УДК 517

Н.П. Семенчук

ФОРМУЛЫ ТИПА ВОРОНОВСКОЙ ДЛЯ ОБОБЩЁННЫХ СРЕДНИХ СОПРЯЖЁННОГО ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

В работе найдена асимптотическая формула типа Вороновской для обобщенных средних сопряженного интеграла Фурье дифференцируемых нечетное число раз функций в классе L(-∞, +∞).Полученные результаты могут быть использованы при разработке аппроксимационных методов решения дифференциальных и интегральных уравнений, а также их систем, как линейных, так и нелинейных.

В теории суммирования рядов и интегралов Фурье одной из важных задач является нахождение главного члена уклонения функций определённого класса от её линейных средних (операторов приближения) с равномерной оценкой остатка относительно всего класса указанных функций. Впервые такую задачу решила советский математик Е.В. Вороновская в 1932 году, приближая дважды непрерывно-дифференцируемые на отрезке [0,1] функции их полиномами Бернштейна. Она показала, что

$$f(x)-B_n(f,x)=-\frac{1}{2}\frac{x(1-x)}{n}f''(x)+0\left(\frac{1}{n}\right). \tag{1}$$

В дальнейшем результат Вороновской обобщался многими математиками (С.Н. Бернштейн, И.П. Натансон, П.П. Коровкин, А.В. Ефимов, А.К. Покало и др.). В исследованиях этих авторов операторы приближения в основном были построены на базе рядов Фурье.

В нашей работе найдены формулы типа Вороновской для обобщения средних сопряжённого интеграла Фурье, дифференцируемых нечётное число раз функций.

Вначале рассмотрим приближение функций суммами Фейера. Доказана теорема.

Теорема 1. Если $f(x)\in L(-\infty,+\infty)$ и ограничена на числовой прямой, то

$$F_\sigma(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda}^{+\infty}\frac{f\left(x-\frac{t}{\sigma}\right)-2f(x)+f\left(x+\frac{t}{\sigma}\right)}{t^2}dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}:f\right)\right), \tag{1}$$

где

$$F_\sigma(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\sigma}\left(1-\frac{u}{\sigma}\right)du\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)dt \tag{2}$$

есть $(C, 1)$ – средние действительного интеграла Фурье (средние Фейера);

$$\omega_2\left(\frac{1}{\sigma};f\right)=\sup_{|t|\le\frac{1}{\sigma}}\max_{x\in R}\left|f(x-t)-2f(x)+f(x+t)\right| - \tag{3}$$

модули гладкости второго порядка функции $f; \lambda>0$ – произвольная действительная постоянная.

<u>Доказательство</u>. Изменяя порядок интегрирования в повторном интеграле (2) (используем теорему Фубини), получим

$$F_\sigma(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\frac{2\sin^2\frac{\sigma(x-t)}{2}}{\sigma(x-t)^2}dt=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{x}+\int_{x}^{+\infty}\right)=$$

$$=I_1+I_2=\begin{bmatrix} I_1 : \textit{подстановка } t:=x-t \\ I_2 : \textit{подстановка } (-t):=x-t \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(f(x-t)+f(x+t)\right)\frac{2\sin^2\frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2}d\ . \tag{4}$$

Используя известную формулу

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 mx}{x^2}dx=|m|\frac{\pi}{2}, \tag{5}$$

получим:

$$-f(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}2f(x)\frac{2\sin^2\frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2}dt. \tag{6}$$

Тогда

$$F_\sigma(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\Phi_x(t)\frac{2\sin^2\frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2}dt, \tag{7}$$

где

$$\Phi_x(t)=f(x-t)-2f(x)+f(x+t). \tag{8}$$

Представим (7) в следующем виде:

$$F_\sigma(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\Phi_x(t)\frac{2\sin^2\frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2}dt+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty}\frac{\Phi_x(t)}{\sigma t^2}dt-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty}\frac{\Phi_x(t)}{\sigma t^2}\cos\sigma t dt=I_1+I_2-I_3. \tag{9}$$

Оценим I_1 и I_3.

$$|I_1|\le\frac{1}{\pi\sigma}\int_0^{\frac{\pi}{\sigma}}|\Phi_x(t)|\frac{2\sin^2\frac{\sigma t}{2}}{t^2}dt\le C\omega_2\left(\frac{1}{\sigma};f\right),$$

