УДК 917.948

В.М. Мадорский

НЕЛОКАЛЬНЫЕ НЕРЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ, ЛОКАЛЬНО СХОДЯЩИЕСЯ С КУБИЧЕСКОЙ СКОРОСТЬЮ

В работе рассматриваются нелокальные нерегуляризованные сверхлинейные итерационные процессы для решения уравнения $f(x)=0$ в пространстве R^n. Ряд предлагаемых к рассмотрению методов сходится к решению уравнения локально с кубической скоростью. Процессы сходятся к точному решению операторного уравнения «плохого» начального приближения.

Для решения нелинейного уравнения

$$f(x)=0;\ f\in C_D,\ f(D\subset R^n\to R^n) \tag{1}$$

будем применять итерационный процесс, который можно записать в следующем компактном виде:

$$x_{n+1}=x_n-[f(x_n,y_n)]^{-1}\left(f(x_n)+f\left(x_n-[f'(x_n,y_n)]^{-1}\right)f(x_n)\right). \tag{2}$$

Здесь $f(x,y)$ – оператор первой разделенной разности оператора $f(x)$, и если оператор $f(x)$ таков, справедлив аналог теоремы о среднем для непрерывных операторов

$\|f(x)-f(y)-f(x,y)(x-y)\|\le K\|x-y\|\|x-z\|$ и имеют место оценки

$\|[f(x,y)]\|^{-1}\le B$; $\|f(x,z)-f(z,y)\|\le\alpha\|x-y\|$, то, вводя оператор

$G(x)=S(x)-[f(x,y)]^{-1}f(S(x))$, $S(x)$ – оператор Стеффенсена [1], можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\|G(x)-x^*\|\le\|[f(x,y)]^{-1}\|\|f(x,y)S(x)-f(S(x))-f(x,y)x^*\|\le\\
&\le B\|f(S(x))-f(x^*)-f(x^*,y^*)(S(x)-x^*)+\\
&+(f(x^*,y^*)-f(x,y))(S(x)-x^*)\|\le\\
&\le B(K\|S(x)-x^*\|\|S(x)-y^*\|+\|f(x^*,y^*)-f(x,y)\|\|S(x)-x^*\|\le\\
&\le BK\|S(x)-x^*\|\|S(x)-x^*+f(x^*)\|+\\
&+\|f(x^*,y^*)-f(y^*,x)+f(y^*,x)-f(x,y)\|\|S(x)-x^*\|\le\\
&\le BK\|S(x)-x^*\|^2+(\alpha\|x-x^*\|+\alpha\|y-y^*\|)\|S(x)-x^*\|\le
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\le BK\left\|S(x)-x^*\right\|^2+(\alpha\left\|x-x^*\right\|+\alpha\left\|x^*-f(x^*)-x+f(x)\right\|)\left\|S(x)-x^*\right\|=$$

$$=BK\left\|S(x)-x^*\right\|^2+\alpha\left\|S(x)-x^*\right\|\left\|\left\|x-x^*\right\|+\left\|x-x^*\right\|(1+C)\right\|\le$$

$$\le BK\left\|S(x)-x^*\right\|^2+\alpha\left\|S(x)-x^*\right\|\left\|x-x^*\right\|(2+C)=O(\left\|x-x^*\right\|^3)$$

Здесь x^* – решение уравнения (1), $\left\| f(x^*, x)\right\| \le C$.

Из оценки (3) следует, по крайней мере, локальная кубическая скорость итерационного процесса (2).

Для решения уравнения (1) применяем итерационный процесс.

Этап 1. Решается линейная система.

$$f(x_n, z_n)\Delta y_n = -f(x_n), z_n = x_n - f(x_n), y_n = x_n + \Delta y_n. \quad (4)$$

Этап 2. Решается вторая линейная система.

$$f(x_n, z_n)\Delta x_n = -(f(x_n) + \beta_n f(y_n)),$$
$$\beta_0 \in [10^{-4};10^{-1}]. \quad (5)$$

Этап 3. Вносится поправка.

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n. \quad (6)$$

Этап 4. Проводим проверку окончания процесса: если $\|f(x_{n+1})\|<\varepsilon$, ($\varepsilon$ – малая величина, параметр останова), то конец просчетов, иначе этап 5.

Этап 5. Делается перерасчет регулятора длины шага по следующим формулам: если $\left\|f(x_{n+1})\right\| < \left\|f(x_n)\right\|$, то $\beta_{n+1} := 1$, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\|f(x_n)\|\gamma_n}{\|f(x_{n+1})\|\beta_n}\right), k = 0,1,... \quad (7)$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\frac{\gamma_n\|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\|}, \gamma_0 = \beta_0^2$$

и переходим на этап 1.

