УДК 517.988

Ю.М. Вувуникян, И.В. Трифонова

КОМПОНЕНТЫ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА КОМПОЗИЦИИ ЭВОЛЮЦИОННОГО ОПЕРАТОРА С СОСТАВНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Эволюционный оператор второй кратности с обобщенными импульсными характеристиками находит широкое применение при решении задач нелинейных многомерных эволюционных систем с двумя входными и двумя выходными сигналами. В работе рассматривается аналитическое задание компонент высшего порядка композиции эволюционного оператора второй кратности с составным оператором слева и справа. Главной целью исследования является получение зависимости между ядрами оператора композиции и обобщенными ядрами композируемых операторов. Доказаны теорема для четвертого компонента композиции оператора второй кратности с составным эволюционным оператором и формула для задания любой компоненты композиции оператора второй кратности с составным эволюционным оператором слева. Получены формулы, задающие компоненты композиции оператора второй кратности с составным эволюционным оператором справа.

Введение

Будем рассматривать нелинейные эволюционные операторы второй кратности. Напомним [1], что нелинейный эволюционный оператор второй кратности имеет вид:

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \sum_{n_1+n_2>0} S_{n_1+n_2}(a_{n_1,n_2} * (x_1^{\otimes n_1} \otimes x_2^{\otimes n_2})),$$

где a_{n_1,n_2} – двухкомпонентная обобщенная вектор-функция с носителем на $[0;+\infty)^{n_1+n_2}$, x_1, x_2 – финитные слева бесконечно дифференцируемые функции на числовой оси, $S_{n_1+n_2}$ – оператор сокращения переменных порядка n_1+n_2, $*$ – свертка, $\otimes$ – операция тензорного произведения.

Отметим, что нелинейный эволюционный оператор второй кратности может быть записан в следующем виде:

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \sum_{n\ge 1} S_n \sum_{n_1+n_2=n} a_{n_1,n_2} * (x_1^{\otimes n_1} \otimes x_2^{\otimes n_2}).$$

Оператор A_n, определяемый равенством

$$A_n x^n = S_n \sum_{n_1+n_2=n} a_{n_1,n_2} * (x_1^{\otimes n_1} \otimes x_2^{\otimes n_2}) \qquad \left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right),$$

называется, ***n*-ым компонентом** оператора *A*.

Эволюционный оператор *A* второй кратности называется ***составным*** [1; 2], если он имеет вид:

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(1)} x_1 \\ A^{(2)} x_2 \end{pmatrix},$$

где $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ – эволюционные операторы первой кратности:

$$A^{(1)} x_1 = \sum_{n\ge 1} S_n (a_n^{(1)} * x_1^{\otimes n}), \qquad A^{(2)} x_2 = \sum_{n\ge 1} S_n (a_n^{(2)} * x_2^{\otimes n}).$$

Одной из важнейших задач теории эволюционных операторов является изучение их композиции. В данной статье мы рассмотрим оператор композиции $C = B \circ A$ двух эволюционных операторов второй кратности в случаях, когда один из композируемых операторов является составным.

Композиция эволюционного оператора второй кратности с составным оператором

Рассмотрим сначала композицию $C = B \circ A$ в случае, когда B – произвольный эволюционный оператор второго порядка и А – составной оператор.

Первый компонент эволюционного оператора B определяется равенством

$$B_1 x = b_{1,0} * x_1 + b_{0,1} * x_2 = \begin{pmatrix} b_{1,0}^{(1)} \\ b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * x_1 + \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} \\ b_{0,1}^{(2)} \end{pmatrix} * x_2 = \begin{pmatrix} b_{1,0}^{(1)} & b_{0,1}^{(1)} \\ b_{1,0}^{(2)} & b_{0,1}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

а первый компонент составного оператора A – равенством

$$A_1 x = \begin{pmatrix} A^{(1)} x_1 \\ A^{(2)} x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & 0 \\ 0 & a_1^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда первый компонент оператора композиции C определяется равенством

$$C_1 x = B_1(A_1 x) = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & b_{1,0}^{(1)} \\ b_{0,1}^{(2)} & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & 0 \\ 0 & a_1^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Оператор сокращения переменных в дальнейших формулах будет опускаться, учитывая, что конечный результат является вектор-функция одной переменной t.

