УДК 524.3-735+535.3+537.6

А.И. Серый

О КОМПТОНОВСКОМ ВРАЩЕНИИ ПРИ ДВИЖЕНИИ ФОТОНОВ ПОД ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ К ЛИНИЯМ ИНДУКЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В релятивистском подходе с использованием электронного пропагатора вычислена разность амплитуд комптоновского рассеяния вперед в квантующем магнитном поле для электрона в основном состоянии и циркулярно поляризованных движущихся под произвольным углом к магнитному полю рентгеновских фотонов с противоположными спиральностями. Получена формула для вычисления угла комптоновского вращения плоскости линейной поляризации фотонов на единицу длины пути в электронном газе с высокой степенью спиновой поляризации электронов.

Введение

Исследования в данной работе проведены по предложению В.Г. Барышевского и В.В. Тихомирова. Эффект комптоновского вращения плоскости поляризации жестких рентгеновских (мягких гамма-) фотонов в отсутствие магнитного поля был теоретически предсказан В.Г. Барышевским и В.Л. Любошицем [1, с. 89] в 1965 г., а в начале 1970-х гг. экспериментально проверен на железе, где степень поляризации электронов не превосходила 8 %, причем наибольшее вращение наблюдалось в жестком рентгеновском диапазоне [1, с. 95]. При наличии сверхсильного магнитного поля (недостижимого пока в земных условиях) степень спиновой поляризации электронов должна быть близкой к 100 %. При этом, однако, появляется возможность резонансного поглощения фотона при переходах электрона между уровнями Ландау. Но при $\hbar\omega >> 2\mu_B B$ либо $\hbar\omega << 2\mu_B B$ (μ_B – магнетон Бора) таким поглощением можно пренебречь. Жесткий рентгеновский и мягкий гамма-диапазон (0,1–5 МэВ) удовлетворяют 2-му случаю при магнитных полях у полюсов магнетаров ($\sim 10^{14} - 10^{15}$ Гс). При этом почти все электроны находятся на нулевом уровне Ландау. Исследуемый эффект может оказывать влияние на спектры излучения сверхплотных замагниченных астрофизических объектов.

Рассмотрим фотон, движущийся в электронном газе под произвольным углом к силовым линиям магнитного поля при указанных выше условиях (частный случай движения параллельно магнитному полю был рассмотрен в [2, с. 41–46]). Рассмотрим амплитуды комптоновского рассеяния для круговой поляризации, которые будут использованы при вычислении угла комптоновского поворота плоскости поляризации фотона.

Применяемый подход использовался для вычисления резонансного сечения эффекта Комптона в магнитном поле [3, с. 323]. В ряде зарубежных публикаций (например, таких, как [4; 5]) либо использовался нерелятивистский подход, либо матричный элемент в общем виде не вычислялся до конца, либо также рассматривался случай резонансного рассеяния. При этом, как и в [3], отмечалось, что в общем виде точное интегрирование до конца произвести не удается. Работ с анализом случая круговой поляризации фотона и упоминанием о комптоновском вращении обнаружить не удалось.

Характеристики фотона, электрона и внешнего магнитного поля

Для постоянного однородного магнитного поля, направленного по оси z, выберем калибровку векторного потенциала [3, с. 320]:

$$A_0 = A_x = A_z = 0,\ A_y = Bx. \tag{1}$$

Пусть p_z – импульс электрона по оси z, m – его масса. Запишем выражение для энергии с учетом квантования Ландау, а волновые функции выразим через биспиноры u_n и функции Эрмита H_n [3, с. 320; 6, с. 120]:

$$\varepsilon_n = \sqrt{\widetilde{m}^2c^4 + p_z^2c^2},\ \Psi(x) = A_n[i(2eBc\hbar)^{1/2}U_n(x) + c^2(m+\sigma\widetilde{m})U_{n-1}(x)\gamma_1]u_n,$$

$$U_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}exp(-\frac{x^2}{2})H_n(x),\ H_n(x) = (-1)^n exp(x^2)\frac{d^n}{dx^n}exp(-x^2),\ n \ge 0,$$

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{2\hbar c\varepsilon_0(\varepsilon_0 + mc^2)\sqrt{eBc\hbar}}} \text{ при } \sigma = -1,\ A_n = \sqrt{\sqrt{\frac{eB}{\hbar c}}\frac{\varepsilon_n + \sigma\widetilde{m}c^2}{4c^4p_z^2\widetilde{m}\varepsilon_n(\widetilde{m}c^2 + \sigma\widetilde{m}c^2)}},$$

$$\mathrm{u_n} = \begin{bmatrix}0 & \sigma\widetilde{m}c^2 - \varepsilon_\mathrm{n} & 0 & p_zc\end{bmatrix}^T,\ \widetilde{m}c^2 = \sqrt{m^2c^4 + 2nBec\hbar}. \tag{2}$$