Докажем сходимость этого процесса. Описанный выше итерационный процесс символически можно записать в виде

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n[f(x_n, z_n)]^{-1}(f(x_n) + \beta_n f(x_n - [f(x_n, z_n)]^{-1} f(x_n))) =$$
$$x_n - \beta_n \Delta x_n, n = 0, 1, ...; \beta_0 \in [10^{-4}, 10^{-1}]. \quad (8)$$

В силу того, что $f \in C_D$, справедлива оценка

$$| f(x_{n+1}) - f(x_n) - f(x_n, z_n)(x_{n+1} - x_n) \|\le K \| x_{n+1} - x_n \|\| x_{n+1} - z_n |,$$
$$n = 0,1,... \quad (9)$$

С учетом (4) соотношение (9) можно переписать в виде

$$\| f(x_{n+1}) - f(x_n) + \beta_n f(x_n) + \beta_n^2 f(y_n)) \|\le K \| x_{n+1} - x_n \|\| x_{n+1} - z_n |,$$
$$n = 0,1,... \quad (10)$$

Из (10) имеем оценку

$$| f(x_{n+1})\|\le(1-\beta_n)\| f(x_n)\|+\beta_n{}^2\| f(y_n)\|+K\| x_{n+1}-x_n\|| x_{n+1}-z_n|, \quad n=0,1,... \tag{11}$$

Оценим $\| f(y_n)\|$ и $\| f(x_n)\|$. Используя теорему о среднем, имеем

$$\| f(y_n)-f(x_n)-f(x_n,z_n)(y_n-x_n)\|\le K\| x_{n+1}-x_n\|| x_{n+1}-z_n|, \quad n=0,1,... \tag{12}$$

откуда в силу (4), (12) справедлива оценка для $\| f(y_n)\|$

$$\| f(y_n)\|\le KB^2\| f(x_n)\|^2;\beta_n\| f(y_n)\|=h_n\| f(x_n)\|. \tag{13}$$

Здесь $h_n=\beta_nKB^2\| f(x_n)\|$, далее из (5), (13) имеем

$$\|\Delta x_n\|\le\beta_nB(\| f(x_n)\|+\beta_n\| f(y_n)\|)\le\beta_nB(1+h_n)\| f(x_n)\|. \tag{14}$$

Подстановка (13), (14) в (10) позволяет выразить связь между нормами невязок на соседних шагах.

$$\| f(x_{n+1})\|\le(1-\beta_n)\| f(x_n)\|+\beta_nh_n\| f(x_n)\|+\beta_nh_n(1+h_n)^2= \\ =(1-\beta_n(1-h_n(2+2h_n+h_n{}^2)))\| f(x_n)\|. \tag{15}$$

Из (7) имеем, что при $\beta_k<1$ справедлива цепочка равенств

$$\beta_0\| f(x_0)\|=\beta_1\| f(x_1)\|=...=\beta_{n+1}\| f(x_{n+1})\|. \tag{16}$$

Если положить $\delta_n=h_n(2+2h_n+h_n{}^2)$ и $q_n=1-\beta_n(1-\delta_n)$, то неравенство (15) можно переписать в более компактном виде

$$\| f(x_{n+1})\|\le(1-\beta_n(1-\delta_n))\| f(x_n)\|=q_n\| f(x_n)\|. \tag{17}$$

Соотношение (17) является базовым при доказательстве сходимости итерационных процессов локально сходящихся с кубической скоростью.

Теорема 2.1. Пусть в области $D=S(x_0,r)$, $r=\dfrac{B\| f(x_0)\|(2+h_0)}{1-q_0}$ существует x^* – решение нелинейного уравнения (1), оператор f удовлетворяет перечисленным выше условиям и

$$\delta_0=h_0(2+2h_0+h_0{}^2)<1. \tag{18}$$

Тогда итерационный процесс (4) – (7) со сверхлинейной (локально с кубической) скоростью сходится к x^*.

Доказательство. При $n=0$ из (17), (16) имеем, что

$$\| f(x_1)\|\le(1-\beta_0(1-\delta_0))\| f(x_0)\|=q_0\| f(x_0)\|;$$

$$q_0=1-\beta_0(1-\delta_0)<1,h_0<1.$$

Откуда следует, что $\| f(x_1)\|<\| f(x_0)\|,\beta_1>\beta_0$.