В процессе вычисления мы будем использовать лемму [3, с. 151, Лемма 2] о тензорном произведении свертки финитных слева обобщенных функций.

$$C_2 x^2 = B_1(A_2 x^2) + B_2(A_1 x)^2 = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & b_{1,0}^{(1)} \\ b_{0,1}^{(2)} & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2^{(1)} * (x_1 \otimes x_1) \\ a_2^{(2)} * (x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} +$$

$$+ \left(\begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1) \\ (a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)}) * (x_1 \otimes x_2) \\ (a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} \right).$$

Опишем теперь третью компоненту и её слагаемые.

$$C_3 x^3 = B_1(A_3 x) + B_2(A_2 x, A_1 x) + B_2(A_1 x, A_2 x) + B_3(A_1 x)^3.$$

Первое слагаемое задается так:

$$B_1(A_3 x^3) = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & b_{1,0}^{(1)} \\ b_{0,1}^{(2)} & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_3^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ a_3^{(2)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} * a_3^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) + b_{1,0}^{(1)} * a_3^{(2)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \\ b_{0,1}^{(2)} * a_3^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) + b_{1,0}^{(2)} * a_3^{(2)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующие слагаемые:

$$B_2(A_2x^2, A_1x) = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} a_2^{(1)} * (x_1 \otimes x_1) \\ a_2^{(2)} * (x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2^{(1)} * (x_1 \otimes x_1) \otimes a_1^{(1)} * x_1 & a_2^{(1)} * (x_1 \otimes x_1) \otimes a_1^{(2)} * x_2 \\ a_2^{(2)} * (x_2 \otimes x_2) \otimes a_1^{(1)} * x_1 & a_2^{(2)} * (x_2 \otimes x_2) \otimes a_1^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_2^{(1)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_2) + a_2^{(2)} \otimes a_1^{(1)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_1) \\ (a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix}.$$

$$B_2(A_1x, A_2x) = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} a_1^{(1)} & 0 \\ 0 & a_1^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_2^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \otimes x_1 \\ x_1 \otimes x_2 \\ x_2 \otimes x_2 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_2^{(1)} * (x_1 \otimes x_1) \\ a_2^{(2)} * (x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_0^{(1)} * x_1) \otimes (a_2^{(2)} * (x_2 \otimes x_2)) + (a_1^{(2)} * x_2) \otimes (a_2^{(1)} * (x_1 \otimes x_1)) \\ (a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (a_{0,1}^{(1)} \otimes a_{0,2}^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_1^{(1)} \otimes a_2^{(2)}) * (x_1 \otimes x_2 \otimes x_2) + (a_1^{(2)} \otimes a_2^{(1)}) * (x_2 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix}.$$

Определим четвертое слагаемое третьего компонента:

$$B_3(A_1x)^3 = B_3(A_1x, A_1x, A_1x) =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{0,0,3}^{(1)} & b_{0,1,2}^{(1)} & b_{0,2,1}^{(1)} & b_{1,1,1}^{(1)} & b_{0,3,0}^{(1)} & b_{1,2,0}^{(1)} & b_{2,1,0}^{(1)} & b_{3,0,0}^{(1)} \\ b_{0,0,3}^{(2)} & b_{0,1,2}^{(2)} & b_{0,2,1}^{(2)} & b_{1,1,1}^{(2)} & b_{0,3,0}^{(2)} & b_{1,2,0}^{(2)} & b_{2,1,0}^{(2)} & b_{3,0,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} \right]^{\otimes 3} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{0,0,3}^{(1)} & b_{0,1,2}^{(1)} & b_{0,2,1}^{(1)} & b_{1,1,1}^{(1)} & b_{0,3,0}^{(1)} & b_{1,2,0}^{(1)} & b_{2,1,0}^{(1)} & b_{3,0,0}^{(1)} \\ b_{0,0,3}^{(2)} & b_{0,1,2}^{(2)} & b_{0,2,1}^{(2)} & b_{1,1,1}^{(2)} & b_{0,3,0}^{(2)} & b_{1,2,0}^{(2)} & b_{2,1,0}^{(2)} & b_{3,0,0}^{(2)} \end{pmatrix} *$$

$$
*\begin{pmatrix}
a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \\
a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(2)} * x_2 \\
a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \\
a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(2)} * x_2 \\
a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \\
a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(2)} * x_2 \\
a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \\
a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(2)} * x_2
\end{pmatrix}.
$$

Определим следующую четвертую компоненту оператора композиции.