Здесь и далее T означает транспонирование. Матрицы Дирака γ_k (k = 0, 1, 2, 3) берутся в стандартном представлении. При построении электронного пропагатора будем использовать матрицы [3, с. 320] (i – мнимая единица):

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(1 + i\gamma_2\gamma_1),\ \beta_2 = \frac{1}{2}(1 - i\gamma_2\gamma_1). \tag{3}$$

Не нарушая общности, можно выбрать систему координат, в которой волновой вектор фотона $\vec{k}$ лежит в одной из координатных плоскостей. Пусть θ – угол между $\vec{k}$ и $\vec{B}$. В силу законов сохранения, при упругом рассеянии вперед $\vec{k}$ (и частота фотона ω), а также импульс электрона $\vec{p}$ не меняются, и тогда четырехмерный импульс начального и конечного фотона запишем двумя способами:

$$\hbar k = (\frac{\hbar\omega}{c}, 0, k_y, k_z) \Rightarrow k_y = \frac{\hbar\omega}{c}sin\theta, k_z = \frac{\hbar\omega}{c}cos\theta, \tag{4}$$

$$\hbar k = (\frac{\hbar\omega}{c}, k_x, 0, k_z) \Rightarrow k_x = \frac{\hbar\omega}{c}sin\theta, k_z = \frac{\hbar\omega}{c}cos\theta. \tag{5}$$

Как и в отсутствие магнитного поля, импульсы виртуального промежуточного электрона для R- и S-процесса выражаются (с учетом (4), (5)) по формулам [3, с. 320]:

$$\vec{g} = \vec{p} + \hbar\vec{k} \Rightarrow cg_0 = \varepsilon_0 + \hbar\omega, cg_2 = p_yc + \hbar\omega sin\theta, cg_3 = p_zc + \hbar\omega cos\theta,$$

$$\vec{f} = \vec{p} - \hbar\vec{k} \Rightarrow cf_0 = \varepsilon_0 - \hbar\omega, cf_2 = p_zc - \hbar\omega sin\theta, cf_3 = p_zc - \hbar\omega cos\theta. \tag{6}$$

Согласно [3, с. 320–321], нам также понадобятся переобозначения координат (p_y – y-компонента импульса начального и конечного электрона; k = 1, 2):

$$L(x_k, p) = \sqrt{\frac{eB}{\hbar c}}(x_k + \frac{cp}{eB}), \xi_k = L(x_k, p_y),\ \rho_k = L(x_k, g_2), \eta_k = L(x_k, f_2). \tag{7}$$

В состав электронного пропагатора входят конструкции вида [3, с. 321]:

$$G_B(\lambda,x)=\sqrt{\frac{eB}{\hbar c}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hbar c^2}{c^2\lambda_0^2-\varepsilon_n^2-i\cdot 0}(U_n(x_1)U_n(x_2)(\gamma_0\lambda_0-\gamma_3\lambda_3+mc)\beta_1+$$
$$+\ (1-\delta_{0n})U_{n-1}(x_1)U_{n-1}(x_2)(\gamma_0\lambda_0-\gamma_3\lambda_3+mc)\beta_2+$$
$$+(1-\delta_{0n})i\sqrt{\frac{2neB\hbar}{c}}(U_{n-1}(x_1)U_n(x_2)\gamma_1\beta_1-U_n(x_1)U_{n-1}(x_2)\beta_1\gamma_1). \quad (8)$$

Преобразования матричных элементов

В [3, с. 321] в матричном элементе процесса интегрирование не завершено:

$$\Omega=\frac{-i\alpha(2\pi\hbar)^4 ce_\mu e_\nu'^*}{\hbar VS_0\sqrt{\omega\omega'}}\delta^3(\vec{p}+\hbar\vec{k}-\vec{p}'-\hbar\vec{k}')\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}dx_1dx_2\overline{\Psi}(\xi_1)Q_{\mu\nu}\Psi(\xi_2),\omega=\omega'. \quad (9)$$

