УДК 517.5

И.В. Кальчук, Р.А. Маковий, А.О. Задорожный, И.П. Приймас

4-ГАРМОНИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ ПУАССОНА КАК РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В работе рассматривается задача Дирихле для 4-гармонического уравнения $\Delta^4 u = 0$. Решение этой задачи будем называть 4-гармоническим интегралом Пуассона, который являет определенный интерес в теории приближения функций. Также найдено разложение ядра 4-гармонического интеграла Пуассона в ряд Фурье.

Пусть задана функция $u = u(z) = u\left(re^{i\varphi}\right)$, $0 \le r < 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Через $K^r : K_0^r \subset R^n$ обозначим обобщенный шар с радиусом r и центром в начале координат, S^r – граница шара, Ω – внутренность шара.

Для m-гармонического оператора $\Delta^m := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^m$ рассмотрим задачу Дирихле: найти решение уравнения

$$\Delta^m u = 0 \tag{1}$$

в области Ω при заданных граничных условиях

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial n^k}\right|_{S^r} = g_k,\ \left(k = 0, 1, \ldots, m-1\right), \tag{2}$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ – нормальная производная на границе шара.

Известно [1], если выполняется условие $g_k \in C^{m-1-k}(S^r)$, то решение $u(x)$ этой задачи Дирихле для $x \in \Omega$ представляется в виде формулы:

$$u(x) = \frac{(-1)^{m-1}(r^2 - |x|^2)^m}{(m-1)!\,\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{S^r} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} \left[\frac{\partial^{m-1-k}}{\partial (r^2)^{m-1-k}} \cdot \frac{r^{n-2}}{|x-y|^n}\right] g_k(y)\, dO_n(y). \tag{3}$$

Положив в формуле (3) $m = 4$, $n = 2$, получим

$$u(x) = \frac{(-1)^3\left(r^2 - |x|^2\right)^4}{3!\,\omega_2 r}\left[\int\limits_{S^r} \frac{\partial^3}{\partial (r^2)^3}\left(\frac{1}{|x-y|^2}\right) g_0(y)\,ds + 3\int\limits_{S^r} \frac{\partial^2}{\partial (r^2)^2}\left(\frac{1}{|x-y|^2}\right) g_1(y)\,ds + \right.$$

$$\left. + 3\int\limits_{S^r} \frac{\partial}{\partial (r^2)}\left(\frac{1}{|x-y|^2}\right) g_2(y)\,ds + \int\limits_{S^r} \frac{1}{|x-y|^2} g_3(y)\,ds\right].$$

Учитывая, что $\omega_2 = 2\pi r$, $x = |x|e^{i\varphi}$, $y = re^{it}$, $ds = rdt$, из предыдущей формулы имеем

$$u(|x|e^{i\varphi}) = -\frac{\left(r^2 - |x|^2\right)^4}{3!\cdot 2\pi r \cdot r} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\partial^3}{\partial (r^2)^3}\left(\frac{1}{|x|^2 - 2|x| r\cos(\varphi - t) + r^2}\right) g_0(re^{it}) + \right.$$

$$+3\frac{\partial^2}{\partial(r^2)^2}\left(\frac{1}{|x|^2-2|x|r\cos\left(\varphi-t\right)+r^2}\right)g_1(re^{it})+$$

$$+3\frac{\partial}{\partial(r^2)}\left(\frac{1}{|x|^2-2|x|r\cos\left(\varphi-t\right)+r^2}\right)g_2(re^{it})+$$

$$\left.+\left(\frac{1}{|x|^2-2|x|r\cos\left(\varphi-t\right)+r^2}\right)g_3(re^{it})\right]rdt. \qquad (4)$$