Теорема. *Четвертая компонента композиции эволюционного оператора* $C = B \circ A$ *второй кратности с составным эволюционным оператором имеет вид:*

$$C_4 x^4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 ,$$

где $u_1 = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} * (a_4^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + b_{1,0}^{(1)} * (a_4^{(2)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) \\ b_{0,1}^{(2)} * (a_4^{(1)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) + b_{1,0}^{(2)} * (a_4^{(2)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \end{pmatrix}$,

$$
u_2 = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (a_1^{(1)} \otimes a_3^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_1^{(1)} \otimes a_3^{(2)}) * (x_1 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) + (a_1^{(2)} \otimes a_3^{(1)}) * (x_2 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_1^{(2)} \otimes a_3^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix},
$$

$$
u_3 = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} \otimes a_{0,2}^{(1)} * x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \\ a_{0,2}^{(1)} \otimes a_{2,0}^{(2)} * x_1 \otimes x_1 \otimes x_2 \otimes x_2 + a_{2,0}^{(2)} \otimes a_{0,2}^{(1)} x_2 \otimes x_2 \otimes x_1 \otimes x_1 \\ a_{2,0}^{(2)} \otimes a_{2,0}^{(2)} * x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \end{pmatrix},
$$

$$
u_4 = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_3^{(1)} \otimes (a_1^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) \\ (a_3^{(1)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_2) + (a_3^{(2)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_1) \\ (a_3^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix},
$$

$$
u_5 = \begin{pmatrix} b_{0,0,3}^{(1)} * ((a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \ldots + b_{3,0,0}^{(1)} * ((a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \\ b_{0,0,3}^{(2)} * ((a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \ldots + b_{3,0,0}^{(2)} * ((a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \end{pmatrix},
$$

$$
u_6 = \begin{pmatrix} b_{0,0,3}^{(1)} * ((a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \ldots + b_{3,0,0}^{(1)} * ((a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \\ b_{0,0,3}^{(2)} * ((a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \ldots + b_{3,0,0}^{(2)} * ((a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \end{pmatrix},
$$

$$
u_7 = \begin{pmatrix} b_{0,0,3}^{(1)} * ((a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \ldots + b_{3,0,0}^{(1)} * ((a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \\ b_{0,0,3}^{(2)} * ((a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \ldots + b_{3,0,0}^{(2)} * ((a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \end{pmatrix},
$$

$$u_8=\begin{pmatrix} b^{(1)}_{0,0,0,4} & b^{(1)}_{0,0,1,3} & \dots & b^{(1)}_{4,0,0,0} \\ b^{(2)}_{0,0,0,4} & b^{(2)}_{0,0,1,3} & \dots & b^{(2)}_{4,0,0,0} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (a^{(1)}_1 * x_1)\otimes(a^{(1)}_1 * x_1)\otimes(a^{(1)}_1 * x_1)\otimes(a^{(1)}_1 * x_1) \\ (a^{(1)}_1 * x_1)\otimes(a^{(1)}_1 * x_1)\otimes(a^{(1)}_1 * x_1)\otimes(a^{(2)}_1 * x_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a^{(2)}_1 * x_2)\otimes(a^{(2)}_1 * x_2)\otimes(a^{(2)}_1 * x_1)\otimes(a^{(2)}_1 * x_2) \end{pmatrix}.$$

Доказательство.

Зафиксируем произвольный x и обозначим $y_n = A_n x^n$ $(n = 1, 2, 3...)$. Рассмотрим оператор $C = B \circ A$. Тогда имеем

$$Cx = B(Ax) = B_1(Ax) + B_2(Ax)^2 + B_3(Ax)^3 + \ldots = B_1 y_1 + B_1 y_2 + B_1 y_3 + \ldots +$$

$$+ B_2(y_1, y_1) + B_2(y_1, y_2) + \ldots + B_2(y_1, y_n) + B_2(y_2, y_1) + B_2(y_2, y_2) + \ldots + B_2(y_2, y_n) +$$

$$+ \ldots + B_4(y_1, y_1, y_1, y_n) + B_4(y_1, y_1, y_2, y_1) + \ldots + B_4(y_1, y_1, y_n, y_n) + \ldots + B_4(y_4, y_1, y_1, y_1) +$$

$$+ B_4(y_4, y_1, y_1, y_n) + \ldots + B_4(y_4, y_n, y_n, y_n) + \ldots + B_4(y_n, y_n, y_n, y_n) + \ldots,$$