При $n=1$ имеем, что

$$h_1=\beta_1KB^2\| f(x_1)\|=h_0,$$

$$\alpha_1=1-\beta_1(1-h_1)=1-\beta_1(1-h_0)<1-\beta_0(1-h_0)=\alpha_0,$$

$$\delta_1=h_1(2+2h_1+h_1{}^2)=\delta_0<1,$$

$$\| f(x_2)\|\le(1-\beta_1(1-\delta_1))\| f(x_1)\|=q_1\| f(x_1)\|,q_1<q_0.$$

Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что последовательность $\{q_n\}$ монотонно убывает к нулю, последовательность $\{\beta_n\}$ монотонно возрастает к 1, и справедлива оценка

$$\| f(x_{n+1}) \| \le \prod_{i=1}^{n} q_i \| f(x_0) \|,$$

из которой следует, что последовательность элементов $\{x_n\}$ по функционалу стремиться к нулю, $h_n \to 0$ при $n \to \infty$ и при некотором $k > n_0$ итерационный процесс (4) – (7) входит в область притяжения процесса с $\beta_k = 1$.

Нетрудно проверить, что все $x_n, y_n \in D$

$$\| x_n - x_0 \| \le \sum_{i=0}^{n-1} \| x_{i+1} - x_i \| = \sum_{i=0}^{n-1} \| \Delta x_i \| < B \| f(x_0) \| \frac{1+h_0}{1-q_0};$$

$$\| y_n - x_0 \| \le \| y_n - x_n \| + \| x_n - x_0 \| <$$

$$< B \| f(x_n) \| + B \frac{\| f(x_0) \| (1+h_0)}{1-q_0} < \frac{B \| f(x_0) \|}{1-q_0} (2+h_0).$$

Стандартным образом можно показать не только слабую сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x^*, но и сильную сходимость $\{x_n\}$ к x^*:

$$\| x_{n+p} - x_n \| \le \sum_{i=n}^{n+p-1} \| \Delta x_n \| < B \| f(x_0) \| (1+h_0) \prod_{i=0}^{n-1} q_i \,. \tag{19}$$

Из (19) следует фундаментальность элементов $\{x_n\}$, в силу полноты пространства R^n существование предельного элемента x^*, который, как просто проверить, является решением исходной нелинейной системы. Так как $\exists k \in N$, при котором $\beta_k = 1$, а следовательно $\forall n > k \ \beta_n = 1$, то, как показано выше, процесс (4) – (7) с $\beta_n = 1$ обладает кубической скоростью сходимости. *Теорема доказана.*

Опишем следующий эффективный процесс, реализующий неполный прогноз.

Шаг 1. Решается линейная система

$$f(x_n, z_n)(y_n - x_n) = f(x_n, z_n)\Delta y_n = -f(x_n), \quad n = 0,1,... \tag{20}$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n для определения вектора y_n

$$y_n = x_n + \Delta y_n, \quad n = 0,1,... \tag{21}$$

Шаг 3. Решается линейная система

$$f(x_n, z_n)(x_{n+1} - x_n) = f'(x_n)\Delta x_n = -\beta_n \big(f(x_n) + \beta_n f(y_n) \big), \quad n = 0,1,... \tag{22}$$

Шаг 4. Вносится поправка в вектор x_n для определения вектора очередного приближения

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n, \quad n = 0,1,... \tag{23}$$

Шаг 5. Проверяется окончание итерационного процесса: если $\| f(x_{n+1}) \|$ и (или) $\| \Delta x_n \| < \varepsilon$ – конец просчетов, иначе – переход на шаг 6.

Шаг 6. Производится пересчет шаговой длины по формуле если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1} := 1$, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\beta_n\left(\|f(x_n)\| + \|f(x_{n+1})\|\right)}\right),$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \beta_{n+1}}{\beta_n} \frac{\|f(x_n)\|\left(\|f(x_{n+1})\| + \|f(x_{n+2})\|\right)}{\left(\|f(x_n)\| + \|f(x_{n+1})\|\right)\|f(x_{n+2})\|}, n = 0,1,...; \qquad (24)$$

$$\gamma_0 = \frac{\beta_0^2\left(\|f(x_0)\| + \|f(x_1)\|\right)}{\|f(x_1)\|}, \beta_0 \in \left[10^{-3}, 10^{-1}\right]$$

и переход на шаг 1.