Здесь $\alpha=e^2/\hbar c;\omega,\omega',e_\mu,e_\nu'$ – частота, а также компоненты вектора поляризации начального и конечного фотонов соответственно, V – нормировочный объём для фотона, S_0 – нормировочная площадь для электрона в плоскости (*xy*). Кроме того, в силу законов сохранения при рассеянии вперед сделаны упрощения (т.к. при различии между составляющими начального и конечного импульса электрона по оси *y* вместо ξ_2 в [3, с. 321] использовалась обобщенная координата, содержащая p_y' вместо p_y); δ-функция включает в себя *y*-, *z*- и *t*-компоненты. Общее выражение для $Q_{\mu\nu}$, согласно [3, с. 321], при упругом рассеянии на нулевой угол имеет вид (с учетом (6) – (8)):

$$Q_{\mu\nu}=exp(ik_x(x_2-x_1))\gamma_\nu G_B(g,\rho)\gamma_\mu+exp(ik_x(x_1-x_2))\gamma_\mu G_B(f,\eta)\gamma_\nu. \quad (10)$$

Из (6), (7) видно, что первое слагаемое в (10) соответствует *R*-процессу, второе – *S*-процессу. Подставляя (10) при $\mu,\nu=\overline{1,2}$ в (9), можно показать, что это даст ноль при свертке u_0 (2) с комбинациями матриц Дирака в (8), в состав которых не входит β_2 (3). При других сочетаниях μ,ν есть отличные от нуля свертки с комбинациями матриц $\beta_1\gamma_1$ и $\gamma_1\beta_1$, но они взаимно уничтожаются либо из-за противоположных знаков в (8), либо при вычитании в (13). Для слагаемых, содержащих β_2, учтем, что

$$\gamma_1\zeta\gamma_2=-\gamma_2\zeta\gamma_1,\ \zeta=\gamma_0\beta_2,\gamma_3\beta_2,\beta_2. \quad (11)$$

При выборе формул (4) в (10) исчезают мнимые экспоненты, а при выборе (5), согласно (6), (7), $\rho_k=\eta_k=\xi_k,\ k=\overline{1,2}$. Т.е. интегрировать в (9) можно по-разному, в каждом случае со своими упрощениями. Приведем рассуждения для первого случая, т.е. когда фотон движется в плоскости (*yz*) (во втором конечный результат такой же).

В случае чистого состояния (т.е. с определенным импульсом и поляризацией) [7, с. 44] фотон полностью поляризован перпендикулярно направлению распространения [7, с. 47]. При записи компонент вектора поляризации для кругового случая имеет место некоторый произвол (сравни [1, с. 90; 7, с. 43; 8, с. 168]). Выбирая правую (+) или левую (–) круговую поляризацию и руководствуясь общими соображениями [9, с. 163], согласно [8, с. 168], запишем (в 3-мерной форме нулевая компонента опускается):

$$e_{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[0 \quad \mp i \quad cos\theta \quad -sin\theta\right]^T. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (9), с учетом (11) найдем разность матричных элементов:

$$\frac{\Omega_{(+)} - \Omega_{(-)}}{2c\alpha(2\pi\hbar)^4} = \frac{\delta^3(\vec{p} + \hbar\vec{k} - \vec{p}' - \hbar\vec{k}')cos\theta}{\hbar V S_0 \omega}\chi,\ \chi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 \overline{\Psi}(\xi_1)\widetilde{Q}_{21}\Psi(\xi_2). \tag{13}$$

Здесь $\widetilde{Q}_{21}$ отличается от Q_{21} тем, что в (8) (при подстановке в (10)) оставлены только слагаемые, содержащие β_2. Для основного состояния начального и конечного электрона выражения для подынтегральных волновых функций в (13) берутся из (2) при $n = 0$. Полагая в (10) $k_x = 0$, с учетом (8) и (11) распишем интеграл в (13):

$$\chi = cA_0^2(\hbar cBe)^{3/2}\sum_{n=1}^{\infty}(J_n(g)I_{n-1}^2(\rho)\Lambda(g) - J_n(f)I_{n-1}^2(\eta)\Lambda(f)),$$

$$J_n(\lambda) = (c^2\lambda_0^2 - \varepsilon_n^2 - i\cdot 0)^{-1}, \Lambda(\lambda) = \Gamma_0\lambda_0 - \Gamma_3\lambda_3 + \Gamma mc, \tag{14}$$

$$\Gamma_0 = \overline{u}_0\gamma_1\gamma_0\beta_2\gamma_2 u_0 = -2i\varepsilon_0(mc^2 + \varepsilon_0), \Gamma_3 = \overline{u}_0\gamma_1\gamma_3\beta_2\gamma_2 u_0 = -2ip_z c(mc^2 + \varepsilon_0),$$

$$\Gamma = \overline{u}_0\gamma_1\beta_2\gamma_2 u_0 = 2imc^2(mc^2 + \varepsilon_0). \tag{15}$$