то есть

$$I_1=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma};f\right)\right). \tag{10}$$

Для оценки I_3 воспользуемся тем, что функция $f(x)$ ограничена на числовой прямой. Тогда, по теореме С.Н. Бернштейна (например, [1, с. 243]), существует целая функция $g_\sigma(x)\in B_\sigma$ (B_σ – класс целых функций $g_\sigma(x)$ экспоненциального типа с показателем $\le\sigma$, для которых $\sup_{x\in R}|g_\sigma(x)|<+\infty$), наименее уклоняющаяся от $f(x)$ на R. Такую функцию обозначим через $g_\sigma(f;x)$. Тогда

$$A_\sigma(f) := \sup_{x\in R}\left|f(x) - g_\sigma(f;x)\right| = \inf_{g_\sigma\in B_\sigma}\sup_{x\in R}\left|f(x) - g_\sigma(x)\right| \tag{11}$$

есть наилучшее приближение функции $f(x)$ на числовой прямой посредством функций из класса B_σ. Будем иметь оценку:

$$\left|\Phi_x(t) - g_\sigma(f;x_1t)\right| = \left|\left(f(x-t) - 2f(x) + f(x+t)\right) - \right.$$
$$\left. -\left(g_\sigma(f;x-t) - 2g_\sigma(f;x) + g_\sigma(f;x+t)\right)\right| \le CA_\sigma(f). \tag{12}$$

Известно, (например, [1, с. 262]), что для ограниченной на R функции $f(x)$ при $\sigma > 0$ будет

$$A_\sigma(f) \le C_2\omega_2\left(f, \frac{1}{\sigma}\right). \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует, что

$$\Phi_x(t) = g_\sigma(f;x_1t) + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma};\ f\right)\right). \tag{14}$$

С учётом (14) преобразуем I_3:

$$I_3 = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty}\frac{g_\sigma(f;\ x_1t)}{\sigma t^2}\cos\sigma t dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma};\ f\right)\right) = I_3^1 + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma};\ f\right)\right). \tag{15}$$

В интеграле I_3' проведем интегрирование по частям два раза $(dv = \cos\sigma\ tdt)$, получим:

$$I_3' = \frac{g_\sigma'\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)}{\pi^3\sigma} - \frac{2g_\sigma\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)}{\pi^4} - I_4, \tag{16}$$

где

$$I_4 = \frac{1}{\pi\sigma^3}\int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{\infty}\left(\frac{g_\sigma''}{t^2} - \frac{4g_\sigma'}{t^3} + \frac{6g_\sigma}{t^4}\right)\cos\sigma\ tdt\ . \tag{17}$$

Дальше воспользуемся неравенством из [2]

$$\sup_{x\in R}\left|g_\sigma''(f;\ x)\right| \le \frac{\sigma^2}{2^2}\omega_2\left(g_\sigma, \frac{\pi}{\sigma}\right) \le C_2\sigma^2\omega_2\left(g_\sigma, \frac{1}{\sigma}\right). \tag{18}$$

Учитывая (11) и (13), получим:

$$\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}, g_\sigma\right) = \omega_2\left(\frac{1}{\sigma}, g_\sigma - f + f\right) \le C_2'\omega_2\left(\frac{1}{\sigma},\ f\right).$$

Значит,

$$\left|g_\sigma''(f;\ x)\right| \le C\sigma^2\omega_2\left(\frac{1}{\sigma},\ f\right). \tag{19}$$

Дальше воспользуемся теоремой Лагранжа о конечных приращениях, получим:

$$\left|g_\sigma'\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)\right| \le C\sigma\omega_2\left(\frac{1}{\sigma},\ f\right). \tag{20}$$

Тогда

$$\frac{g'_{\sigma}\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)}{\pi^3\sigma} = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma};\ f\right)\right). \quad (21)$$

Аналогично, применяя дважды формулу Лагранжа и оценку (19), получим:

$$-\frac{2g_{\sigma}\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)}{\pi^4} = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma};\ f\right)\right). \quad (22)$$

Дальше оценим I_4.

