УДК 512.542

Н.В. Савельева

О ДОСТАТОЧНЫХ ПРИЗНАКАХ МАКСИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ КЛАССОВ ФИТТИНГА КОНЕЧНЫХ ЧАСТИЧНО РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

В настоящей работе в терминах индексов инъекторов установлены достаточные признаки локальной нормальности и максимальности (по включению, по сильному вложению) класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ в классе Фиттинга $\mathfrak{Y}$ конечных частично разрешимых групп – групп, у которых факторгруппы по $\mathfrak{X}$-радикалу являются разрешимыми или $\pi(\mathfrak{X})$-разрешимыми группами. В частности, доказано, что если для классов Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ таких, что $\mathfrak{X}\subset\mathfrak{Y}$, причем $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}$ или $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{X})}$, где $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{X})}$ соответственно обозначают класс всех конечных разрешимых групп и класс всех конечных $\pi(\mathfrak{X})$-разрешимых групп, найдется простое число p из множества всех простых чисел (в случае $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}$) или из множества $\pi(\mathfrak{X})$ (в случае $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{X})}$) такое, что в каждой группе $G\in\mathfrak{Y}$ ее $\mathfrak{X}$-инъектор имеет в ней индекс 1 или p, то класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ нормален и максимален по включению в классе $\mathfrak{Y}$. Если вместе с названными условиями дополнительно имеет место сильное вложение класса $\mathfrak{X}$ в класс $\mathfrak{Y}$, то класс $\mathfrak{X}$ является максимальным по сильному вложению в классе $\mathfrak{Y}$.

Введение

Исследование максимальных (по включению, по сильному вложению) классов Фиттинга было инициировано в середине 70-х годов прошлого столетия и было обусловлено прежде всего изящным результатом Косси [1] о том, что каждый максимальный по включению подкласс Фиттинга класса $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп является нормальным в $\mathfrak{S}$. Напомним, что понятие нормального класса Фиттинга было введено Блессенолем и Гашюцом в 1970 году [2] как класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ такого, что в каждой конечной разрешимой группе ее $\mathfrak{F}$-инъекторы являются в ней нормальными подгруппами.

В дальнейшем был получен ряд глубоких и содержательных результатов (например, [3–5] или IX.4 [6]) о свойствах максимальных классов Фиттинга и их взаимосвязи с другими известными семействами классов Фиттинга, в частности, с локальными и с нормальными классами Фиттинга. Особый интерес к этому направлению подчеркивают также вопросы 9.18 и 13.50 о существовании максимальных подклассов Фиттинга, сформулированные в Коуровской тетради [7] соответственно Лаушем и А.Н. Скибой. Указанные вопросы были впоследствии решены в работах Н.Т. Воробьева [8], Н.В. Савельевой и Н.Т. Воробьева [9].

Вместе с тем богатство приложений свойств максимальных классов Фиттинга ставило задачу отыскания признаков максимальности одного класса Фиттинга в другом. Как отмечено Дерком и Хоуксом [6, с. 735], проблема нахождения критерия максимальности в общем случае является одной из трудных в теории классов Фиттинга. До настоящего времени данная проблема остается открытой. В разрешимом случае она была решена в работах [3; 9]. При этом доказательство достаточного признака максимальности посредством инъекторов в работе [3] стало возможным благодаря основополагающей теореме Фишера – Гашюца – Хартли [10] о существовании и сопряженности инъекторов в любой конечной разрешимой группе. Расширение результата Брайса – Косси [3] о достаточном признаке максимальности класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ в классе Фиттинга $\mathfrak{Y}$ на случай частично разрешимых групп было получено в работе [11] с использованием результата В.Г. Сементовского [12] о том, что в любой группе G такой, что факторгруппа G по ее $\mathfrak{X}$-радикалу разрешима, существуют $\mathfrak{X}$-инъекторы и любые два из них сопряжены. В связи с этим, учитывая результат Го Вэньбиня [13] о существовании и сопряженности инъекторов в группах из класса $\mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{X})}$, где $\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{X})}$ обозначает класс всех конечных $\pi(\mathfrak{X})$-разрешимых групп, актуален вопрос о дальнейшем развитии указанного выше достаточного признака максимальности Брайса–Косси [3], в том числе и для максимальных по сильному вложению классов Фиттинга. Реализации этой задачи и посвящена настоящая работа. Основной ее результат – установление посредством свойств инъекторов достаточных признаков максимальности (по включению, по сильному вложению) класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ в классе Фиттинга $\mathfrak{Y}$ конечных групп таких, что их факторгруппы по $\mathfrak{X}$-радикалам разрешимы или являются $p(\mathfrak{X})$-разрешимыми группами.

