УДК 517.977

Д.А. Будько, А.Н. Прокопеня

ПОЛОЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ И АНАЛИЗ ИХ УСТОЙЧИВОТИ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ЧЕТЫРЁХ ТЕЛ

В данной работе рассмотрена проблема устойчивости равновесных решений пространственной Ньютоновой круговой ограниченной задачи четырёх тел, сформулированной на основе известных треугольных решений Лагранжа задачи трёх тел. Использование возможностей системы компьютерной алгебры *Mathematica* позволило построить вещественное каноническое преобразование по Биркгофу, приводящее функцию Гамильтона к нормальной форме до четвёртого порядка включительно по возмущениям. Применяя теоремы Арнольда и Маркеева, доказали, что три положения равновесия устойчивы для большинства начальных условий, если массовые параметры системы принадлежат областям линейной устойчивости на плоскости параметров. Показано, что при выполнении резонансных соотношений $\sigma_1 - 2\sigma_2 = 0$ и $\sigma_1 - 3\sigma_2 = 0$ в системе наблюдается неустойчивость положений равновесия, в то время как остальные резонансы третьего и четвёртого порядков не влияют на устойчивость.

Введение

Задача многих тел, сформулированная ещё Ньютоном, по сегодняшний день остаётся одной из самых исследуемых проблем естествознания [1]. Проблема заключается в изучении движения конечного числа массивных материальных точек под действием сил взаимного притяжения, определяемого законом всемирного тяготения. Общее решение этой задачи до сих пор не найдено и, более того, доказано [1; 2], что уравнения движения задачи трёх и более тел не могут быть проинтегрированы в конечном виде. Одним из наиболее плодотворных подходов к решению проблемы многих тел является поиск точных частных решений уравнений движения, простейшими из которых являются положения равновесия, и исследование их устойчивости. Такой подход, идеи которого восходят к Пуанкаре и Ляпунову, хорошо себя зарекомендовал в случае ограниченной задачи трёх тел и успешно применяется в современных исследованиях [3–5], в том числе благодаря использованию современных систем компьютерной алгебры. Иногда решения типа «положения равновесия» называют «положениями относительного равновесия», чтобы подчеркнуть, что такие решения существуют во вращающейся системе координат, а не в абсолютной.

Ранее в [6] была исследована плоская круговая ограниченная задача четырёх тел, сформулированная на основе треугольных решений Лагранжа. Эта задача является простым и естественным обобщением плоской круговой ограниченной задачи трёх тел. Напомним, что в рамках рассматриваемой модели три материальные точки P_0, P_1, P_2, обладающие массами m_0, m_1, m_2, движутся равномерно по круговым кеплеровским орбитам вокруг центра масс системы, образуя равносторонний треугольник в любой момент времени. Такое движение трёх тел известно в литературе как треугольное решение Лагранжа задачи трёх тел. Представляет интерес исследование движения четвёртого тела P_3, обладающего пренебрежимо малой массой, в гравитационном поле, генерируемом телами P_0, P_1, P_2.

Стоить отметить, что представленная ограниченная задача четырёх тел может иметь важные приложения в небесной механике при описании движения астероидов, а также при планировании траекторий искусственных спутников в космическом пространстве, поскольку даже в Солнечной системе реализуются конфигурации, близкие к рассматриваемой. Наиболее характерным примером служит конфигурация образованная Солнцем, Юпитером и любым из астероидов из троянской или греческой группы астероидов. Поскольку массы астероидов различны, можно выделить наиболее массивный астероид и считать, что именно он вместе с Солнцем и Юпитером образует треугольную конфигурацию. Пренебрегая массами остальных астероидов, можно считать, что они не влияют на движение трёх массивных тел и движутся в гравитационном поле, генерируемым этими телами. Тогда проблема состоит в том, чтобы исследовать движение одного из «безмассовых» астероидов, что полностью соответствует представленной математической формулировке задачи четырёх тел. Решение этой задачи способствует развитию теории движения астероидов в окрестности треугольных точек Лагранжа, что несомненно представляет научную и практическую значимость исследований по данной тематике.