откуда получаем

$$C_4 x^4 = B_1 y_4 + B_2(y_1, y_3) + B_2(y_2, y_2) + B_2(y_3, y_1) +$$

$$+ B_3(y_2, y_1, y_1) + B_3(y_1, y_2, y_1) + B_3(y_1, y_1, y_2) + B_4(y_1, y_1, y_1, y_1),$$

т.е.

$$C_4 x^4 = B_1(A_4 x^4) + B_2(A_1 x, A_3 x^3) + B_2(A_2 x^2)^2 + B_2(A_3 x^3, A_1 x) +$$

$$+ B_3(A_2 x^2, A_1 x, A_1 x) + B_3(A_1 x, A_2 x^2, A_1 x) + B_3(A_1 x, A_1 x, A_2 x^2) + B_4(A_1 x)^4 =$$

$$= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 .$$

Найдем каждое слагаемое четвертой компоненты:

$$u_1 = B_1(A_4 x^4) = \begin{pmatrix} b^{(1)}_{0,1} & b^{(1)}_{1,0} \\ b^{(2)}_{0,1} & b^{(2)}_{1,0} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a^{(1)}_4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a^{(2)}_4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{\otimes 4} =$$

$$= \begin{pmatrix} b^{(1)}_{0,1} & b^{(1)}_{1,0} \\ b^{(2)}_{0,1} & b^{(2)}_{1,0} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a^{(1)}_4 * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ a^{(2)}_4 * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b^{(1)}_{0,1} * (a^{(1)}_4 * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + b^{(1)}_{1,0} * (a^{(2)}_4 * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) \\ b^{(2)}_{0,1} * (a^{(1)}_4 * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) + b^{(2)}_{1,0} * (a^{(2)}_4 * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \end{pmatrix}.$$

$$u_2 = B_2(A_1 x, A_3 x) = \begin{pmatrix} b^{(1)}_{0,2} & b^{(1)}_{1,1} & b^{(1)}_{2,0} \\ b^{(2)}_{0,2} & b^{(2)}_{1,1} & b^{(2)}_{2,0} \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} a^{(1)}_1 * x_1 \\ a^{(2)}_1 * x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a^{(1)}_3 * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ a^{(2)}_3 * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} \right) =$$

$$=\begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (a_1^{(1)} \otimes a_3^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_1^{(1)} \otimes a_3^{(2)}) * (x_1 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) + (a_1^{(2)} \otimes a_3^{(1)}) * (x_2 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_1^{(2)} \otimes a_3^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix},$$

$$u_3 = B_2(A_2 x)^2 = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} * x_1 \otimes x_1 \\ a_{2,0}^{(2)} * x_2 \otimes x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} * x_1 \otimes x_1 \\ a_{2,0}^{(2)} * x_2 \otimes x_2 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} \otimes a_{0,2}^{(1)} * x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \\ a_{0,2}^{(1)} \otimes a_{2,0}^{(2)} * x_1 \otimes x_1 \otimes x_2 \otimes x_2 + a_{2,0}^{(2)} \otimes a_{0,2}^{(1)} x_2 \otimes x_2 \otimes x_1 \otimes x_1 \\ a_{2,0}^{(2)} \otimes a_{2,0}^{(2)} * x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \end{pmatrix},$$

$$u_4 = B_2(A_3 x,\ A_1 x) = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_3^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ a_3^{(2)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_3^{(1)} \otimes (a_1^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) \\ (a_3^{(1)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_2) + (a_3^{(2)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_1) \\ (a_3^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix},$$

$$u_5 = B_3(A_2 x, A_1 x, A_1 x) = \begin{pmatrix} b_{0,0,3}^{(1)} & b_{0,1,2}^{(1)} & b_{0,2,1}^{(1)} & b_{1,1,1}^{(1)} & b_{0,3,0}^{(1)} & b_{1,2,0}^{(1)} & b_{2,1,0}^{(1)} & b_{3,0,0}^{(1)} \\ b_{0,0,3}^{(2)} & b_{0,1,2}^{(2)} & b_{0,2,1}^{(2)} & b_{1,1,1}^{(2)} & b_{0,3,0}^{(2)} & b_{1,2,0}^{(2)} & b_{2,1,0}^{(2)} & b_{3,0,0}^{(2)} \end{pmatrix} *$$

$$* \begin{pmatrix} (a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_1) \\ (a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} b_{0,0,3}^{(1)} * ((a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \ldots + b_{3,0,0}^{(1)} * ((a_{2,0}^{(2)} \otimes a_{1,0}^{(2)} \otimes a_{1,0}^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \\ b_{0,0,3}^{(2)} * ((a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \ldots + b_{3,0,0}^{(2)} * ((a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \end{pmatrix}.$$