Все рассматриваемые группы считаются конечными. В определениях и обозначениях мы следуем [6].

1. Предварительные сведения

Приведем вначале некоторые известные понятия и результаты теории классов групп, которые мы будем использовать.

Классом групп называется множество групп, содержащее наряду с каждой своей группой и все изоморфные ей группы. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если каждая нормальная подгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$, и из того, что нормальные подгруппы M и N принадлежат $\mathfrak{F}$, всегда следует, что их произведение MN принадлежит $\mathfrak{F}$. Из определения класса Фиттинга вытекает понятие $\mathfrak{F}$-радикала. Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ не пуст, то подгруппу $G_{\mathfrak{F}}$ группы G называют ее $\mathfrak{F}$-радикалом, если она является наибольшей из нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G.

Известное свойство радикалов характеризует следующая лемма.

Лемма 1.1 (см. IX.1.1 (a) [6]). *Если $\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга и N – субнормальная подгруппа группы G, то $N_{\mathfrak{X}}=N\cap G_{\mathfrak{X}}$.*

Понятие радикала в теории классов Фиттинга является ключевым. В частности, в терминах радикалов определяются нормальные классы Фиттинга и понятие произведения классов Фиттинга.

Непустой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется нормальным в классе Фиттинга $\mathfrak{X}$ (этот факт обозначается $\mathfrak{F}\trianglelefteq\mathfrak{X}$), если $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}$ и для любой $\mathfrak{X}$-группы G ее $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы G.

Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга, то их произведение – это класс групп $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}=(G : G/G_{\mathfrak{X}}\in\mathfrak{Y})$. В частности, $\mathfrak{X}\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{X})}$ – классы всех тех групп, факторгруппы по $\mathfrak{X}$-радикалу которых разрешимы и $\pi(\mathfrak{X})$-разрешимы соответственно.

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется гомоморфом, если каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что справедливы следующие свойства произведений классов Фиттинга, которые мы приводим в качестве леммы.

Лемма 1.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ не пуст, то $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$;

2) если $\mathfrak{Y}$ – класс Фиттинга, являющийся гомоморфом, и $\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга, то $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$.

Наряду с радикалами важным инструментом в доказательствах теорем и самостоятельными объектами для изучения в теории классов Фиттинга являются инъекторы. Напомним, что подгруппа M группы G называется $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппой G, если для любой подгруппы $H\in\mathfrak{X}$ такой, что $M\subseteq H\subseteq G$, следует, что $H\in\{M, G\}$. Подгруппу V группы G называют $\mathfrak{X}$-инъектором G, если $V\cap N$ является $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппой группы N для каждой субнормальной подгруппы N группы G. Согласно известной теореме Гашюца – Фишера – Хартли [10], для каждого класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ в любой разрешимой группе $\mathfrak{X}$-инъекторы существуют и сопряжены.

Пусть $\sigma=\pi(\mathfrak{X})$ – множество всех простых делителей всех групп из класса Фиттинга $\mathfrak{X}$, $\sigma'=\pi'(\mathfrak{X})=\boldsymbol{P}\backslash\sigma$ и $\pi\in\boldsymbol{P}$, где $\boldsymbol{P}$ обозначает множество всех простых чисел. Напомним, что если $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G, то множество $\pi(\mathfrak{X})$ определяется как объединение всех таких $\pi(G)$, что $G\in \mathfrak{X}$. Напомним также, что группа G называется π-разрешимой [14], если ее главные факторы являются либо элементарными абелевыми p-группами для $p\in\pi$, либо π'-группами. Обозначим через $\mathfrak{S}^\sigma$ множество всех σ-разрешимых групп.

Существование и сопряженность инъекторов в группах, принадлежащих классам $\mathfrak{X}\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{X}\mathfrak{S}^\sigma$, установлены соответственно В.Г. Сементовским [12] и Го Вэньбинем [13]. Мы приводим эти результаты в качестве нижеследующих лемм.