Данная работа является обобщением работы [6] и посвящена анализу устойчивости положений равновесий в пространственной круговой ограниченной задаче четырёх тел, когда тело P_3 движется в окрестности положения равновесия в трех измерениях. Рассматриваемая модель ограниченной задачи четырёх тел описывается гамильтоновой системой дифференциальных уравнений шестого порядка. Отметим, что анализ такой системы предполагает проведение громоздких символьных преобразований и расчётов, которые могут быть выполнены только с привлечением компьютера и использованием современного математического программного обеспечения. Здесь все вычисления, преобразования и визуализация результатов были выполнены с помощью системы компьютерной алгебры *Mathematica* [7].

Во вращающейся системе координат, в которой тела P_0, P_1, P_2 фиксированы на плоскости Oxy в точках $(0,0)$, $(1,0)$ и $(1/2,\sqrt{3}/2)$ соответственно, функция Гамильтона системы может быть записана в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
H=\frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+p_x\,y-p_y\,x+ \\
+\frac{1}{1+\mu_1+\mu_2}\Big(\mu_1 x+\frac{\mu_2}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_2 y-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}- \\
-\frac{\mu_1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}}-\frac{\mu_1}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+z^2}}\Big)
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где p_x, p_y, p_z – импульсы, канонически сопряжённые координатам x, y, z, и массовые параметры задаются формулами:

$$\mu_1=m_1/m_0,\ \mu_2=m_2/m_0.$$

Зная функцию Гамильтона, несложно выписать уравнения движения тела P_3 и показать, что все положения равновесия лежат в плоскости Oxy ($z=0$). При этом соответствующие равновесные положения определяются двумя алгебраическими уравнениями, которые могут быть представлены в виде

$$(y - x\sqrt{3})\left(\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} - 1\right) - \mu_1(y + \sqrt{3}(x-1))\left(\frac{1}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}} - 1\right) = 0$$

$$2y\left(\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} - 1\right) + \tag{2}$$

$$+\mu_2(y + \sqrt{3}(x-1))\left(\frac{1}{((x-1/2)^2+(y-\sqrt{3}/2)^2)^{3/2}} - 1\right) = 0.$$

Каждое уравнение системы (2) определяет кривую в плоскости Oxy. Поэтому каждому решению системы уравнений (2) соответствует точка пересечения двух кривых (рисунок 1). Отметим, что для любого заданного $\mu_1 > 0$, жирная штриховая линия на рисунке 1, определяемая первым уравнением системы (1), фиксирована и всегда проходит через точки P_0, P_1, P_2 и $(1/2, -\sqrt{3}/2)$.

