УДК 512.542

Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич, М.В. Селькин

О ВЛИЯНИИ ИНДЕКСОВ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП НА ИХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

В работе исследуются пересечения $\mathfrak{I}$-абнормальных максимальных подгрупп с ограничениями на их индексы, выделяемые подгрупповым функтором.

Введение

Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. Одно из классических направлений в исследовании конечных групп связано с исследованием свойств пересечений заданных максимальных подгрупп и влиянием этих свойств на подгрупповое и нормальное строение группы. Важную роль здесь занимает подгруппа Фраттини, введенная в работе [1]. Теорема Фраттини получила развитие в работах многих авторов: В. Гашюца [2] (пересечение $\Delta(G)$ всех ненормальных максимальных подгрупп группы G), В. Дескинса [3] (пересечение $\Phi_p(G)$ всех максимальных подгрупп группы G, индексы которых не делятся на p) и других [4; 5].

Развитие теории пересечений в 1960-х годах в значительной степени стимулировалось результатами, связанными с теорией формаций. Применение идей и методов теории формаций позволило систематизировать накопившийся богатый фактический материал о максимальных подгруппах. Этому способствовало введённое в работах Р. Картера, Т. Хоукса [6] и Л.А. Шеметкова [7] понятие $\mathfrak{I}$-абнормальной максимальной подгруппы.

Данная работа посвящена развитию указанных направлений в группах с операторами.

1. Определения и обозначения

Подгруппа H группы G называется:

1) пронормальной, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $< H, H^x >$;

2) абнормальной, если $x \in < H, H^x >$ для любого $x \in G$.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G.

Класс групп называют нормально наследственным (S_n-замкнутым), если вместе с каждой своей группой G он содержит все нормальные подгруппы группы G.

Класс групп $\mathfrak{I}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{I}$ и $N \triangleleft G$, то $G/N \in \mathfrak{I}$;

2) если $G/N_1 \in \mathfrak{I}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{I}$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{I}$.

Отображение f класса G всех групп в множество классов групп называют экраном, если для любой группы G выполняются следующие условия:

1) $f(G)$ – формация;

2) $f(G) \subseteq f(G^\varphi) \cap f(Ker\varphi)$ для любого гомоморфизма φ группы G;

3) $f(1)=G$.

Экран f называют локальным, если для любого простого числа p он принимает одинаковые значения на всех неединичных p-группах и $f(G)=\bigcap_{p\in\pi(G)} f(p)$ для любой группы G.

Формацию $\mathfrak{I}$ называют локальной, если она имеет хотя бы один локальный экран.

Пусть $\mathfrak{I}$ – формация. Тогда через $G^{\mathfrak{I}}$ обозначается $\mathfrak{I}$-корадикал группы G – пересечение всех нормальных подгрупп N группы, для которых $G/N\in\mathfrak{I}$.

Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{I}$-нормальной ($\mathfrak{I}$-абнормальной), если $G^{\mathfrak{I}}$ содержится (не содержится) в M.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (то есть пересечение всех подгрупп из G сопряженных с подгруппой M).

Учитывая, что максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение конечных групп, рассмотрим максимальные подгруппы среди подгрупп, обладающих общим заданным свойством, и изучим их пересечения и влияние на нормальное строение группы.

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f: A\mapsto End(G)$, где $End(G)$ – гомоморфное отображение группы G в себя или эндоморфизм группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, т. е. $M^{\alpha}\subseteq M$ для любого оператора $\alpha\in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Обозначим через $\Phi(G,A)$ пересечение ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп. Если таких подгрупп в группе G нет, то положим $\Phi(G,A)=G$.

Заметим, что максимальная A-допустимая подгруппа M либо целиком содержит $\mathfrak{I}$-корадикал группы G, либо $MG^{\mathfrak{I}}=G$. Действительно, так как произведение A-допустимых подгрупп A-допустимо и $G^{\mathfrak{I}}$ – характеристическая подгруппа, а, следовательно, A-допустимая, то $MG^{\mathfrak{I}}=M$ или $MG^{\mathfrak{I}}=G$.

Пусть $\mathfrak{I}$ – непустая формация и группа G имеет группу операторов A. Через $D^{\mathfrak{I}}(G,A)$ обозначим пересечение ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{I}$-корадикал группы G. Если в группе G все максимальные A-допустимые подгруппы содержат F-корадикал группы G, то, положим, $D^{\mathfrak{I}}(G,A)=G$.