Найдем соответствующие производные из последнего равенства. Поскольку $\frac{\partial}{\partial r^2}(r)=\frac{1}{2r}$, $\frac{\partial}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{2r^3}$, $\frac{\partial}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r^2}\right)=-\frac{1}{r^4}$ и $\frac{\partial}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r^3}\right)=-\frac{3}{2}\frac{1}{r^5}$, то

$$\frac{\partial}{\partial(r^2)}\left(\frac{1}{|x|^2-2|x|r\cos(\varphi-t)+r^2}\right)=-\frac{-\frac{|x|}{r}\cos(\varphi-t)+1}{\left(|x|^2-2|x|\cos(\varphi-t)+r^2\right)^2}, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial(r^2)^2}\left(\frac{1}{|x|^2-2|x|r\cos(\varphi-t)+r^2}\right)=\frac{\partial}{\partial(r^2)}\left(-\frac{-\frac{|x|}{r}\cos(\varphi-t)+1}{(|x|^2-2|x|r\cos(\varphi-t)+r^2)^2}\right)=$$

$$=\frac{|x|\frac{\partial}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\right)\cos(\varphi-t)\cdot\left(|x|^2-2|x|\cos(\varphi-t)+r^2\right)}{(|x|^2-2|x|r\cos(\varphi-t)+r^2)^3}+$$

$$+\frac{\left(-\frac{|x|}{r}\cos(\varphi-t)+1\right)\cdot 2\left(-2|x|\frac{\partial}{\partial r^2}\left(r\right)\cos(\varphi-t)+1\right)}{(|x|^2-2|x|r\cos(\varphi-t)+r^2)^3}=$$

$$=\frac{-\frac{|x|}{2r^3}\cos(\varphi-t)\cdot\left(|x|^2-2|x|\cos(\varphi-t)+r^2\right)+2\left(-\frac{|x|}{r}\cos(\varphi-t)+1\right)\cdot\left(-\frac{|x|}{r}\cos(\varphi-t)+1\right)}{(|x|^2-2|x|r\cos(\varphi-t)+r^2)^3}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{4-9\frac{|x|}{r}\cos(\varphi-t)+6\frac{|x|^2}{r^2}\cos^2(\varphi-t)-\frac{|x|^3}{r^3}\cos^3(\varphi-t)}{(|x|^2-2|x|r\cos(\varphi-t)+r^2)^3}, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial(r^2)^3}\left(\frac{1}{|x|^2-2|x|r\cos\left(\varphi-t\right)+r^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r^2}\left(\frac{4-9\frac{|x|}{r}\cos(\varphi-t)+6\frac{|x|^2}{r^2}\cos^2(\varphi-t)-\frac{|x|^3}{r^3}\cos^3(\varphi-t)}{(|x|^2-2|x|r\cos(\varphi-t)+r^2)^3}\right)=$$

$$=\frac{-9|x|\frac{\partial}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\right)\cos(\varphi-t)+6|x|^2\frac{\partial}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r^2}\right)\cos^2(\varphi-t)-|x|^3\frac{\partial}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r^3}\right)\cos^3(\varphi-t)}{2(|x|^2-2|x|r\cos(\varphi-t)+r^2)^3}-$$

$$-\frac{3}{2}\frac{\left(4-9\frac{|x|}{r}\cos(\varphi-t)+6\frac{|x|^2}{r^2}\cos^2(\varphi-t)-\frac{|x|^3}{r^3}\cos^3(\varphi-t)\right)\left(-2|x|\frac{\partial}{\partial r^2}(r)\cos(\varphi-t)+1\right)}{(|x|^2-2|x|r\cos(\varphi-t)+r^2)^4}=$$

$$=\frac{\frac{9}{2}\frac{|x|}{r^3}\cos(\varphi-t)-6\frac{|x|^2}{r^4}\cos^2(\varphi-t)+\frac{3}{2}\frac{|x|^3}{r^5}\cos^3(\varphi-t)}{2(|x|^2-2|x|r\cos(\varphi-t)+r^2)^3}-$$

$$-\frac{3}{2}\frac{\left(4-9\frac{|x|}{r}\cos(\varphi-t)+6\frac{|x|^2}{r^2}\cos^2(\varphi-t)-\frac{|x|^3}{r^3}\cos^3(\varphi-t)\right)\left(-\frac{|x|}{r}\cos(\varphi-t)+1\right)}{(|x|^2-2|x|r\cos(\varphi-t)+r^2)^4}=$$

$$=-\frac{3}{4}\left(\frac{8-29\frac{|x|}{r}\cos(\varphi-t)+40\frac{|x|^2}{r^2}\cos^2(\varphi-t)-6\frac{|x|^3}{r^3}\cos(\varphi-t)-20\frac{|x|^3}{r^3}\cos^3(\varphi-t)}{(|x|^2-2|x|r\cos(\varphi-t)+r^2)^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{8\frac{|x|^4}{r^4}\cos^2(\varphi-t)-\frac{|x|^5}{r^5}\cos(\varphi-t)}{(|x|^2-2|x|r\cos(\varphi-t)+r^2)^4}\right). \qquad (7)$$