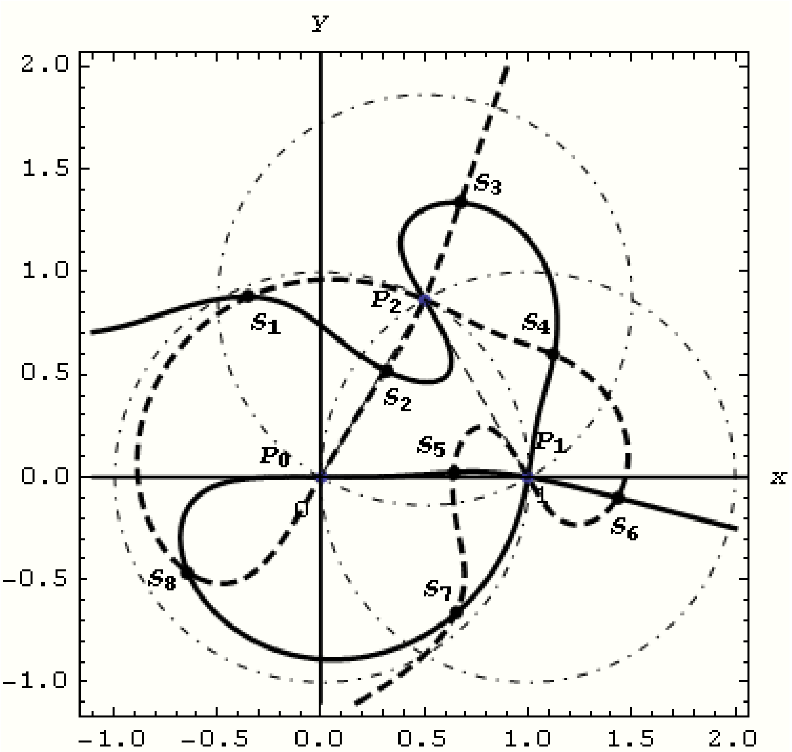

Рисунок 1 – Равновесные положения $S_1, S_2, \ldots S_8$,
определяемые системой (2) при $\mu_1 = 0.25,\ \ \mu_2 = 0.35$

В случае $\mu_2 = 0$ сплошная кривая, определяемая вторым уравнением системы (2), вырождается в прямую $y = 0$ и окружность $x^2 + y^2 = 1$. Отсюда, система (2) имеет три корня на оси Ox и два корня в точках P_2 и $(1/2, -\sqrt{3}/2)$. Эти пять корней соответствуют точкам либрации L_1, L_2, L_3 и L_4, L_5 в задаче трёх тел [3; 8]. Увеличивая значение μ_2, легко заметить, что три равновесных точки, расположенные на оси Ox при $\mu_2 = 0$, а также точка $(1/2, -\sqrt{3}/2)$, постепенно перемещаются в плоскости Oxy вдоль штриховой кривой (положения равновесия $S_5 - S_8$ на рисунке 1). Точка $x = 1/2$, $y = \sqrt{3}/2$ генерирует четыре новых равновесных положения (точки $S_1 - S_4$ на рисунке 1), каждое их которых по своей ветви штриховой кривой исходит из точки P_2. Таким образом, графический анализ показывает, что при малых значениях μ_1, μ_2 имеется ровно восемь решений системы (2).

Проблема поиска равновесных решений рассматриваемой задачи подробно описана в работе [9], поэтому будем считать положения равновесия (x_0, y_0) тела P_3 найденными для любых значений параметров μ_1, μ_2.

Анализ устойчивости положений равновесия в первом приближении

В окрестности равновесного решения (x_0, y_0) функция Гамильтона (1) может быть представлена в виде:

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots \tag{3}$$

Первый член H_0 разложения функции Гамильтона по возмущениям является постоянной, которая не влияет на уравнения движения, и может быть отброшен. Член H_1 обнуляется в силу уравнений (2). Поэтому первый отличный от нуля член в разложении (3) является квадратичным и имеет вид:

$$\begin{aligned} H_2 = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) - p_y x + p_x y + \\ + h_{20}x^2 + h_{11}xy + h_{02}y^2 + h_{2z}z^2, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$h_{20} = \frac{-1}{2(1+\mu_1+\mu_2)}\left(\frac{2x_0^2 - y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^{5/2}} + \right.$$

$$\left. + \mu_1 \frac{2(x_0-1)^2 - y_0^2}{((x_0-1)^2+y_0^2)^{5/2}} + \mu_2 \frac{2(x_0-1/2)^2 - (y_0-\sqrt{3}/2)^2}{((x_0-1/2)^2+(y_0-\sqrt{3}/2)^2)^{5/2}}\right),$$

$$h_{11} = \frac{-3}{(1+\mu_1+\mu_2)}\left(\frac{x_0 y_0}{(x_0^2+y_0^2)^{5/2}} + \right.$$