В случае, когда $\mathfrak{I}$ совпадает с формацией всех нильпотентных групп, то подгруппу $D^{\mathfrak{I}}(G,A)$ будем обозначать $D^{\mathfrak{R}}(G,A)$.

Пусть π – некоторое множество простых чисел, $\mathfrak{I}$ – непустая формация и группа G имеет группу операторов A. Через $D_{\pi}^{\mathfrak{I}}(G,A)$ обозначим пересечение ядер всех $\mathfrak{I}$-абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих F-корадикал группы G, индексы которых не делятся на простые числа из π. Если в G таких подгрупп нет, то положим $D_{\pi}^{\mathfrak{I}}(G,A)=G$.

Отметим, если $A=1$, то подгруппы $D^{\mathfrak{I}}(G,A)$ и $D_{\pi}^{\mathfrak{I}}(G,A)$ совпадают соответственно с подгруппами $\Delta^{\mathfrak{I}}(G)$ и $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{I}}(G)$, равной пересечению всех $\mathfrak{I}$-абнормальных максимальных подгрупп группы G и $\mathfrak{I}$-абнормальных максимальных подгрупп группы G, индексы которых не делятся на простые числа из π, строение которых рассматривалось в [5].

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов A, а так же не всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе.

Пример 2.1. *Пусть Q – группа кватернионов 8-го порядка. Рассмотрим $G=[Q]Z_3$, Z_3 – группа операторов для Q. В группе Q подгруппа K порядка 2 является максимальной допустимой относительно группы операторов Z_3, но не является максимальной подгруппой группы Q.*

Пример 2.2. *Рассмотрим группу*

$$G^* =< a,b,c \mid a^2 = b^3 = c^3 = 1, bc = cb, b^a = c >.$$

Тогда $G^* = [G]A$, где $G =< b > \times < c >$ и $A =< a >$ – группа операторов группы G. Простая проверка показывает, что в группе G есть максимальная A-допустимая подгруппа $H =< bc >$ порядка 3, но не все подгруппы порядка 3, например, b, являются A-допустимыми. Отмеченный клас групп становится достаточно широким, если образовать группу $R = G^* \times Q$, где Q – сверхразрешимая группа и $(|G|,|Q|) = 1$.

3. Вспомогательные результаты

Лемма 3.1. [С. 24, 8]. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|) = 1$. Тогда в группе G существует A-допустимая силовская p-подгруппа, для любого простого числа $p \in \pi(G)$ и все такие подгруппы сопряжены между собой в G.*

Теорема 3.2. [С. 96, 4] *Для любой группы G и любой ступенчатой формации $\mathfrak{I}$ имеет место равенство $\Delta^{\mathfrak{I}}(G)/\Phi(G) = Z_{\infty}^{\mathfrak{I}}(G/\Phi(G))$.*

Лемма 3.3. [С. 96, 4] *Пусть $\mathfrak{I}$ – S_n-замкнутая локальная формация. Тогда каждая $\mathfrak{I}$-гиперцентральная нормальная подгруппа любой группы принадлежит $\mathfrak{I}$.*

Лемма 3.4. [С. 86, 8] *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|) = 1$. Тогда подгруппа $\Phi(G, A)$ нильпотентна.*

Лемма 3.5. *Если N – нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N \subseteq \Phi_{\pi}(G, A)$, то*

$$\Phi_{\pi}(G/N, A) = \Phi_{\pi}(G, A)/N.$$

Доказательство. Если $N \subseteq \Phi_{\pi}(G, A)$, то $N \subseteq M$, где M – любая максимальная A-допустимая подгруппа из G с индексом, не делящимся на простые числа из π. Тогда

$$\Phi_{\pi}(G/N, A) = \cap(M/N)_{G/N},$$

где M/N пробегает множество всех максимальных A-допустимых подгрупп из G/N с индексом, не делящимся на простые числа из π.

Продолжим равенство

$$\cap(M/N)_{G/N} = (\cap M_G)/N = \Phi_{\pi}(G, A)/N.$$

Из приведенных равенств вытекает утверждение леммы.