Лемма 1.3 (В.Г. Сементовский [12]). *В любой группе G такой, что фактор-группа G по ее $\mathfrak{X}$-радикалу разрешима, существуют $\mathfrak{X}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Лемма 1.4 (Го Вэньбинь, теорема 2.5.3 [13]). *Если $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга произвольных групп, то любая группа из класса $\mathfrak{X}\mathfrak{S}^\sigma$ обладает единственным классом сопряженных $\mathfrak{X}$-инъекторов.*

2. Вспомогательный результат

С учетом лемм 1.3 и 1.4 о существовании $\mathfrak{X}$-инъекторов в группах из классов $\mathfrak{X}\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{X}\mathfrak{S}^\sigma$ имеет место следующий признак нормальности.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга, причем $\mathfrak{X}\subset\mathfrak{Y}$, и пусть $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}^\sigma$). Если найдется простое число $p\in\boldsymbol{P}$ ($p\in\sigma$) такое, что в каждой группе $G\in\mathfrak{Y}$ ее $\mathfrak{X}$-инъектор имеет индекс 1 или p, то $\mathfrak{X}$ нормален в $\mathfrak{Y}$.*

Доказательство. Так как по условию теоремы $\mathfrak{X}\subset\mathfrak{Y}$, то класс $\mathfrak{Y}\backslash\mathfrak{X}$ не пуст. Предположим, что $\mathfrak{X}$ не нормален в $\mathfrak{Y}$. Тогда в классе $\mathfrak{Y}\backslash\mathfrak{X}$ найдется группа, в которой $\mathfrak{X}$-радикал не является $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппой, т.е. $\mathfrak{X}$-инъектор не нормален в G. Выберем среди таких групп группу G минимального порядка.

В силу леммы 1.3 $\mathfrak{X}$-инъектор в группе $G\in\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}$ существует ($\mathfrak{X}$-инъектор в группе $G\in\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}^\sigma$ существует в силу леммы 1.4). Пусть V – $\mathfrak{X}$-инъектор группы G.

Покажем вначале, что в G существует единственная максимальная нормальная подгруппа $M=G_{\mathfrak{X}}$. Докажем это методом от противного. Предположим, что в группе G есть две максимальные нормальные подгруппы M_1 и M_2. Тогда по определению класса Фиттинга $M_1\in\mathfrak{Y}$ и $M_2\in\mathfrak{Y}$. Следовательно, ввиду того, что $|M_1|<|G|$ и $|M_2|<|G|$, выполняется условие индукции. Значит, по индукции $M_1\in\mathfrak{X}$ и $M_2\in\mathfrak{X}$. Но тогда по определению класса Фиттинга $M_1M_2\in\mathfrak{X}$. Так как M_1 и M_2 – максимальные нормальные подгруппы и их произведение – нормальная $\mathfrak{X}$-подгруппа, то, ввиду максимальности, $G=M_1M_2\in\mathfrak{X}$. Получаем противоречие. Следовательно, существует единственная максимальная нормальная подгруппа $M_1=M_2=M\in\mathfrak{X}$. Но тогда по определению $\mathfrak{X}$-радикала $M=G_{\mathfrak{X}}$.

Заметим, что $G_{\mathfrak{X}}<V<G$, где V не нормален в G. По условию теоремы $|G:V|=p$ (если $|G:V|=1$, то $G=V\in\mathfrak{X}$ – противоречие с выбором группы G). Так как $G_{\mathfrak{X}}$ – единственная максимальная нормальная подгруппа в G, то $G/G_{\mathfrak{X}}$ – композиционный фактор группы G.

Если $G\in\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}$, то факторгруппа $G/G_{\mathfrak{X}}$ разрешима и является простой группой. Следовательно, $G/G_{\mathfrak{X}}$ является циклической группой простого порядка. Имеем $G/G_{\mathfrak{X}}\cong Z_q$, т.е. $|G/G_{\mathfrak{X}}|=q$. Заметим, что

$$\frac{|G:G_{\mathfrak{X}}|}{|V:G_{\mathfrak{X}}|}=|G:V|=p. \tag{2.1}$$

Следовательно, $q=p$ и $V=G_{\mathfrak{X}}$ – противоречие с тем, что $\mathfrak{X}$-инъекторы группы G не нормальны в G.