$$\left. + \mu_1 \frac{(x_0-1)y_0}{((x_0-1)^2+y_0^2)^{5/2}} + \mu_2 \frac{(x_0-1/2)(y_0-\sqrt{3}/2)}{((x_0-1/2)^2+(y_0-\sqrt{3}/2)^2)^{5/2}}\right),$$

$$h_{02} = \frac{1}{2(1+\mu_1+\mu_2)}\left(\frac{x_0^2 - 2y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^{5/2}} + \right.$$

$$+\mu_1\frac{(x_0-1)^2-2y_0^2}{((x_0-1)^2+y_0^2)^{5/2}}+\mu_2\frac{(x_0-1/2)^2-2(y_0-\sqrt{3}/2)^2}{((x_0-1/2)^2+(y_0-\sqrt{3}/2)^2)^{5/2}}\Bigg)$$

$$h_{2z}=\frac{1}{2(1+\mu_1+\mu_2)}\Bigg(\frac{1}{(x_0^2+y_0^2)^{3/2}}+$$

$$+\frac{\mu_1}{((x_0-1)^2+y_0^2)^{3/2}}+\frac{\mu_2}{((x_0-1/2)^2+(y_0-\sqrt{3}/2)^2)^{3/2}}\Bigg).$$

Несложно показать, что линеаризованные уравнения движения, определённые квадратичным членом (4), образуют систему линейных дифференциальных уравнений шестого порядка с постоянными коэффициентами. Характеристические показатели такой системы легко могут быть найдены и записаны в виде

$$\lambda_{1,2}=\pm i\,\sigma_1,\qquad \lambda_{3,4}=\pm i\,\sigma_2,\qquad \lambda_{5,6}=\pm i\,\sigma_3, \tag{5}$$

где i – мнимая единица, а частоты $\sigma_1,\ \sigma_2, \sigma_3$ задаются выражениями

$$\sigma_{1,2}=\sqrt{1+h_{20}+h_{02}\pm\sqrt{4h_{20}+h_{20}^2+h_{11}^2+4h_{02}-2h_{20}h_{02}+h_{02}^2}}\ ,$$

$$\sigma_3=\sqrt{2h_{2z}}\ . \tag{6}$$

Анализ частот (6) для всех восьми положений равновесия показал [6], что для точек $S_2,\ S_3,\ S_5,\ S_6,\ S_8$ имеется хотя бы одна частота с мнимой частью при любых значениях параметров $\mu_1,\ \mu_2$. Это означает, что эти пять равновесных решений неустойчивы. Положения $S_1,\ S_4,\ S_7$ устойчивы в первом приближении, если параметры $\mu_1,\ \mu_2$ достаточно малы. Границы таких областей на плоскости $O\mu_1\mu_2$ построены и приведены в [6] вместе с некоторыми резонансными кривыми третьего и четвёртого порядков.

Нормализация функции Гамильтона

Наиболее распространённым методом изучения гамильтоновых систем нелинейных дифференциальных уравнений является метод нормальных форм Пуанкаре [5]. Следуя этому подходу, мы должны построить вещественное каноническое преобразование, приводящее гамильтониан системы к нормальной форме по Биркгофу [10] и применить теоремы Арнольда и Мозера [11, 12]. На практике это означает последовательное приведение к нормальной форме членов $H_2,\ H_3,\ H_4...$ в разложении (3).

Процедура нормализации квадратичной части H_2 описана в [3], а также в [13], где кроме подробного описания, приведены соответствующие алгоритмы и их реализация в системе *Mathematica*. Выполняя необходимые символьные вычисления, получаем H_2 в следующем виде:

$$H_2=\frac{1}{2}\Big(\sigma_1(p_1^2+q_1^2)-\sigma_2(p_2^2+q_2^2)+\sigma_3(p_3^2+q_3^2)\Big). \tag{7}$$

где $p_1,q_1,\ p_2,q_2$ и p_3,q_3 три пары новых канонически сопряжённых переменных.