Лемма 3.6. *Пусть группа G имеет группу операторов A, $\mathfrak{I}$ – формация. Тогда если N – нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N \subseteq D_{\pi}^{\mathfrak{I}}(G, A)$, то*

$$D_{\pi}^{\mathfrak{I}}(G/N, A) = D_{\pi}^{\mathfrak{I}}(G, A)/N.$$

Доказательство. Если $N \subseteq D_{\pi}^{\mathfrak{I}}(G, A)$, то $N \subseteq M$, где M – любая максимальная A-допустимая подгруппа из G, не содержащая $\mathfrak{I}$-корадикал, с индексом, не делящимся на простые числа из π. Тогда

$$D_{\pi}^{\mathfrak{I}}(G / N, A) = \cap(M / N)_{G/N},$$

где M / N пробегает множество всех максимальных A-допустимых подгрупп из G / N, не содержащих $\mathfrak{I}$-корадикал, с индексом, не делящимся на простые числа из π.

Продолжим равенство

$$\cap(M / N)_{G/N} = (\cap M_G) / N = D_{\pi}^{\mathfrak{I}}(G, A) / N.$$

Из приведенного вытекает справедливость утверждения.

Лемма 3.7. *Пусть группа G имеет группу операторов A, $\mathfrak{I}$ – ступенчатая формация, K — некоторая нормальная подгруппа группы G. Пусть каждая максимальная A-допустимая подгруппа группы G, не содержащая K, содержит $G^{\mathfrak{I}}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $K \cap G^{\mathfrak{I}} \subseteq \Phi(G, A)$;

2) $K / K \cap \Phi(G, A) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{I}}(G / \Phi(G, A))$.

Доказательство. Очевидно, что пересечение $K \cap G^{\mathfrak{I}}$ содержится во всех максимальных A-допустимых подгруппах, как содержащих $G^{\mathfrak{I}}$, так и не содержащих $G^{\mathfrak{I}}$, а следовательно, оно входит в $\Phi(G, A)$.

Пусть R / S — главный фактор группы G, причём $R \subseteq K, S \supseteq K \cap \Phi(G, A)$. Так как

$$R \cap G^{\mathfrak{I}} \subseteq K \cap G^{\mathfrak{I}} \subseteq S,$$

то имеем G-изоморфизм:

$$RG^{\mathfrak{I}} / SG^{\mathfrak{I}} R / (R \cap SG^{\mathfrak{I}}) = R / S(R \cap G^{\mathfrak{I}}) = R / S.$$

Так как $G / SG^{\mathfrak{I}} \in \mathfrak{I}$, то $RG^{\mathfrak{I}} / SG^{\mathfrak{I}}$ $\mathfrak{I}$-централен в $G / SG^{\mathfrak{I}}$, а значит, и в G. Но тогда R / S $\mathfrak{I}$-централен в G. Лемма доказана.

4. Основной результат

В работе [8] Д. Горенштейн исследовал существование силовских A-допустимых подгрупп и установил, что если группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, тогда в ней существует A-допустимая силовская подгруппа и любые две из них сопряжены между собой в G.

Напомним, что группа G обладает свойством C_{π}, если в ней существует холловская π-подгруппа и любые две из них сопряжены между собой.

Теорема 4.1. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и подгруппа $\Phi_{\pi}(G, A)$ обладает свойством C_{π}. Тогда*

$$\Phi_{\pi}(G, A) / O_{\pi}(G) = \Phi(G / O_{\pi}(G), A).$$

Доказательство. Очевидно, что $O_{\pi}(G) \subseteq \Phi_{\pi}(G, A)$. По лемме 3.1 в $\Phi_{\pi}(G, A)$ существует A-допустимая холловская π-подгруппа. Обозначим её через P. Тогда, по обобщенной лемме Фраттини,

$$G = \Phi_{\pi}(G, A) N_G(P)$$

Предположим, что $N_G(P)$ – собственная подгруппа группы G. Тогда в G найдётся максимальная A-допустимая подгруппа M, такая что $\Phi_{\pi}(G, A) \not\subseteq M$