Применяя формулу Лагранжа, будем иметь:

$$g_{\sigma}(f;\, x,\, t) = t^2(\theta_2 - \theta_1)\, g''_{\sigma}(f,\, x + \theta\, t), \quad (23)$$

где $\theta_1, \theta_2, \theta \in (0, 1)$.

Также

$$g'_{\sigma} = 2tg''_{\sigma}(f;\, x + \theta\, t) \quad (24)$$

и

$$g''_{\sigma} = g''_{\sigma}(f;\, x + t) + g''_{\sigma}(f;\, x - t). \quad (25)$$

Из (23) – (25) и (19) имеем:

$$\left|\frac{g''_{\sigma}}{t^2} - \frac{4g'_{\sigma}}{t^3} + \frac{6g_{\sigma}}{t^4}\right| \le \frac{C\sigma^2\omega_2\left(\frac{1}{\sigma};\ f\right)}{t^2}. \quad (26)$$

Тогда

$$I_4 = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma};\ f\right)\right). \quad (27)$$

Из (15), (16), (21), (22) и (27) следует, что

$$I_3 = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma};\ f\right)\right). \quad (28)$$

С учетом (28) и (10) будем иметь:

$$F_{\sigma}(x) - f(x) = I_1 + I_2 - I_3 = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty}\frac{\Phi_x(t)}{\sigma\, t^2}dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma};\ f\right)\right). \quad (29)$$

Возьмем $\forall\lambda \in R_+$. Из оценки

$$\max_x|\Phi_x(t)| \le \sup_{|t|\le\max\left\{\frac{\lambda}{\sigma},\, \frac{\pi}{\sigma}\right\}}\max|\Phi_x(t)| = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma};\ f\right)\right) \quad (30)$$

получим:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\lambda}{\sigma}}^{\frac{\pi}{\sigma}}\frac{\Phi_x(t)}{\sigma\, t^2}dt\right| \le \frac{1}{\pi\sigma}\int_{\frac{\lambda}{\sigma}}^{\frac{\pi}{\sigma}}\frac{|\Phi_x(t)|}{t^2}dt = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma};\ f\right)\right). \quad (31)$$

Из (29) и (31) окончательно получим справедливость заключения теоремы 1.

Следствие 1. Если дополнительно к условиям теоремы 1 потребовать, чтобы $f(x) \in lip_M\alpha,\ \ 0 < \alpha \le 1$, то из (1) и (3) видно, что:

$$F_\sigma(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_\lambda^{+\infty} \frac{f\left(x - \frac{t}{\sigma}\right) - 2f(x) + f\left(x + \frac{t}{\sigma}\right)}{t^2} dt + O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right), \tag{32}$$

причем, если $0 < \alpha < 1$, то и интеграл в (32) также имеет порядок $O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$, то есть

$$F_\sigma(x) - f(x) = O\left(\frac{1}{\sigma^\alpha}\right). \tag{33}$$

Обобщим указанные выше результаты для обобщённых средних сопряженного интеграла Фурье.

Обозначим через $W^{(2\rho+1)}D$ (ρ – фиксированное целое неотрицательное число) класс абсолютно интегрируемых на числовой прямой функций вместе со своими существующими на R $(2\rho+1)$ – первыми производными, причем для любых $t \in R$ справедливо неравенство

$$\left| f^{(2\rho+1)}(t) \right| \le D < \infty. \tag{34}$$

Очевидно, что все производные до порядка 2ρ включительно вместе с самой функцией $f(t)$ принадлежат классу Липшица порядка $\alpha = 1$ (при доказательстве воспользоваться формулой Лагранжа на любом отрезке $[a, b] \subset R$).

Построим обобщенные средние сопряженного интеграла Фурье с помощью формулы:

$$\overline{U}_\sigma(f; x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\sigma K(\sigma, u)du \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin u(x-t)dt, \tag{35}$$

где

$$K(\sigma, u) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(\sigma)\left(\frac{u}{\sigma}\right)^m \tag{36}$$

есть абсолютно сходящийся функциональный ряд (сумма) по степеням $\frac{u}{\sigma}$, $u \in [0, \sigma]$, $\sigma > 0$.

Коэффициенты ряда (суммы) (36) такие, что ряд

$$A'_\sigma := a_0(\sigma) + \sum_{m=1}^{\infty} m\left|a_m(\sigma)\right| \tag{37}$$

сходится.