Если $G\in\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\sigma}$, то факторгруппа $G/G_{\mathfrak{X}}$ является σ-разрешимой группой. Но из определения σ-разрешимой группы порядок ее композиционных факторов есть либо простое число из σ, либо σ'-число. Ввиду равенства (2.1) $G/G_{\mathfrak{X}}$ не может σ'-группой, иначе группа $V/G_{\mathfrak{X}}$ являлась бы одновременно и σ-группой, и σ'-группой, что невозможно. Значит, порядок факторгруппы $G/G_{\mathfrak{X}}$ есть простое число из множества σ. Снова, с учетом равенства (2.1) получаем, что $V=G_{\mathfrak{X}}$ – противоречие с тем, что $\mathfrak{X}$-инъекторы группы G не нормальны в группе G.

Следовательно, как в случае $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}$, так и в случае $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\sigma}$, получаем, что класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ нормален в классе Фиттинга $\mathfrak{Y}$.

Теорема доказана.

В случае $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}$ справедливость утверждения теоремы 2.1 была установлена ранее в работе [11].

3. Максимальные по включению классы Фиттинга частично разрешимых групп

Класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ называется максимальным по включению подклассом класса Фиттинга $\mathfrak{Y}$ (этот факт обозначается $\mathfrak{X}<\cdot\mathfrak{Y}$), если $\mathfrak{X}\subset\mathfrak{Y}$ и из того, что $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{Y}$, где $\mathfrak{M}$ – класс Фиттинга, всегда следует, что $\mathfrak{M}\in\{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}$.

Достаточный признак максимальности по включению для случая частично разрешимых групп дает следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга, причем $\mathfrak{X}\subset\mathfrak{Y}$, и пусть $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\sigma}$). Если найдется простое число $p\in\boldsymbol{P}$ ($p\in\sigma$) такое, что в каждой группе $G\in\mathfrak{Y}$ ее $\mathfrak{X}$-инъектор имеет индекс 1 или p, то $\mathfrak{X}$ максимален в $\mathfrak{Y}$.*

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{X}\subset\mathfrak{Y}$, то из ограничений, налагаемых условием теоремы на класс $\mathfrak{Y}$ по леммам 1.3 и 1.4 следует, что $\mathfrak{X}$-инъекторы в любой группе $G\in\mathfrak{Y}$ существуют и сопряжены.

Пусть V – $\mathfrak{X}$-инъектор группы G. По теореме 2.1 заключаем, что $\mathfrak{X}\trianglelefteq\mathfrak{Y}$. Значит, $\mathfrak{X}$-инъектор любой группы совпадает с ее $\mathfrak{X}$-радикалом. Поэтому $V=G_{\mathfrak{X}}$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{X}<\cdot\mathfrak{Y}$.

Предположим, что класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ не максимален в $\mathfrak{Y}$. Тогда найдется такой класс Фиттинга $\mathfrak{M}$, что $\mathfrak{X}\subset\mathfrak{M}\subset\mathfrak{Y}$.

Выберем группы G и H из классов $\mathfrak{M}\backslash\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}\backslash\mathfrak{M}$ соответственно. Так как по условию для любой $\mathfrak{Y}$-группы ее индекс по $\mathfrak{X}$-радикалу в случае $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}$ равен простому числу $p\in\boldsymbol{P}$ (или $p\in\sigma$ для случая $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\sigma}$), то $|G/G_{\mathfrak{X}}|=|H/H_{\mathfrak{X}}|=p$. Но $\mathfrak{X}\subset\mathfrak{M}$. Значит, $H_{\mathfrak{X}}\le H_{\mathfrak{M}}$.

Из того, что $|H/H_{\mathfrak{X}}|=p$, следует, что $H_{\mathfrak{X}}$ – максимальная нормальная подгруппа группы H. Следовательно, ввиду $H_{\mathfrak{X}}\leq H_{\mathfrak{M}}$, получаем, что либо $H_{\mathfrak{M}}=H$, либо $H_{\mathfrak{X}}=H_{\mathfrak{M}}$. Случай, когда $H_{\mathfrak{M}}=H$, невозможен ввиду того, что тогда $H\in\mathfrak{M}$ и получаем противоречие с выбором H.