и $N_G(P) \subseteq M$. Ясно, что индекс $N_G(P)$ в G не делится на числа из π. Следовательно, $\Phi_\pi(G,A) \subseteq M$. Получили противоречие. Значит, P – нормальная подгруппа группы G . Отсюда следует, что число $|\Phi_\pi(G,A)/O_\pi(G)|$ не делится на числа из π. Очевидно, что

$$\Phi(G/O_\pi(G),A) \subseteq \Phi_\pi(G,A)/O_\pi(G).$$

Если $\Phi(G/O_\pi(G),A) \subset \Phi_\pi(G,A)/O_\pi(G)$, то в G найдётся максимальная A-допустимая подгруппа K такая, что $O_\pi(G) \subseteq K$ и $K\Phi_\pi(G,A) = G$. Следовательно,

$$|G:K| = |\Phi_\pi(G,A):\Phi_\pi(G,A) \cap K|$$

не делится на числа из π. Отсюда получаем, что $\Phi_\pi(G,A) \subseteq K$, что противоречит определению K. Значит, $\Phi(G/O_\pi(G),A) = \Phi_\pi(G,A)/O_\pi(G)$. Лемма доказана.

Применяя лемму 3.4, получаем

Следствие 4.1.1. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$ и подгруппа $\Phi_\pi(G,A)$ обладает свойством C_π. Тогда факторгруппа $\Phi_\pi(G,A)/O_\pi(G)$ нильпотентна.*

По теореме Силова, в любой группе G подгруппа $\Phi_p(G,A)$ обладает свойством C_p, тогда при $\pi = \{p\}$ имеем следующий результат.

Следствие 4.1.2. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$. Тогда $\Phi_p(G,A)/O_p(G) = \Phi(G/O_p(G),A)$ — нильпотентная факторгруппа.*

Если группа операторов $A=1$, то из теоремы 4.1 вытекает результат В. Дескинс [3].

Теорема 4.2. *Пусть π и τ – различные множества простых чисел и $\pi \cap \tau = \varnothing$. Тогда для любой группы G с группой операторов A такой, что $(|G|,|A|)=1$, справедливо равенство*

$$\Phi_\pi(G,A) \cap \Phi_\tau(G,A) = \Phi(G,A).$$

Доказательство. Очевидно, $\Phi(G,A) \subseteq \Phi_\pi(G,A) \cap \Phi_\tau(G,A)$. Пусть $\Phi(G,A) \subset K = \Phi_\pi(G,A) \cap \Phi_\tau(G,A)$. Тогда в G найдётся максимальная A-допустимая подгруппа M такая, что $G = MK$. Если $|G:M|$ не делится на числа из $\omega = \pi \cup \tau$, то $\Phi_\omega(G,A) \subseteq M$. Следовательно, $KM = M$, что не возможно. Значит, индекс M в G делится одновременно на числа из $\pi \cup \tau$.

Пусть $O_\pi(G)=1$. Тогда ввиду теоремы 4.1 имеем равенство $\Phi_\pi(G,A) = \Phi(G,A)$. Поэтому $K \subseteq M$, что противоречит определению подгруппы K. Значит, $O_\pi(G) \neq 1$. Если $O_\pi(G)M = G$, то $|G:M|$ делится на числа из π. Противоречие. Поэтому $O_\pi(G) \subseteq M$. На основании теоремы 4.1 имеем:

$$\Phi_\pi(G,A)/O_\pi(G) = \Phi_\pi(G/O_\pi(G),A) \subseteq M/O_\pi(G).$$

Отсюда следует, что $\Phi_\pi(G,A) \subseteq M$. Снова пришли к противоречию. Таким образом, остаётся заключить, что

$$\Phi_\pi(G,A) \cap \Phi_\tau(G,A) = \Phi(G,A).$$

Лемма доказана.

Следствие 4.2.1. *Пусть π и τ – различные множества простых чисел и $\pi \cap \tau = \varnothing$. Тогда для любой группы G с группой операторов A такой, что $(|G|,|A|)=1$, подгруппа $\Phi_\pi(G,A) \cap \Phi_\tau(G,A)$ нильпотентна.*

Если $\pi = \{p\}$ и $\tau = \{q\}$, то имеем:

Следствие 4.2.2. *Пусть* p *и* q *– различные простые числа. Тогда для любой группы* G *с группой операторов* A *такой, что* $(|G|,|A|)=1$ *подгруппа* $\Phi_p(G,A)\cap\Phi_q(G,A)=\Phi(G,A)$ *нильпотентна.*