Подставляя найденные производные (5)–(7) в (4) и положив $r=1,\ |x|=r$, получим решение задачи Дирихле для 4-гармонического уравнения $\Delta^4 u=0$ в единичном круге при заданных граничных условиях $u\big|_{r=1}=g_0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=g_1$, $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right|_{r=1}=g_2$, $\left.\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right|_{r=1}=g_3$:

$$u(re^{i\varphi})=\frac{(1-r^2)^4}{16\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big[8-29r\cos(\varphi-t)+40r^2\cos^2(\varphi-t)-6r^3\cos(\varphi-t)-20r^3\cos^3(\varphi-t)+$$

$$+8r^4\cos^2(\varphi-t)-r^5\cos(\varphi-t)\big]\frac{g_0(e^{it})dt}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^4}-$$

$$-\frac{(1-r^2)^4}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{4-9r\cos(\varphi-t)+6r^2\cos^2(\varphi-t)-r^3\cos(\varphi-t)}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^3}g_1(e^{it})dt+$$

$$+\frac{\left(1-r^2\right)^4}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r\cos(\varphi-t)}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^2}g_2(e^{it})dt-\frac{(1-r^2)^4}{12\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{g_3(e^{it})}{r^2-2r\cos(\varphi-t)+1}dt.$$

(8)

Замечание. Следует отметить, что если в формуле (3) положить $n=2$, то при $m=1$ получим гармонический интеграл Пуассона [2–10]), при $m=2$ – бигармонический интеграл Пуассона [11–16], и если $m=3$ – тригармонический интеграл Пуассона [17].

Поэтому величину

$$P_4(r,\varphi)=\frac{(1-r^2)^4}{16\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big[8-29r\cos(\varphi-t)+40r^2\cos^2(\varphi-t)-6r^3\cos(\varphi-t)-20r^3\cos^3(\varphi-t)+$$

$$+8r^4\cos^2(\varphi-t)-r^5\cos(\varphi-t)\big]\frac{g_0(e^{it})dt}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^4},\qquad(9)$$

аналогично вышеупомянутому замечанию, будем называть 4-гармоническим интегралом Пуассона.

Пусть, далее, $g_0(e^{it})=f(t)$. В результате замены переменной в (9) будем иметь:

$$P_4(r,f,x)=\frac{(1-r^2)^4}{16\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\big[8-29r\cos t+40r^2\cos^2 t-6r^3\cos t-20r^3\cos^3 t+$$

$$+8r^4\cos^2 t-r^5\cos t\big]\frac{dt}{(r^2-2r\cos t+1)^4}$$

или

$$P_4(r,f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)K_4(r,t)\,dt,$$

где $K_4(r,t)$ – ядро 4-гармонического интеграла Пуассона, имеющее вид

$$K_4(r,t)=\frac{(1-r^2)^4}{16}\frac{8-29r\cos t+40r^2\cos^2 t-6r^3\cos t-20r^3\cos^3 t+8r^4\cos^2 t-r^5\cos t}{(1-2r\cos t+r^2)^4}.\qquad(10)$$

Для ядра $K_4(r,t)$ справедливо представление:

$$K_4(r,t)=\frac{(1-r^2)^2}{4}\left(\frac{5(1-r^2)}{8}p(r,t)+\frac{5-11r^2}{8}p^2(r,t)+\frac{1-2r^2}{2}p^3(r,t)+\frac{1-r^2}{4}p^4(r,t)\right),\qquad(11)$$