Аналогично вычисляются $u_6 = B_3(A_1 x, A_2 x^2, A_1 x)$ и $u_7 = B_3(A_1 x, A_1 x, A_2 x^2)$:

$$u_6 = \begin{pmatrix} b_{0,0,3}^{(1)} * ((a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \ldots + b_{3,0,0}^{(1)} * ((a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \\ b_{0,0,3}^{(2)} * ((a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \ldots + b_{3,0,0}^{(2)} * ((a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \end{pmatrix},$$

$$u_7 = \begin{pmatrix} b_{0,0,3}^{(1)} * ((a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \ldots + b_{3,0,0}^{(1)} * ((a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \\ b_{0,0,3}^{(2)} * ((a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \ldots + b_{3,0,0}^{(2)} * ((a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \end{pmatrix},$$

Найдем последнее слагаемое u_8 компоненты:

$$u_8 = B_4(A_1 x)^4 = \begin{pmatrix} b^{(1)}_{0,0,0,4} & b^{(1)}_{0,0,1,3} & \dots & b^{(1)}_{4,0,0,0} \\ b^{(2)}_{0,0,0,4} & b^{(2)}_{0,0,1,3} & \dots & b^{(2)}_{4,0,0,0} \end{pmatrix} *$$

$$* \begin{pmatrix} (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \\ (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(2)} * x_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a_1^{(2)} * x_2) \otimes (a_1^{(2)} * x_2) \otimes (a_1^{(2)} * x_1) \otimes (a_1^{(2)} * x_2) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы вычислили все слагаемые четвертой компоненты $C_4 x^4$ оператора композиции. Теорема доказана.

Композиция составного оператора с эволюционным оператором второй кратности

Рассмотрим теперь композицию $C = B \circ A$ в случае, когда B – составной оператор и A – произвольный эволюционный оператор второго порядка. Структурная схема такой композиции представлена на рисунке1.

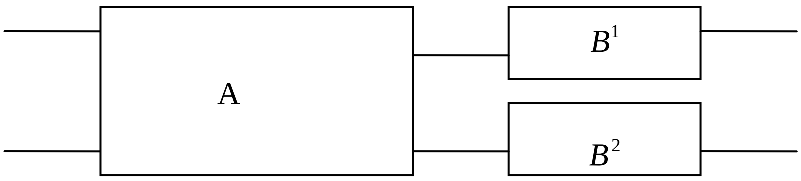

Рисунок 1 – Структурная схема композиции составного оператора с оператором второй кратности

Будем рассматривать элементы компонент в векторном виде:

$$z_1 = B^1(y_1) = \sum_{k=0}^{n} S_k (b_k^1 * y_1^{\otimes k});$$

$$z_2 = B^2(y_2) = \sum_{j=0}^{n} S_j (b_j^2 * y_2^{\otimes j});$$

$$B(y) = \begin{pmatrix} B^1(y_1) \\ B^2(y_2) \end{pmatrix};$$

$$C = (B \circ A)x;$$

$$Cx = C_1 x + C_2 x + C_3 x + \dots;$$

$$Ax = \sum_{n=n_1+n_2>0}^{n} S_{n_1+n_2} (a_{n_1,n_2} * (x_1^{\otimes n_1} \otimes x_2^{\otimes n_2})).$$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_2=0 \\ j=0}} S_i \begin{pmatrix} a_i^{(1)} * x_1^{\otimes i} \\ a_i^{(2)} * x_1^{\otimes i} \end{pmatrix} + \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha_1=0 \\ i=0}} S_i \begin{pmatrix} a_j^{(1)} * x_2^{\otimes j} \\ a_j^{(2)} * x_2^{\otimes j} \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n-1} S_n \begin{pmatrix} a_{i,n-1}^{(1)} * (x_1^{\otimes i} \otimes x_2^{\otimes (n-i)}) \\ a_{i,n-1}^{(2)} * (x_1^{\otimes i} \otimes x_2^{\otimes (n-1)}) \end{pmatrix}.$$

Определим первые компоненты композиции.