В случае, когда группа операторов единична, получаем

Следствие 4.2.3. *Пусть* π *и* τ *– различные множества простых чисел и* $\pi\cap\tau=\varnothing$. *Тогда для любой группы* G *справедливо*

$$\Phi_\pi(G)\cap\Phi_\tau(G)=\Phi(G).$$

Теорема 4.3. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A, $\mathfrak{I}$ *– ступенчатая формация. Тогда*

$$D^{\mathfrak{I}}(G,A)/\Phi(G,A)=Z_\infty^{\mathfrak{I}}(G/\Phi(G,A)).$$

Доказательство. Так как подгруппа Фраттини фактор-группы $G/\Phi(G,A)$ единична, то, применяя теорему 3.2 и то, что $\Delta^{\mathfrak{I}}(G)\subseteq D^{\mathfrak{I}}(G,A)$, получаем

$$D^{\mathfrak{I}}(G,A)/\Phi(G,A)\supseteq\Delta^{\mathfrak{I}}(G)\Phi(G,A)/\Phi(G,A)\supseteq$$
$$\supseteq\Delta^{\mathfrak{I}}(G/\Phi(G,A))=Z_\infty^{\mathfrak{I}}(G/\Phi(G,A)).$$

Обратное включение выполняется ввиду леммы 3.7. Теорема доказана.

Согласно леммы 3.3 получаем следующее:

Следствие 4.3.1. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A, $\mathfrak{I}$ *– нормально наследственная локальная формация. Тогда* $D^{\mathfrak{I}}(G,A)/\Phi(G,A)\in\mathfrak{I}$.

В случае единичности группы операторов A из теоремы 4.3 получаем соответствующий результат Л.А. Шеметкова [4].

Теорема 4.4. *Пусть* $\mathfrak{I}$ *– формация, группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$. *Если в группе* G *подгруппа* $\Phi_\pi(G,A)$ *обладает свойством* C_π, *то*

$$D_\pi^{\mathfrak{I}}(G,A)/O_\pi(G)=D^{\mathfrak{I}}(G/O_\pi(G),A).$$

Доказательство. Пусть $O_\pi(G)\neq 1$. По теореме 4.1

$$\Phi_\pi(G,A)/O_\pi(G)=\Phi(G/O_\pi(G),A),$$

то теорема для факторгруппы $G/O_\pi(G)$ верна по индукции. Следовательно,

$$D_\pi^{\mathfrak{I}}(G/O_\pi(G),A)/O_\pi(G/O_\pi(G))=D^{\mathfrak{I}}(G/O_\pi(G)/O_\pi(G/O_\pi(G)),A).$$

Так как $O_\pi(G/O_\pi(G))=1$ и

$$D_\pi^{\mathfrak{I}}(G/O_\pi(G),A)=D_\pi^{\mathfrak{I}}(G,A)/O_\pi(G),$$

то

$$D_\pi^{\mathfrak{I}}(G,A)/O_\pi(G)=D^{\mathfrak{I}}(G/O_\pi(G),A).$$

Пусть теперь $O_\pi(G)=1$. Тогда, по теореме, 4.1 $\Phi_\pi(G,A)/O_\pi(G)=\Phi(G/O_\pi(G),A)$. Значит,

$$D_\pi^{\mathfrak{I}}(G,A)\cap G^{\mathfrak{I}}\subseteq\Phi_\pi(G,A)=\Phi(G,A).$$

Пусть K/N – главный фактор группы G, причём,

$$\Phi(G,A)\subseteq N\subseteq K\subseteq D_\pi^{\mathfrak{I}}(G,A).$$

Так как

$$K\cap G^{\mathfrak{I}}\subseteq D_\pi^{\mathfrak{I}}(G,A)\cap G^{\mathfrak{I}}\subseteq\Phi(G,A),$$

то

$$N=N(K\cap G^{\mathfrak{I}})=K\cap NG^{\mathfrak{I}}.$$

Поэтому имеет место следующий изоморфизм:

$$KG^{\mathfrak{I}} / NG^{\mathfrak{I}}K / K \cap NG^{\mathfrak{I}} = K / N(K \cap G^{\mathfrak{I}}) = K / N.$$