Доказана теорема.

Теорема 2. Если $f \in W^{(2\rho+1)}D$, то

$$\overline{U}_\sigma(f; x) = \sum_{\nu=0}^{\rho}(-1)^\nu \overline{f^{(2\nu)}}(x)\frac{a_{2\nu}(\sigma)}{\sigma^{2\nu}} + \sum_{\nu=1}^{\rho+1}(-1)^{\nu+1} f^{(2\nu-1)}(x)\frac{a_{2\nu-1}(\sigma)}{\sigma^{2\nu-1}} +$$

$$+ \frac{(-1)^\rho}{\sigma^{2\rho+1}} j_{\sigma,\rho}(x)\sum_{m=0}^{\infty} a_m(\sigma) + \frac{1}{\sigma^{2\rho+1}}\left(O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f^{(2\rho+1)}\right)\right) + B_{\sigma,\rho}\right)A'_\sigma,$$

где

$$B_{\sigma,\,\rho}=O(1);\;\; j_{\sigma,\,\rho}(x):=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\Phi_{x}^{(2\rho+1)}(t)\frac{\sin\sigma t}{t}dt\,;$$

$$\Phi_{x}^{(2\rho+1)}(t):=f^{(2\rho+1)}(x-t)-2f^{(2\rho+1)}(x)+f^{(2\rho+1)}(x+t);$$

$$\overline{f^{(2\nu)}}(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}u^{2\nu}du\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\left(u(x-t)+\frac{2\nu+1}{2}\pi\right)dt\,;$$

$$f^{(2\nu-1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}u^{2\nu-1}du\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\left(u(x-t)+\frac{(2\nu-1)\pi}{2}\right)dt\,.$$

Замечание 1. Если $f\in W^{(2\rho+1)}D$ и $f^{(2\rho+1)}\in Lip_{M}\alpha$ ($Lip_{M}\alpha$ – класс Липшица), где $\alpha\in(0,1)$, то $B_{\sigma,\,\rho}=O\left(\frac{1}{\sigma^{2}}\right)$ и $O\left(\omega_{2}\left(\frac{1}{\sigma};\,f^{(2\rho+1)}\right)\right)=O\left(\frac{1}{\sigma^{2}}\right)$.

Замечание 2. Для методов суммирования, у которых $\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_{m}(\sigma)=0$, например: типичных средних (средних Зигмунда), у которых $K(\sigma,u)=1-\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{s}$, слагаемое с множителем $j_{\sigma,\,\rho}(x)$ будет в формуле (38) отсутствовать.

И в этом случае, например, при выполнении условий замечания 1 (если $s>2\rho+1$) формула (38) примет вид

$$\overline{U_{\sigma}}(f;x)=\overline{f(x)}+O\left(\frac{1}{\sigma^{2\rho+1+\alpha}}\right). \tag{39}$$

Доказательство теоремы 2.

Проводим преобразование правой части равенства (35), используя интегрирование по частям, теорему Фубини при изменении порядка интегрирования, известные, а также доказываемые в работе тождества и оценки. В результате указанных преобразований получим выражения, содержащие в качестве компонентов множители (слагаемые), для которых применяют оценки вида (1) (теорема 1).

Введенный формулой (36) класс методов суммирования интегралов является регулярным и включает в себя многие известные классические методы суммирования (средние Фейера, метод типичных средних – средних Зигмунда, средние Рисса, метод Бернштейна – Рогозинского и др.).

Полученные в работе результаты исследований могут быть использованы при разработке аппроксимационных методов решения дифференциальных и интегральных уравнений, а также их систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов, И.И. Экстремальные свойства целых функций конечной степени / И.И. Ибрагимов. – Баку, 1962.

2. Никольский, С.М. Обобщение одного неравенства С.Н. Бернштейна / С.М. Никольский // Докл. АН СССР, 60. – 1948. – № 9. – С. 1507–1510.

***N.P. Semenchuk.* Formulas of Voronovskaya's Type for Generalized Average of Conjugate Fourie's Integral**

We established asymptotic formulas of Voronovskaya's type for generalized average of conjugate Fourie's integral of odd times differentiated functions in the class L(-∞, +∞).The results can be used at development approximate methods of the decision differential and integral equations, as well as their systems, as linear so nonlinear.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 08.10.2012