Описанный выше итерационный процесс символически можно записать в виде

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n [f(x_n, z_n)]^{-1}\left(f(x_n) + \beta_n f\left(x_n - [f(x_n, z_n)]^{-1} f(x_n)\right)\right) =$$
$$= x_n - \beta_n \Delta x_n, n = 0,1,...; \beta_0 \in \left[10^{-4}, 10^{-1}\right].$$

В силу того, что $f \in C_D$, справедлива оценка

$$\|f(x_{n+1}) - f(x_n) - f(x_n, z_n)(x_{n+1} - x_n)\| \le K \| x_{n+1} - x_n \|| x_{n+1} - z_n |, \quad n = 0,1,... \qquad (25)$$

С учетом (20), соотношение (25) можно переписать в виде

$$\left\|f(x_{n+1}) - f(x_n) + \beta_n f(x_n) + \beta_n^2 f(y_n)\right\| \le K \| x_{n+1} - x_n \|| x_{n+1} - z_n |, \quad n = 0,1,... \qquad (26)$$

Из (26) имеем оценку

$$\|f(x_{n+1})\| \le (1 - \beta_n)\|f(x_n)\| + \beta_n^2 \|f(y_n)\| + K \| x_{n+1} - x_n \|| x_{n+1} - z_n |, \quad n = 0,1,... \qquad (27)$$

Оценим $\|f(y_n)\|$ и $\|\Delta x_n\|$. Используя теорему о среднем, имеем

$$\|f(y_n) - f(x_n) - f(x_n, z_n)(y_n - x_n)\| \le K \| y_n - x_n \|| y_n - z_n |, \quad n = 0,1,... \qquad (28)$$

откуда в силу (19), (28) справедлива оценка для $\|f(y_n)\|$:

$$\|f(y_n)\| \le KB^2 \|f(x_n)\|^2; \quad \beta_n \|f(y_n)\| = h_n \|f(x_n)\|. \qquad (29)$$

Здесь $h_n = \beta_n KB^2 \|f(x_n)\|$. Далее, из (24), (29) имеем:

$$\|\Delta x_n\| \le \beta_n B\left(\|f(x_n)\| + \beta_n \|f(y_n)\|\right) \le \beta_n B(1 + h_n)\|f(x_n)\|. \qquad (30)$$

Подстановка (29), (30) в соотношение (27) позволяет выразить связь между нормами невязок на соседних шагах

$$\|f(x_{n+1})\| \le (1 - \beta_n)\|f(x_n)\| + \beta_n h_n \|f(x_n)\| + \beta_n h_n (1 + h_n)^2 =$$
$$= \left(1 - \beta_n\left(1 - h_n\left(2 + 2h_n + h_n^2\right)\right)\right)\|f(x_n)\|. \qquad (31)$$

Из (24) имеем, что при $\beta_k < 1$ справедлива цепочка равенств:

$$\beta_0\|f(x_0)\| = \beta_1\|f(x_1)\| = ... = \beta_{n+1}\|f(x_{n+1})\|, \quad n+1 \le k. \tag{32}$$

Если положить $\delta_n = h_n\left(2+2h_n+h_n^2\right)$ и $q_n = 1-\beta_n(1-\delta_n)$, неравенство (30) можно переписать в более компактном виде:

$$\|f(x_{n+1})\| \le \left(1-\beta_n\left(1-\delta_n\right)\right)\|f(x_n)\| = q_n\|f(x_n)\|. \tag{33}$$

Соотношение (33) является базовым при доказательстве сходимости итерационных процессов локально сходящихся с кубической скоростью.

Теорема 2.2. Пусть в области $D = S\left(x_0, \dfrac{B\|f(x_0)\|(2+h_0)}{1-q_0}\right)$ существует x^* – решение уравнения (1), оператор f удовлетворяет перечисленным выше условиям и

$$h_0\left(2+2h_0+h_0^2\right)<1 \tag{34}$$

Тогда итерационный процесс (20)–(24) со сверхлинейной (локально с кубической) скоростью сходится к x^*.

Доказательство. При $n=0$ из (33), (34) следует, что

$$\begin{gathered}\|f(x_1)\| \le \left(1-\beta_0\left(1-\delta_0\right)\right)\|f(x_0)\| = q_0\|f(x_0)\|;\\ q_0 = 1-\beta_0\left(1-\delta_0\right)<1, \quad h_0<1.\end{gathered} \tag{35}$$

Из (23) и (35) следует, что $\|f(x_1)\| < \|f(x_0)\|, \quad \beta_1 > \beta_0$.