Для вычисления оставшихся интегралов введем обозначения:

$$\tau = \sqrt{\frac{Be}{\hbar c}}(x_k + \frac{cp_y}{eB}) + \phi,\ \phi = \frac{\hbar\omega\sin\theta}{\sqrt{\hbar cBe}}, k = \overline{1, 2}. \tag{16}$$

Учитывая (2), (6) и (7), путем несложных преобразований получаем:

$$I_{n-1}(\rho) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\xi_k^2)U_{n-1}(\rho_k)dx_k = \sqrt{\frac{\hbar c}{2Be}}\exp(-\frac{\phi^2}{2})\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\tau^2 + \phi\tau)H_{n-1}(\tau)d\tau =$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar c}{2Be}}\phi^{n-1}\exp(-\frac{\phi^2}{2})\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\tau^2 + \phi\tau)d\tau = \sqrt{\frac{\pi\hbar c}{2Be}}\phi^{n-1}\exp(-\frac{\phi^2}{4}). \tag{17}$$

При вычислении интеграла $I_{n-1}(\eta)$ необходимо взять ϕ с противоположным знаком, но с учетом (17) при возведении в квадрат конечный результат не изменится:

$$I_{n-1}^2(\rho) = I_{n-1}^2(\eta) = \frac{\pi\hbar c}{2Be}\phi^{2n-2}\exp(-\frac{\phi^2}{2}). \tag{18}$$

Вычисление угла поворота плоскости линейной поляризации

Запишем формулу для угла комптоновского поворота плоскости линейной поляризации жесткого рентгеновского фотона на единицу длины пути [1, с. 91]:

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{2\pi n_e c}{\omega}(\vec{q}\cdot\vec{n})\,\mathrm{Re}W_2(\omega), \tag{19}$$

где n_e – концентрация электронов, $\vec{q}$ – вектор их спиновой поляризации, ω – частота фотона, $\vec{n} = \vec{k}/|\vec{k}|$. Наша задача сводится к нахождению $ReW_2(\omega)$.

Обозначая через F амплитуду комптоновского рассеяния вперед, запишем соотношения для случаев правой (+) и левой (–) круговой поляризации фотона [1, с. 90]:

$$F_{(\pm)} = W_1(\omega) \mp W_2(\omega)(\vec{p}\cdot\vec{n}),\ 2\,\mathrm{Re}W_2(\omega)(\vec{q}\cdot\vec{n}) = \mathrm{Re}(F_{(-)} - F_{(+)}) \equiv 2\tilde{W}_2(\omega). \quad (20)$$

Остается установить связь между $F_{(\pm)}$ в (20) и $\Omega_{(\pm)}$ в (9), (13). В разных источниках одни и те же величины обозначаются по-разному, в чем можно убедиться, сопоставляя, например, формулы в [1, с. 15; 7, с. 314] и [1, с. 24; 7, с. 315], где присутствует одна и та же амплитуда, в роли которой в нашем случае может выступать F. С учетом этого обстоятельства, используя формулы в [7, с. 281, 283, 314], запишем аналог выражения (9) в отсутствие магнитного поля:

$$\Omega = 2\pi\varepsilon \frac{i(2\pi\hbar)^4 c\hbar F}{V^2\sqrt{\varepsilon_0\hbar\omega\varepsilon_0'\hbar\omega'}}\delta^3(\vec{p} + \hbar\vec{k} - \vec{p}' - \hbar\vec{k}')\delta(p_x + \hbar k_x - p_x' - \hbar k_x'). \quad (21)$$

При этом ε – полная энергия в системе центра масс, ε_0' – энергия конечного электрона. При этом в нашем случае, согласно (2), с учетом законов сохранения

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \hbar\omega,\ \varepsilon_0 = (m^2c^4 + p_z^2c^2)^{1/2} = \varepsilon_0',\ \omega' = \omega. \quad (22)$$

Поскольку из (21) можно выразить F через Ω, то в присутствии магнитного поля выражение для F меняется, поскольку в левую часть (21) подставляется правая часть (9). Сделаем в (21) для x-компоненты δ-функции замену по аналогии с [7, с. 282]:

$$\delta(p_x + \hbar k_x - p_x' - \hbar k_x') \to \frac{L_0}{2\pi\hbar} = \frac{V}{2\pi\hbar S_0}. \quad (23)$$