Следовательно, справедливо равенство

$$H_{\mathfrak{X}}=H_{\mathfrak{M}}. \tag{3.1}$$

Пусть $T=G\times H$. Если предположить, что $T\in\mathfrak{M}$, то из того, что $H\lhd T$, следует, что $H\in\mathfrak{M}$. Последнее невозможно ввиду выбора H. Значит, $T_{\mathfrak{M}}<T$.

Так как $\mathfrak{X}\subset\mathfrak{M}$, то по лемме 1.1 получаем $(T_{\mathfrak{M}})_{\mathfrak{X}}=T_{\mathfrak{M}}\cap T_{\mathfrak{X}}=T_{\mathfrak{X}}$.

Покажем, что $T_{\mathfrak{M}}=G\times H_{\mathfrak{M}}$. Так как $|H/H_{\mathfrak{X}}|=p$ и с учетом равенства (3.1) имеем $|H|=|H_{\mathfrak{M}}|\cdot p$. Так как $G\in\mathfrak{M}$ и $H_{\mathfrak{M}}\in\mathfrak{M}$, то $G\times H_{\mathfrak{M}}\in\mathfrak{M}$. Кроме того, $G\times H_{\mathfrak{M}}\lhd T$ в силу $G\lhd T$ и $H_{\mathfrak{M}}\lhd T$. Заметим также, что $|T|=|G|\cdot|H|$ и $|G\times H_{\mathfrak{M}}|=|G|\cdot|H_{\mathfrak{M}}|$. Отсюда $|T:(G\times H_{\mathfrak{M}})|=p$. Значит, $G\times H_{\mathfrak{M}}$ – максимальная подгруппа, которая является нормальной в T. Более того, $T\notin\mathfrak{M}$, что влечет $T_{\mathfrak{M}}\neq T$, т.е. $T_{\mathfrak{M}}\subset T$. Тогда $\mathfrak{M}$-радикалом группы T может быть только $T_{\mathfrak{M}}$. Остается единственная возможность, что $T_{\mathfrak{M}}=G\times H_{\mathfrak{M}}$.

Если $T_{\mathfrak{M}}\in\mathfrak{X}$, то ввиду $G\lhd T_{\mathfrak{M}}$ получаем $G\in\mathfrak{X}$. Последнее противоречит выбору группы G.

Следовательно, $T_{\mathfrak{M}}\notin\mathfrak{X}$ и

$$(T_{\mathfrak{M}})_{\mathfrak{X}}=T_{\mathfrak{X}}<T_{\mathfrak{M}}. \tag{3.2}$$

Теперь, ввиду $H\in\mathfrak{Y}$, по условию имеем $|H/H_{\mathfrak{X}}|=p$. Значит, $H_{\mathfrak{X}}$ – максимальная нормальная подгруппа группы H. Но в силу равенства (3.1) получаем $|H/H_{\mathfrak{M}}|=p$. Так как $T=G\times H$ и $T_{\mathfrak{M}}=G\times H_{\mathfrak{M}}$, то

$$|T/T_{\mathfrak{M}}|=\frac{|G\times H|}{|G\times H_{\mathfrak{M}}|}=\frac{|G|\cdot|H|}{|G|\cdot|H_{\mathfrak{M}}|}=\frac{|H|}{|H_{\mathfrak{M}}|}=|H/H_{\mathfrak{M}}|=p.$$

Это означает, что $T_{\mathfrak{M}}\lhd\cdot T$. Теперь, ввиду $T\in\mathfrak{Y}$ и $T\notin\mathfrak{X}$ (в противном случае, если $T\in\mathfrak{X}$, то возможно $|T/T_{\mathfrak{X}}|=1$), из условия теоремы $|T/T_{\mathfrak{X}}|=p$. Следовательно, $T_{\mathfrak{X}}\lhd\cdot T$. Таким образом, $T_{\mathfrak{X}}$ и $T_{\mathfrak{M}}$ являются максимальными нормальными подгруппами в T, причем $T_{\mathfrak{X}}\leq T_{\mathfrak{M}}$. Следовательно, $T_{\mathfrak{X}}=T_{\mathfrak{M}}$ – противоречие с неравенством (3.2). Полученное противоречие доказывает, что $\mathfrak{X}<\cdot\mathfrak{Y}$.

