $\|x-x_n\|_A^2\le(4kn\alpha e)^{-1/k}\|x\|^2$. Отсюда $\|x-x_n\|_A\le(4kn\alpha e)^{-1/(2k)}\|x\|$. Таким образом, переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокопредставимости порядка $s=1/2$ для точного решения.

Оценим второе слагаемое в (4). Как показано в [3], справедливо равенство:

$$x_n-x_{n,\delta}=A^{-1}\left[E-\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-n}\left(E-\alpha A^k\right)^{2n}\right](y-y_\delta).$$

Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, получим $\|x_n-x_{n,\delta}\|_A^2=\int\limits_0^M\lambda^{-1}\left[1-\dfrac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}\right]^2d\left(E_\lambda(y-y_\delta),y-y_\delta\right).$

Обозначим через $g(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\dfrac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}\right]^2$ подынтегральную функцию, а через $g_1(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\dfrac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}\right]$, тогда $g(\lambda)=g_1(\lambda)\left[1-\dfrac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}\right]$. Функция $g_1(\lambda)$ была оценена в [3]. Там показано, что при условии $\alpha>0$ $g_1(\lambda)\le2k(n\alpha)^{1/k}$. При этом же условии имеем $\left|\dfrac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^2}{1+\alpha^2\lambda^{2k}}\right|\le1,\ \forall\lambda\in[0,M]$, поэтому $1-\dfrac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}\le2$, откуда $g(\lambda)\le4k(n\alpha)^{1/k}$. Таким образом, $\|x_n-x_{n,\delta}\|_A^2\le4k(n\alpha)^{1/k}\delta^2$, отсюда $\|x_n-x_{n,\delta}\|_A\le2k^{1/2}(n\alpha)^{1/(2k)}\delta$, $n\ge1$. Поскольку

$$\|x-x_{n,\delta}\|_A\le\|x-x_n\|_A+\|x_n-x_{n,\delta}\|_A\le\|x-x_n\|_A+2k^{1/2}(n\alpha)^{1/(2k)}\delta$$

и $\|x-x_n\|_A\to0$, $n\to\infty$, то для сходимости $\|x-x_{n,\delta}\|_A\to0$, $n\to\infty$ достаточно, чтобы

$n^{1/(2k)}\delta \to 0$ при $n \to \infty$, $\delta \to 0$. Итак, доказана

Теорема 2. *При условии* $\alpha > 0$ *итерационный метод* (3) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать из условия* $n^{1/(2k)}\delta \to 0$ *при* $n \to \infty$, $\delta \to 0$.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3) в энергетической норме

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_A \le \left(4kn\alpha e\right)^{-1/(2k)} \|x\| + 2k^{1/2} (n\alpha)^{1/(2k)} \delta, \ n \ge 1. \tag{5}$$

Оптимизируем оценку (5) по *n*. Для этого при заданном δ найдем такое значение числа итераций *n*, при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по *n* от правой части неравенства (5), получим

$$n_{\text{опт}} = 2^{-(k+1)} k^{-(k+1)/2} \alpha^{-1} e^{-1/2} \delta^{-k} \|x\|^k. \tag{6}$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (5), найдем её оптимальное значение

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_A^{\text{опт}} \le 2^{(3k-1)/(2k)} k^{(k-1)/(4k)} e^{-1/(4k)} \delta^{1/2} \|x\|^{1/2}. \tag{7}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Оптимальная оценка погрешности для метода* (3) *при условии* $\alpha > 0$ *в энергетической норме имеет вид* (7) *и получается при* $n_{опт}$ *из* (6).

Замечание 2. *Из неравенства* (7) *вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра* α. *Но* $n_{опт}$ *зависит от* α, *и поскольку на* α *нет ограничений сверху* $(\alpha > 0)$, *то за счет выбора* α *можно получить* $n_{опт} = 1$, *т.е. оптимальная оценка погрешности будет достигаться уже на первом шаге итераций. Для этого достаточно взять* $\alpha_{опт} = 2^{-(k+1)} k^{-(k+1)/2} e^{-1/2} \delta^{-k} \|x\|^k$.

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства *H*. Очевидно, для этого достаточно, чтобы при некотором фиксированном ε, $\left(0 < \varepsilon < \|A\|\right)$ было:

$$P_\varepsilon x = 0, \ P_\varepsilon x_{n,\delta} = 0, \text{ где } P_\varepsilon = \int_0^\varepsilon \lambda dE_\lambda .$$

Так как $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - \left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-n} \left(E - \alpha A^k\right)^{2n}\right] y_\delta$, то для выполнения последнего из указанных условий должно выполняться условие $P_\varepsilon y_\delta = 0$. Таким образом, если решение *x* и приближенная правая часть y_δ таковы, что $P_\varepsilon x = 0$ и $P_\varepsilon y_\delta = 0$, то из сходимости $x_{n,\delta}$ к *x* в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства *H,* и, следовательно, для сходимости в исходной норме пространства *H* не требуется истокопредставимость точного решения.

Аналогично тому, как показано в разделе 2, изложенный метод в энергетической норме пригоден и в случае неединственного решения уравнения (1) ($\lambda = 0$ – собственное значение оператора). Тогда он обеспечивает сходимость в энергетической норме к минимальному решению.

Для решения уравнений с несамосопряженным или неположительным, но ограниченным оператором A следует перейти к уравнению $A^* Ax = A^* y$. Тогда при приближенном элементе y_δ метод (3) примет вид

$$\left(E + \alpha^2 \left(A^* A\right)^{2k}\right) x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha\left(A^* A\right)^k\right)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha\left(A^* A\right)^{k-1} A^* y_\delta,\ x_{0,\delta} = 0,\ k \in N.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bialy, H. Iterative Behandlung linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, № 2. – P. 166–176.

2. Савчук, В.Ф. Об одном неявном итеративном методе решения операторных уравнений / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 4. – С. 38–42.

3. Матысик, О.В. О приближенном решении операторных уравнений I рода / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Веснік Брэскага ун-та. Сер. 4 «Фізіка. Матэматыка». – 2011. – № 1. – С. 93–101.

4. Лисковец, О.А. Сходимость в энергетической норме итеративного метода для уравнений 1-го рода / О.А. Лисковец, В.Ф. Савчук // Известия АН БССР. Серия физ.-матем. наук. – 1976. – № 2. – С. 19–23.

5. Савчук, В.Ф. Неявная итерационная процедура решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 5. – С. 37–42.

V.F. Savchuk, O.V. Matysik. **About Iteration Method Decision of the Incorrect Problems with Self-Adjoned Operator**

In the Hilbert space for solving operator equations of type I with affirmative limited and self–conjugate operator the implicite iteration method is proposed. The case of non–uniqueness of solving operator equation is investigated. It is shown, that in this case the iteration method converges to the decision with the minimal norm. In energy norm of Hilbert space for the proposed method convergence is proved and apriori estimations of this method error have been received. The use of energy norm allows making a method quite effective even when there are no data about source representability of exact solution of the equation.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 19.09.2011 г.