где

$$p(r,t)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}.\qquad(12)$$

Действительно,

$$8-29r\cos t+40r^2\cos^2 t-6r^3\cos t-20r^3\cos^3 t+8r^4\cos^2 t-r^5\cos t=$$

$$=\frac{5}{2}\left(1+3r^2+3r^4+r^6-6r\cos t-12r^3\cos t-6r^5\cos t+12r^2\cos^2 t+12r^4\cos^2 t-8r^3\cos^3 t\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(11-15r^2-15r^4-5r^6-28r\cos t-48r^3\cos t+28r^5\cos t+20r^2\cos^2 t-44r^4\cos^2 t\right)=$$

$$=\frac{5}{2}\left(1-2r\cos t+r^2\right)^3+\frac{1}{2}\left(\left(5-11r^2\right)\left(1+2r^2+r^4-4r\cos t-4r^3\cos t+4r^2\cos^2 t\right)+\right.$$

$$\left.+2\left(3-7r^2+r^4+3r^6-4r\cos t+12r^3\cos t-8r^5\cos t\right)\right)=\frac{5}{2}\left(1-2r\cos t+r^2\right)^3+$$

$$+\frac{1}{2}\left(5-11r^2\right)\left(1-2r\cos t+r^2\right)^2+2\left(1-3r^2+2r^4\right)\left(1-2r\cos t+r^2\right)+\left(1-r^2\right)^3. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (10), будем иметь

$$K_4\left(r,t\right)=\frac{(1-r^2)^4}{16}\left(\frac{5}{2\left(1-2r\cos t+r^2\right)}+\frac{5-11r^2}{2\left(1-2r\cos t+r^2\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\left(1-r^2\right)\left(1-2r^2\right)}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)^3}+\frac{\left(1-r^2\right)^3}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)^4}\right)=$$

$$=\frac{(1-r^2)^2}{4}\left(\frac{5(1-r^2)}{8}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}+\frac{5-11r^2}{8}\frac{(1-r^2)^2}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1-2r^2}{2}\frac{(1-r^2)^3}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)^3}+\frac{1-r^2}{4}\frac{(1-r^2)^4}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)^4}\right).$$

Откуда учитывая (12), получим формулу (11).

Разложив в ряд Фурье величины $p\left(r,t\right)$, $p^2\left(r,t\right)$, $p^3\left(r,t\right)$, $p^4\left(r,t\right)$, можно получить ряд Фурье для ядра $K_4\left(r,t\right)$.

Для нахождения коэффициентов a_k воспользуемся формулой (3.616.7) из [18]:

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos kt}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)^m}dt=\frac{r^{2m+k-2}\pi}{(1-r^2)^{2m-1}}\sum_{n=0}^{m-1}\binom{m+k-1}{n}\binom{2m-n-2}{m-1}\left(\frac{1-r^2}{r^2}\right)^n, \ [r^2<1].$$

Поскольку $p\left(r,t\right)=\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}$, $p^2\left(r,t\right), p^3\left(r,t\right), p^4\left(r,t\right)$ – четные функции относительно t, то $b_k=0$ для $\forall k\in N$.

Тогда

$$S[p(r,t)]=1+2\sum_{k=1}^{\infty}r^k\cos kt\,dt,$$

$$S[p^2(r,t)]=\frac{1+r^2}{1-r^2}+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}+k\right)r^k\cos kt,$$

$$S[p^3(r,t)] = \frac{1+4r^2+r^4}{(1-r^2)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2(1+4r^2+r^4)}{(1-r^2)^2} + \frac{3+3r^2}{1-r^2}k + k^2\right] r^k \cos kt,$$

$$S[p^4(r,t)] = \frac{1+9r^2+9r^4+r^6}{(1-r^2)^3} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2\left(1+9r^2+9r^4+r^6\right)}{(1-r^2)^3} + \frac{11+38r^2+11r^4}{3(1-r^2)^2}k + \frac{2+2r^2}{1-r^2}k^2 + \frac{k^3}{3}\right] r^k \cos kt.$$

Подставляя найденные разложения в (11), окончательно получим:

$$S[K_4(r,t)] = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{(1-r^2)\left(6+3(1-r^2)+2(1-r^2)^2\right)}{12}k + \right.$$

$$\left. + \frac{(2-r^2)(1-r^2)^2}{8}k^2 + \frac{\left(1-r^2\right)^3}{48}k^3\right) r^k \cos kt \ -$$

ряд Фурье для ядра 4-гармонического интеграла Пуассона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gonzales, L. Über das Randverhalten des Poisson-Integrals der polyharmonischen Gleichung / L. Gonzales, E. Keller, G. Wildenhain // Mathematische Nachrichten. – 1980. – 95. – S. 157–164.