После этого с учетом (13) и (20) получаем:

$$\tilde{W}_2(\omega) = \frac{\pi\hbar c^2\alpha\cos\theta}{2(\varepsilon_0 + mc^2)(\varepsilon_0 + \hbar\omega)}\exp\left(-\frac{\hbar\omega^2\sin^2\theta}{2cBe}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\hbar\omega^2\sin^2\theta}{cBe}\right)^{n-1}(\Xi_n(g) - \Xi_n(f)),$$
$$\Xi_n(\lambda) = \frac{\lambda_0\varepsilon_0(mc^2 + \varepsilon_0) - \lambda_3 p_z c(mc^2 + \varepsilon_0) - m^2c^3(mc^2 + \varepsilon_0)}{c^2\lambda_0^2 - \varepsilon_n^2 - i\cdot 0}. \quad (24)$$

При движении фотона параллельно силовым линиям магнитного поля $\theta = 0$, и тогда косинус и экспонента в (24) заменяются на единицу, а в сумме остается одно слагаемое ($n = 1$), что согласуется с результатом, полученным в [2, с. 45]. В дальнейшем предполагается вычисление бесконечного ряда и усреднение по импульсу p_z. Кроме того, открытым остается вопрос о конкуренции данного эффекта с расщеплением и слиянием фотонов в сверхсильных магнитных полях [7, с. 637–643; 10, с. 283–284].

Заключение

В релятивистском подходе в рамках квантовой электродинамики вычислена разность амплитуд комптоновского рассеяния вперед в сверхсильном магнитном поле для электрона в основном состоянии и циркулярно поляризованных движущихся под произвольным углом к силовым линиям магнитного поля жестких рентгеновских фотонов с противоположными спиральностями. Получена соответствующая формула для вычисления угла комптоновского вращения плоскости поляризации фотонов на единицу длины пути в электронном газе с высокой степенью поляризации электронов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барышевский, В.Г. Ядерная оптика поляризованных сред / В.Г. Барышевский. – М. : Энергоатомиздат, 1995. – 320 с.
2. Серый, А.И. К вопросу о комптоновском вращении плоскости поляризации рентгеновских фотонов в магнитном поле. / А.И. Серый // Веснік Брэсцкага ўн-та. Сер. 4 «Фізіка. Матэматыка» – 2011. – № 1. – С. 41–46.
3. Фомин, П.И. Резонансное комптоновское рассеяние во внешнем магнитном поле / П.И. Фомин, Р.И. Холодов // ЖЭТФ. – 2000. – Т.117, вып. 2. – С. 319–325.
4. Daugherty, J.K. Compton Scattering in Strong Magnetic Fields / J.K. Daugherty, A.K. Harding // The Astrophysical Journal. – 1986. – Vol. 309. – P. 362–371.
5. Bussard, R.W. One- and Two-Photon Compton Scattering in Strong Magnetic Fields / R.W. Bussard, S.B. Alexander, P. Meszaros // Phys. Rev. D – 1986. – Vol 34, № 2. – P. 440–451.
6. Русак, В.Н. Математическая физика / В.Н. Русак // Мн. : Дизайн ПРО, 1998. – 208 с.
7. Берестецкий, В.Б. Квантовая электродинамика (Серия «Теоретическая физика», том IV) / В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. – М. : Наука, 1980. – 704 с.
8. Andreev, V.V. Invariant amplitudes of real Compton scattering / V.V. Andreev, A.M. Seytliev, A.A. Yuchko // Actual Problems of Microworld Physics: in 2 Vol. : Proceedings of International School-Seminar, Gomel, Belarus, July 15–26, 2009 – Dubna, 2011. – Vol. 2. – 189 p. – P. 167 – 172.
9. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: учеб пособ. для вузов. В 10 т. Т. II. Теория поля. – 8-е изд., стереот. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 536 с.
10. Thompson, C. The soft gamma repeaters as very strong magnetized neutron stars – I. Radiative mechanism for outbursts / C. Thompson and R.C. Duncan // Mon. Nat. R. Astron. Soc. – 1995. – 275. – P. 255–300.

***A.I. Sery.* On Compton Rotation at the Motion of Photons at Arbitrary Angle to Magnetic Field Strength Lines**

In relativistic approach using electronic propagator the difference of Compton forward scattering amplitudes in quantizing magnetic field is calculated for electron in the ground state and circularly polarized hard X-photons moving at arbitrary angle to magnetic field with opposite helicities. A formula is obtained for the calculation of Compton rotation angle of the plane of linear polarization of photons per unit path in electron gas with high degree of spin polarization of electrons.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 21.10.2011 г.