При $n=1$ имеем, что $h_1 = \beta_1 KB^2\|f(x_1)\| = h_0$,

$$\alpha_1 = 1-\beta_1(1-h_1) = 1-\beta_1(1-h_0) < 1-\beta_0(1-h_0) = \alpha_0, \delta_1 = h_1\left(2+2h_1+h_0\right) = \delta_0 < 1,$$

$$\|f(x_2)\| \le \left(1-\beta_1(1-\delta_1)\right)\|f(x_1)\| = q_1\|f(x_1)\|, q_1 < q_0.$$

Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что последовательность $\{q_n\}$ монотонно убывает к нулю, последовательность $\{\beta_n\}$ монотонно возрастает к 1 и справедлива оценка

$$\|f(x_{n+1})\| \le \prod_{i=1}^{n} q_i\|f(x_0)\|, \tag{36}$$

из которой следует, что последовательность элементов $\{x_n\}$ по функционалу стремится к нулю, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ и при некотором $k > n_0$ итеративный процесс (20)–(24) входит в область притяжения процесса с $\beta_k = 1$. Нетрудно проверить, что все $x_n, y_n \in D$

$$\|x_n - x_0\| \le \sum_{i=0}^{n-1}\|x_{i+1}-x_i\| = \sum_{i=0}^{n-1}\|\Delta x_i\| < B\|f(x_0)\|\frac{\left(1+h_0\right)}{1-q_0}.$$

$$\|y_n - x_0\| \le \|y_n - x_n\| + \|x_n - x_0\| < B\|f(x_n)\| + \frac{B\|f(x_0)\|\left(1+h_0\right)}{1-q_0} < \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}(2+h_0).$$

$$\|x_{n+p} - x_n\| \le \sum_{i=n}^{n+p-1}\|\Delta x_n\| < B\|f(x_0)\|(1+h_0)\prod_{i=0}^{n-1} q_i. \tag{37}$$

Из (37) следует фундаментальность последовательности элементов $\{x_n\}$, а в силу полноты пространства R^n существование предельного элемента x^*, который, как просто проверить, является решением уравнения (1). *Теорема доказана.*

Достаточно эффективным является следующий итерационный процесс:

Шаг 1. Решается линейная система

$$f(x_n, z_n)(y_n - x_n) = f(x_n, z_n)\Delta y_n = -f(x_n), \quad n = 0,1,\ldots. \tag{38}$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n для определения вектора y_n

$$y_n = x_n + \Delta y_n, \quad n = 0,1,\ldots. \tag{39}$$

Шаг 3. Решается линейная система

$$f(x_n, z_n)(x_{n+1} - x_n) = f(x_n, z_n)\Delta x_n = -\beta_n\left(f(x_n) + \beta_n f(y_n)\right), \quad n = 0,1,\ldots \tag{40}$$

Шаг 4. Вносится поправка в вектор x_n для определения вектора очередного приближения

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n, \quad n = 0,1,\ldots. \tag{41}$$

Шаг 5. Проверяется окончание итерационного процесса: если $\|f(x_{n+1})\|$ и (или) $\|\Delta x_n\| < \varepsilon$ – конец просчетов, иначе – переход на шаг 6.

Шаг 6. Производится пересчет шаговой длины по формуле

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{W_n}{\alpha\beta_n\|f(x_{n+1})\|}\right), n = 0,1,\ldots, 1 < \alpha < 2, \tag{42}$$

$$W_{n+1} = (1-\beta_{n+1})W_n + \beta_{n+1}^2\beta_n\|f(x_{n+1})\|, W_0 = \gamma\|f(x_0)\|, \gamma << 1 \tag{43}$$

и переход на шаг 1.

Теорема 2.3. Пусть в области $D = S(x, W_n \le W_0)$ существует x^* – решение уравнения (2.1), оператор f удовлетворяет перечисленным выше условиям и

$$h_0\left(2 + 2h_0 + h_0^2\right) < 1. \tag{44}$$

Тогда итерационный процесс (38)–(43) со сверхлинейной (локально с кубической) скоростью сходится к x^*.

Доказательство сходимости процесса (38)–(43) в идейном плане впалне аналогично тому, как это проделано в работе [1] при доказательстве теоремы 2.3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский – Брест : БрГУ, 2005 – 186 с.

***V.M. Madorski.* Nonlocal Nonregularised Iterative Processes Locally Converse with Cubic Speed**

Nonlocal superlinear nonregularized iterative processes for the solution of $f(x) = 0$ equation in space R^n are considered in the article. A number of suggested methods meet locally with cubic speed. The processes converge to exact solution of the operator equation from the “bad” initial approximation.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 02.09.2012