Выделим первую и вторую однородные операторные компоненты оператора второй кратности:

$$A_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} * x_1 \\ a_{0,1}^{(2)} * x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} * x_2 \\ a_{0,1}^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,0}^{(1)} * x_1 + a_{1,0}^{(1)} * x_2 \\ a_{1,0}^{(2)} * x_1 + a_{1,0}^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} & a_{1,0}^{(1)} \\ a_{0,1}^{(2)} & a_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$A_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} * x_1^{\otimes(2,0)} \\ a_{0,2}^{(2)} * x_1^{\otimes(2,0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} * x_2^{\otimes(0,2)} \\ a_{0,2}^{(2)} * x_2^{\otimes(0,2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} * x_1^{\otimes(1,1)} \\ a_{1,1}^{(2)} * x_2^{\otimes(1,1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} & a_{1,1}^{(1)} & a_{2,0}^{(1)} \\ a_{0,2}^{(2)} & a_{1,1}^{(2)} & a_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1^{\otimes 2} \\ x_1 \otimes x_2 \\ x_2^{\otimes 2} \end{pmatrix},$$

где $x^{(2,0)}(t_1,t_2) = x_1(t_1)\cdot x_1(t_2)$, $x^{(0,2)}(t_1,t_2) = x_2(t_1)\cdot x_2(t_2)$, $x^{(1,1)}(t_1,t_2) = x_1(t_1)\cdot x_2(t_2)$,

$S_2\begin{pmatrix} f^{(1)}(t_1,t_2) \\ f^{(2)}(t_1,t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{(1)}(t,t) \\ f^{(2)}(t,t) \end{pmatrix}$, $S_2(u*v)(t) = \langle u(s_1,s_2), v(t-s_1,t-s_2)\rangle$.

$$C = (B \circ A)x;$$

$$Cx = C_1x + C_2x + C_3x + \ldots.$$

$$Cx = \begin{pmatrix} B_1^1(A_1(x)) + B_1^1(A_2(x)) + \ldots + B_1^1(A_{n_1n_2}(x)) + \ldots + B_2^1(A_1(x)) + B_2^1(A_2(x)) + \ldots + B_2^1(A_{n_1n_2}(x)) + \ldots + \\ B_1^2(A_1(x)) + B_1^2(A_2(x)) + B_1^2(A_{n_1n_2}(x)) + \ldots + B_2^2(A_1(x)) + B_2^2(A_2(x)) + \ldots + B_2^2(A_{n_1n_2}(x)) + \ldots + \end{pmatrix}$$

Тогда найдем первую компоненту композиции

$$C_1x = B_1(A_1x);\ C_1x = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & 0 \\ 0 & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} & a_{1,0}^{(1)} \\ a_{0,1}^{(2)} & a_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

$$C_1x = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} * a_{0,1}^{(1)} & b_{0,1}^{(1)} * a_{1,0}^{(1)} \\ b_{1,0}^{(2)} * a_{0,1}^{(2)} & b_{1,0}^{(2)} * a_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$$

$$C_1x = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} * a_{0,1}^{(1)} * x_1 + b_{0,1}^{(1)} * a_{1,0}^{(1)} * x_2 \\ b_{1,0}^{(2)} * a_{0,1}^{(2)} * x_1 + b_{1,0}^{(2)} * a_{1,0}^{(2)} * x_2 \end{pmatrix};$$

$$C_1^1x = \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2)\int_0^{+\infty} a_{0,1}^{(1)}(s_1)x_1(t-s_1-s_2)ds_1ds_2 + \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2)\int_0^{+\infty} a_{1,0}^{(1)}(s_1)x_2(t-s_1-s_2)ds_1ds_2;$$

$$C_1^2x = \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2)\int_0^{+\infty} a_{0,1}^{(2)}(s_1)x_1(t-s_1-s_2)ds_1ds_2 + \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2)\int_0^{+\infty} a_{1,0}^{(2)}(s_1)x_2(t-s_1-s_2)ds_1ds_2.$$

Итак, первую компоненту можно записать в виде:

$$C_1^1x = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2)a_{0,1}^{(1)}(s_1)x_1(t-s_1-s_2)ds_1ds_2 + \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2)a_{1,0}^{(1)}(s_1)x_2(t-s_1-s_2)ds_1ds_2;$$

$$C_1^1x = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}(b_{0,1}^{(1)}(s_2)a_{0,1}^{(1)}(s_1)x_1(t-s_1-s_2) + b_{0,1}^{(1)}(s_2)a_{1,0}^{(1)}(s_1)x_2(t-s_1-s_2))ds_1ds_2;$$

$$C_1^2x = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2)a_{0,1}^{(2)}(s_1)x_1(t-s_1-s_2)ds_1ds_2 + \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2)a_{1,0}^{(2)}(s_1)x_2(t-s_1-s_2)ds_1ds_2;$$

$$C_1^2x = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}(b_{1,0}^{(2)}(s_2)a_{0,1}^{(2)}(s_1)x_1(t-s_1-s_2) + b_{1,0}^{(2)}(s_2)a_{1,0}^{(2)}(s_1)x_2(t-s_1-s_2))ds_1ds_2.$$