Теорема доказана.

В случае $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}$ справедливость утверждения теоремы 3.1 была установлена в работе [11].

Заметим, что аналог утверждения теоремы 3.1 для класса $\mathfrak{X}\mathfrak{S}$, расширяющий известный достаточный признак максимальности Брайса – Косси [3] на случай частично разрешимых групп, был доказан в работе [11] с опорой на результат В.Г. Сементовского [12] о существовании $\mathfrak{X}$-инъекторов и их сопряженности в группах из класса $\mathfrak{X}\mathfrak{S}$. Однако теорема 2.5.3 Го Вэньбиня [13] не является прямым следствием результата В.Г. Сементовского [12], поэтому результаты Брайса – Косси [3] и Н.В. Савельевой [11] нельзя назвать следствиями доказанных в настоящей работе теорем 2.1 и 3.1.

4. Максимальные по сильному вложению классы Фиттинга частично разрешимых групп

Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ называется:

1) сильно вложенным в класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ (это обозначают $\mathfrak{X}\ll\mathfrak{Y}$), если $\mathfrak{Y}$-инъектор любой группы G содержит $\mathfrak{X}$-инъектор этой группы;

2) максимальным по сильному вложению подклассом класса Фиттинга $\mathfrak{Y}$ (этот факт обозначается $\mathfrak{X}\ll\cdot\mathfrak{Y}$), если $\mathfrak{X}\overset{\ll}{\subsetneq}\mathfrak{Y}$ и из того, что $\mathfrak{X}\overset{\ll}{\subseteq}\mathfrak{M}\overset{\ll}{\subseteq}\mathfrak{Y}$, где $\mathfrak{M}$ – класс Фиттинга, всегда следует, что $\mathfrak{M}\in\{\mathfrak{X},\ \mathfrak{Y}\}$.

Достаточный признак максимальности по сильному вложению для случая частично разрешимых групп дает нижеследующая теорема. Отметим лишь, что ввиду лемм 1.3 и 1.4 $\mathfrak{X}$-инъекторы в $\mathfrak{X}\mathfrak{S}$-группах и $\mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\sigma}$-группах существуют.

Теорема 4.1. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{Y}$ *– классы Фиттинга, причем* $\mathfrak{X}\overset{\ll}{\subsetneq}\mathfrak{Y}$, *и пусть* $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\sigma}$). *Если найдется простое число* $p\in\boldsymbol{P}$ ($p\in\sigma$) *такое, что в каждой группе* $G\in\mathfrak{Y}$ *ее* $\mathfrak{X}$ *-инъектор имеет индекс* 1 *или* p, *то класс* $\mathfrak{X}$ *максимален по сильному вложению в классе* $\mathfrak{Y}$.

Доказательство. Так как по условию теоремы $\mathfrak{X}\overset{\ll}{\subsetneq}\mathfrak{Y}$, то $\mathfrak{X}\subset\mathfrak{Y}$, и тогда по теореме 2.1 получаем, что $\mathfrak{X}\lhd\mathfrak{Y}$. Следовательно, $\mathfrak{X}$-инъектор V любой группы $G\in\mathfrak{Y}$ совпадает с ее $\mathfrak{X}$-радикалом. Поэтому $V=G_{\mathfrak{X}}$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{X}\ll\cdot\mathfrak{Y}$.

Предположим, что класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ не максимален по сильному вложению в классе $\mathfrak{Y}$. Значит, найдется такой класс Фиттинга $\mathfrak{M}$, что $\mathfrak{X}\overset{\ll}{\subsetneq}\mathfrak{M}\overset{\ll}{\subsetneq}\mathfrak{Y}$.