2. Натансон, В.П. О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона / В.П. Натансон // Докл. АН СССР. – 1950. – 72, № 1 – С. 11–14.

3. Тимман, А.Ф. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона / А.Ф. Тиман // Докл. АН СССР. – 1950. – 74, № 1 – С. 17–20.

4. Штарк, Э.Л. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $Lip1$ от их сингулярного интеграла Абеля-Пуассона / Э.Л. Штарк // Мат. заметки. – 1973. – 13, № 1. – С. 21–28.

5. Фалалеев, Л.П. О приближении функций обобщенными операторами Абеля-Пуассона / Л.П.Фалалеев // Сибирский матем. журнал. – 2001. – 42, № 4. – С. 926–936.

6. Zhyhallo, K.M. Complete Asymptotics of the Deviation of a Class of Differentiable Functions from the Set of Their Harmonic Poisson Integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – 54, № 1. – P. 51–63.

7. Kharkevych, Yu.I. Approximation of (ψ,β)-differentiable Functions Defined on the Real Axis by Abel-Poisson Operators / Yu.I. Kharkevych, T.V. Zhyhallo // Ukr. Math. Journal. – 2005. – 57, № 8. – P. 1297–1315.

8. Zhyhallo, K.M. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel–Poisson integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2009. – 61, № 1. – P. 86–98.

9. Zhyhallo, T.V. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric / T.V. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2009. – 61, № 11. – P. 1757–1779.

10. Zhyhallo, T.V. Approximation of functions from the class C_{ψ}^{β} by Poisson integrals in the uniform metric / T.V. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2009. – 61, № 12. – P. 1893–1914.

11. Каниев, С. Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений / С. Каниев // Докл. АН СССР. – 1963. – 153, № 5. – С. 995–998.

12. Фалалеев, Л.П. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонений функций из $Lip_1 1$ от одного сингулярного интеграла / Л.П. Фалалеев // Теоремы вложения и их приложения (Материалы всесоюз. симп.). – Алма-Ата : Наука КазССР, 1976. – С. 163–167.

13. Zhyhallo, K.M. Approximation of Differentiable Periodic Functions by Their Biharmonic Poisson Integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – 54, 9. – P. 1462–1470.

14. Kharkevych, Yu.I. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals / Yu.I. Kharkevych, I.V. Kal'chuk // Ukr. Math. Journal. – 2007. – 59, № 8. – P. 1224–1237.

15. Kharkevych, Yu.I. Approximation of functions from the class by Poisson biharmonic operators in the uniform metric / Yu.I. Kharkevych, T.V. Zhyhallo // Ukr. Math. Journal. – 2008. – 60, № 5. – P. 769–798.

16. Zhyhallo, K.M. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2009. – 61, № 3. – P. 399–413.

17. Zhyhallo, K.M. On the Approximation of Functions of the Hölder Class by Triharmonic Poisson Integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2001. – 53, № 6. – P. 1012–1018.

18. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик – М. : Физматиз, 1963. – 1100 с.

I.V. Kalchuk, R.O. Makovij, A.O. Zadorozhnyi, I.P. Priymas. **4-harmonic Poisson Integral as the Solution of Boundary-Value Problem**

In the work we consider the Dirichlet problem for 4-harmonic equation $\Delta^4 u = 0$. We will call the solution of this problem l 4-harmonic Poisson Integral, which is of certain interest in the theory of approximation of function. The decomposition of the core of 4-harmonic Poisson Integral in Fourier series was found.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 10.05.2011 г.