Тогда первая компонента оператора композиции описывается аналитически следующими зависимостями:

$$C_1^1 x = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2)(a_{0,1}^{(1)}(s_1)x_1(t-s_1-s_2)+a_{1,0}^{(1)}(s_1)x_2(t-s_1-s_2))ds_1ds_2\,;$$

$$C_1^2 x = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2)(a_{0,1}^{(2)}(s_1)x_1(t-s_1-s_2)+a_{1,0}^{(2)}(s_1)x_2(t-s_1-s_2))ds_1ds_2\,.$$

Рассмотрим вторую компоненту:

$$C_2 x = B_2(A_1x, A_1x) + A_2(B_1x, B_1x);$$

$$C_2x = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} & a_{1,0}^{(1)} \\ a_{0,1}^{(2)} & a_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} & a_{1,0}^{(1)} \\ a_{0,1}^{(2)} & a_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & b_{1,0}^{(1)} \\ b_{0,1}^{(2)} & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & b_{1,0}^{(1)} \\ b_{0,1}^{(2)} & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} & a_{1,1}^{(1)} & a_{2,0}^{(1)} \\ a_{0,2}^{(2)} & a_{1,1}^{(2)} & a_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$$

$$C_2x = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} & a_{1,0}^{(1)} \\ a_{0,1}^{(2)} & a_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} * x_1 + a_{1,0}^{(1)} * x_2 \\ a_{0,1}^{(2)} * x_1 + a_{1,0}^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} & a_{1,1}^{(1)} & a_{2,0}^{(1)} \\ a_{0,2}^{(2)} & a_{1,1}^{(2)} & a_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$$

$$C_2x = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & 0 \\ 0 & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} * (a_{0,1}^{(1)} * x_1 + a_{1,0}^{(1)} * x_2) + a_{1,0}^{(1)} * (a_{0,1}^{(2)} * x_1 + a_{1,0}^{(2)} * x_2) \\ a_{0,1}^{(2)} * (a_{0,1}^{(1)} * x_1 + a_{1,0}^{(1)} * x_2) + a_{1,0}^{(2)} * (a_{0,1}^{(2)} * x_1 + a_{1,0}^{(2)} * x_2) \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & 0 \\ 0 & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & 0 \\ 0 & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} * x_1 \otimes x_1 + a_{1,1}^{(1)} * x_1 \otimes x_2 + a_{2,0}^{(1)} * x_2 \otimes x_2 \\ a_{0,2}^{(2)} * x_1 \otimes x_1 + a_{1,1}^{(2)} * x_1 \otimes x_2 + a_{2,0}^{(2)} * x_2 \otimes x_2 \end{pmatrix}.$$

Будем рассматривать строки матриц как элементы компоненты. Тогда справедливы следующие формулы:

$$C_2^1 x = b_{0,2}^{(1)} * (a_{0,1}^{(1)} * (a_{0,1}^{(1)} * x_1 + a_{1,0}^{(1)} * x_2) + a_{1,0}^{(1)} * (a_{0,1}^{(2)} * x_1 + a_{1,0}^{(2)} * x_2)) +$$
$$+ b_{0,1}^{(1)} * b_{0,1}^{(1)} * \left(a_{0,2}^{(1)} * x_1 \otimes x_1 + a_{1,1}^{(1)} * x_1 \otimes x_2 + a_{2,0}^{(1)} * x_2 \otimes x_2\right);$$