Но $G / NG^{\mathfrak{I}} \in \mathfrak{I}$, поэтому главный фактор $KG^{\mathfrak{I}} / NG^{\mathfrak{I}}$ является $\mathfrak{I}$-центральным в G. Следовательно, главный фактор K / N также является $\mathfrak{I}$-центральным в G. Таким образом, $D_{\pi}^{\mathfrak{I}}(G, A) / \Phi(G, A)$ – $\mathfrak{I}$-гиперцентральная нормальная подгруппа группы $G / \Phi(G, A)$. Поэтому

$$D_{\pi}^{\mathfrak{I}}(G, A) / \Phi(G, A) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{I}}(G / \Phi(G, A)).$$

С другой стороны, на основании теоремы 4.3

$$D_{\pi}^{\mathfrak{I}}(G, A) / \Phi(G, A) \supseteq D^{\mathfrak{I}}(G, A) / \Phi(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{I}}(G / \Phi(G, A)).$$

Значит,

$$D_{\pi}^{\mathfrak{I}}(G, A) / \Phi(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{I}}(G / \Phi(G, A)).$$

Следовательно,

$$D_{\pi}^{\mathfrak{I}}(G, A) / \Phi(G, A) = D^{\mathfrak{I}}(G, A) / \Phi(G, A),$$

то есть $D_{\pi}^{\mathfrak{I}}(G, A) = D^{\mathfrak{I}}(G, A)$. Теорема доказана.

Из теоремы 4.4 с помощью следствия 4.3.1 получаем следующее:

Следствие 4.4.1. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{I}$ – локальная нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, а подгруппа $\Phi(G, A)$ обладает свойством C_{π}, тогда $D_{\pi}^{\mathfrak{I}}(G, A) / O_{\pi}(G) \in \mathfrak{I}$.*

В случае, когда $\mathfrak{I}$ – формация всех нильпотентных групп, то из теоремы 4.4 получаем следующее

Следствие 4.4.2. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если подгруппа $\Phi(G, A)$ обладает свойством C_{π}, то $D_{\pi}^{\mathfrak{N}}(G,A)/O_{\pi}(G) \in \mathfrak{N}$.*

Пусть $\pi = \{p\}$, где p – простое число, $D_{p}^{\mathfrak{I}}(G, A)$ – пересечение ядер всех $\mathfrak{I}$-абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп группы G, индексы которых не делятся на данное простое число p.

Ввиду теоремы Силова и теоремы 4.4 справедливы следующие утверждения.

Следствие 4.4.3. *Пусть $\mathfrak{I}$ – формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда*

$$D_{p}^{\mathfrak{I}}(G, A) / O_{p}(G) = D^{\mathfrak{I}}(G / O_{p}(G), A).$$

Следствие 4.4.4. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{I}$ – S_n-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Тогда $D_{p}^{\mathfrak{I}}(G, A) / O_{p}(G) \in \mathfrak{I}$.*

Следствие 4.4.5. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда $D_{p}^{\mathfrak{N}}(G,A)/O_{p}(G) \in \mathfrak{N}$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Frattini, G. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol.1. – P. 281–285.

2. Gaschütz, W. Über die Φ-Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Bd. 58. – S. 160–170.

3. Deskins, W.E. A condition for the solvability of a finite group / W.E. Deskins //

III.J. Math. – 1961. – Vol. 5. – № 2. – P. 306–313.

4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.

5. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Мн. : Беларуская навука, 1997. – 144 с.

6. Carter, R. The F-normalizers of a finite soluble group / R. Carter, T. Hawkes // J. Algebra. – 1967. – V. 5. – № 2 – P. 175–202.

7. Шеметков, Л.А. Ступенчатые формации групп / Л.А. Шеметков // Матем. сб. – 1974. – Т.94. – № 4. – С. 628–648.

8. Gorenshtein, D. Finite groups / D. Gorenshtein. – New York : Harper and Row. 1968. – 572 p.

9. Бородич, Р.В. О пересечениях подгрупп заданных индексов в конечных группах с операторами / Р.В. Бородич // Известия Гомельского государственного ун-та им. Ф. Скорины, 5(14). Вопросы алгебры 18. – 2002. – С. 85–87.

E.N. Borodich, R.V. Borodich, M.V. Selkin. **About Influence of Indexes of the Maximal Subgroups on their Intersection**

The intersections of $\mathfrak{I}$-abnormal maximal subgroup, with crossings on their indexes singled out by subgroup functor are investigated in this work.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 06.06.2011 г.