Выберем группы G и H из классов $\mathfrak{M}\backslash\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}\backslash\mathfrak{M}$ соответственно. Так как по условию для любой $\mathfrak{Y}$-группы ее индекс по $\mathfrak{X}$-радикалу в случае $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}$ равен простому числу $p\in\boldsymbol{P}$ (или $p\in\sigma$ для случая $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\sigma}$), то $|G/G_{\mathfrak{X}}|=|H/H_{\mathfrak{X}}|=p$. Но по условию $\mathfrak{X}\overset{\ll}{\subsetneq}\mathfrak{Y}$, что означает строгое включение класса $\mathfrak{X}$ в класс $\mathfrak{M}$, т.е. $\mathfrak{X}\subset\mathfrak{M}$. Далее, следуя доказательству теоремы 3.1, можно показать, что класс $\mathfrak{Y}\backslash\mathfrak{M}$ не пуст, а класс $\mathfrak{M}\backslash\mathfrak{X}$ пуст. Последнее противоречит допущенному предположению о существовании класса Фиттинга $\mathfrak{M}$ такого, что $\mathfrak{X}\overset{\ll}{\subsetneq}\mathfrak{M}\overset{\ll}{\subsetneq}\mathfrak{Y}$. Следовательно, класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ максимален по сильному вложению в классе $\mathfrak{Y}$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cossey, J. Products of Fitting Classes / J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Bd. 141. – S. 289–295.

2. Blessenohl, D. Über normale Schunk- und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – Bd. 118, № 1. – S. 1–8.

3. Bryce, R.A. Maximal Fitting classes of finite soluble groups / R.A. Bryce, J. Cossey // Bull. Austral. Math. Soc. – 1974. – Vol. 10. – P. 169–175.

4. Bryce, R.A. Strong Containment of Fitting Classes / R.A. Bryce, J. Cossey // Group Theory (Proc. Miniconf., Australian Nat. Univ., Canberra, 1975). Lecture notes in Math. Springer, Berlin. – 1977. – 573. – P. 6–16.

5. Cusack, E. Strong containment of Fitting classes / E. Cusack // J. Algebra. – 1980. – 64. – P. 414–429.

6. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

7. Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). Издание 14 / Институт математики СО РАН. – 1999. – 135 с.

8. Воробьев, Н.Т. О проблеме Лауша в теории нормальных классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев // Доклады АН БССР. – 1991. – Т. 35, № 6. – С. 485–487.

9. Савельева, Н.В. Максимальные подклассы локальных классов Фиттинга / Н.В. Савельева, Н.Т. Воробьев // Сиб. мат. журнал. – 2008. – Т. 49, № 6. – С. 1411–1419.

10. Fischer, B. Injectoren endlicher auflosbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschutz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102. – №5. – S. 337–339.

11. Савельева, Н.В. Инъекторы и максимальные подклассы Фиттинга / Н.В. Савельева // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2008. – № 1 (47). – С. 126–130.

12. Сементовский, В.Г. Инъекторы конечных групп / В.Г. Сементовский // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Минск : Наука и техника, 1984. – С. 166–170.

13. Guo, W. The Theory of Classes of Groups / W. Guo. – Sc. Press Kluwer Acad. Public, 2000.

14. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск : Наука и техника, 1964. – 158 с.

***N.V. Savelyeva.* On Sufficient Criteria for Maximality of Fitting Classes of Finite Partially Soluble Groups**

In this paper, the sufficient conditions for the Fitting class $\mathfrak{X}$ to be normal and maximal (by inclusion, by strong containment) in the Fitting class $\mathfrak{Y}$ of finite partially soluble groups (in particular, of finite groups with the property that their quotients by the radicals are soluble or $\pi(\mathfrak{X})$-soluble) are established in terms of the indices of $\mathfrak{X}$-injectors. It is proved that if $\mathfrak{X}$ is a proper Fitting subclass of the Fitting class $\mathfrak{Y}$, and for $\mathfrak{Y}$ it holds that $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}$ or $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{X})}$, where $\mathfrak{S}$ and $\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{X})}$ respectively denote the class of all finite soluble groups and the class of all finite $\pi(\mathfrak{X})$-soluble groups, in the set of all prime numbers (when $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}$) or in $\pi(\mathfrak{X})$ (when $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{X})}$) there exists a prime number p such that in every group $G\in\mathfrak{Y}$ its $\mathfrak{X}$-injector has index 1 or p, then $\mathfrak{X}$ is normal and maximal by inclusion in the class $\mathfrak{Y}$. If, together with the above terms and conditions, the Fitting class $\mathfrak{X}$ is strongly contained in the class $\mathfrak{Y}$, then $\mathfrak{X}$ is maximal by strong containment in $\mathfrak{Y}$.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 02.10.2012