$$C_2^1 x = \int\limits_0^{+\infty} b_{0,2}^{(1)}(s_2) \int\limits_0^{+\infty} a_{0,1}^{(1)}(s_2)((a_{0,1}^{(1)}(s_1)x_1(t_1-s_1-s_2)+a_{1,0}^{(1)}(s_1)x_2(t_1-s_1-s_2))ds_1ds_2 +$$
$$+\int\limits_0^{+\infty} b_{0,2}^{(1)}(s_2) \int\limits_0^{+\infty} a_{1,0}^{(1)}(s_2)((a_{0,1}^{(2)}(s_1)x_1(t_1-s_1-s_2)+a_{1,0}^{(2)}(s_1)x_2(t_1-s_1-s_2))ds_1ds_2 +$$
$$+\int\limits_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2) \int\limits_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_1)a_{0,2}^{(1)}(s_1)x_1(t_1-s_1-s_2)x_1(t_2-s_1-s_2)ds_1ds_2 +$$
$$+\int\limits_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2) \int\limits_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_1)a_{1,1}^{(1)}(s_1)x_1(t_1-s_1-s_2)x_2(t_1-s_1-s_2)ds_1ds_2 +$$
$$+\int\limits_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2) \int\limits_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_1)a_{2,0}^{(1)}(s_1)x_2(t_1-s_1-s_2)x_2(t_2-s_1-s_2)ds_1ds_2;$$

$$C_2^2 x = b_{2,0}^{(2)} * (a_{0,1}^{(2)} * (a_{0,1}^{(1)} * x_1 + a_{1,0}^{(1)} * x_2) + a_{1,0}^{(2)} * (a_{0,1}^{(2)} * x_1 + a_{1,0}^{(2)} * x_2)) +$$
$$+ b_{1,0}^{(2)} * b_{1,0}^{(2)} * (a_{0,2}^{(2)} * x_1 \otimes x_1 + a_{1,1}^{(2)} * x_1 \otimes x_2 + a_{2,0}^{(2)} * x_2 \otimes x_2);$$

$$C_2^2 x = \int\limits_0^{+\infty} b_{2,0}^{(2)}(s_2) \int\limits_0^{+\infty} a_{0,1}^{(2)}(s_2)((a_{0,1}^{(1)}(s_1)x_1(t_1-s_1-s_2)+a_{1,0}^{(1)}(s_1)x_2(t_1-s_1-s_2))ds_1ds_2 +$$

$$+\int_0^{+\infty} b_{2,0}^{(2)}(s_2)\int_0^{+\infty} a_{1,0}^{(2)}(s_2)((a_{0,1}^{(2)}(s_1)x_1(t_1-s_1-s_2)+a_{1,0}^{(2)}(s_1)x_2(t_1-s_1-s_2))ds_1ds_2+$$

$$+\int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2)\int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_1)a_{0,2}^{(2)}(s_1)x_1(t_1-s_1-s_2)x_1(t_2-s_1-s_2)ds_1ds_2+$$

$$+\int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2)\int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_1)a_{1,1}^{(2)}(s_1)x_1(t_1-s_1-s_2)x_2(t_1-s_1-s_2)ds_1ds_2+$$

$$+\int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2)\int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_1)a_{2,0}^{(2)}(s_1)x_2(t_1-s_1-s_2)x_2(t_2-s_1-s_2)ds_1ds_2.$$

Выше изложенные рассуждения позволяют описать структуру компонент композиции составного оператора с эволюционным оператором второй кратности.

Заключение

В статье рассмотрена задача определения обобщенных импульсных характеристик композиции двух эволюционных операторов второй кратности, один из которых является составным оператором. Полученные результаты найдут применение в теории нелинейных эволюционных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вувуникян, Ю.М. Составные эволюционные операторы второго порядка кратности / Ю.М. Вувуникян, И.В. Трифонова // Известия Смоленского гос. ун-та. – 2012. – № 2 (18). – С. 429–440.

2. Трифонова, И.В. Композиция оператора второй кратности с составным эволюционным оператором / И.В. Трифонова // Веснік Гродзен. дзярж. ўн-та імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2011. – № 3 (118). – С. 19–30

3. Вувуникян, Ю.М. Эволюционные операторы с обобщёнными импульсными и спектральными характеристиками : монография / Ю.М. Вувуникян. – Гродно : ГрГУ, 2007. – 224 с.

Y.M. Vuvunikjan, I.V. Trifonova. **Components of High Orders of Composition of the Evolution Operator and the Compound Operator**

This article describes the nonlinear evolution operator of second multiplicity with two-component generalized vector functions with support on $[0;+\infty)^2$. The theorem for the fourth components of a composition the evolutionary operator with the compound operator is proved. The evolutionary operator of second multiplicity is used while studying the nonlinear multi-size evolution systems with two input and output signals. The received results will find application in the theory of nonlinear evolutionary systems.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 22.11.2012