По виду квадратичной формы (7) видно, что она не является знакоопределённой функцией, поэтому нельзя сделать вывод об устойчивости или неустойчивости положений равновесия по первому приближению в рамках теорем Ляпунова [14].

Форма третьего порядка H_3 после применения канонической замены переменных для H_2 принимает вид:

$$H_3 = \sum_{i+j+k+l+m+n=3} h^{(3)}_{ijklmn} q_1^i q_2^j q_3^k p_1^l p_2^m p_3^n, \tag{8}$$

где 31 коэффициент $h^{(3)}_{ijklmn}$ являются нулями, а остальные 25 коэффициентов довольно громоздкие и поэтому здесь не выписаны.

Процедура построения нормализующего преобразования для членов H_3, H_4 во многом схожа с описанной на примере плоской ограниченной задачи четырёх тел в работе [6].

Снова необходимо построить такое каноническое преобразование, которое позволит обнулить член H_3 в разложении гамильтониана (3). Поскольку $q_1, q_2, q_3\ p_1, p_2, p_3$ представляют собой возмущения равновесных решений, то каноническое преобразование должно быть близким к тождественному. Поэтому производящую функцию $S(q_1, q_2, q_3\ \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$ будем искать в виде полинома степени не выше третьей:

$$S(q_1, q_2, q_3\ \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3) = q_1\tilde{p}_1 + q_2\tilde{p}_2 + q_3\tilde{p}_3 + \\ + \sum_{i+j+k+l+m+n=3} s^{(3)}_{ijkl} q_1^i q_2^j q_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n. \tag{9}$$

Тогда связь между «старыми» $q_1, q_2, q_3\ p_1, p_2, p_3$ и «новыми» каноническими переменными $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3$ определяется следующими соотношениями:

$$\tilde{q}_1 = \frac{\partial S(q_1, q_2, q_3\ \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)}{\partial \tilde{p}_1}, \quad \tilde{q}_2 = \frac{\partial S(q_1, q_2, q_3\ \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)}{\partial \tilde{p}_2},$$
$$\tilde{q}_3 = \frac{\partial S(q_1, q_2, q_3\ \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)}{\partial \tilde{p}_3}, \quad p_1 = \frac{\partial S(q_1, q_2, q_3\ \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)}{\partial q_1}, \tag{10}$$
$$p_2 = \frac{\partial S(q_1, q_2, q_3\ \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)}{\partial q_2}, \quad p_3 = \frac{\partial S(q_1, q_2, q_3\ \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)}{\partial q_3}.$$

Для преобразования H_3 требуется разрешить систему уравнений (10) относительно старых канонических переменных. Поскольку искомое каноническое преобразование является близким к тождественному, решение уравнений (10) можно искать в виде степенных рядов по новым переменным, то есть в виде:

$$q_1 = \tilde{q}_1 + \sum_{i+j+k+l+m+n=2} a^{(2)}_{ijklmn} \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \sum_{i+j+k+l+m+n=3} a^{(3)}_{ijklmn} \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \ldots,$$

$$q_2 = \tilde{q}_2 + \sum_{i+j+k+l+m+n=2} b^{(2)}_{ijklmn} \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \sum_{i+j+k+l+m+n=3} b^{(3)}_{ijklmn} \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \ldots,$$

$$q_3 = \tilde{q}_3 + \sum_{i+j+k+l+m+n=2} c^{(2)}_{ijklmn}\, \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \sum_{i+j+k+l+m+n=3} c^{(3)}_{ijklmn}\, \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \ldots, \quad (11)$$

$$p_1 = \tilde{p}_1 + \sum_{i+j+k+l+m+n=2} d^{(2)}_{ijklmn}\, \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \sum_{i+j+k+l+m+n=3} d^{(3)}_{ijklmn}\, \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \ldots,$$

$$p_2 = \tilde{p}_2 + \sum_{i+j+k+l+m+n=2} e^{(2)}_{ijklmn}\, \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \sum_{i+j+k+l+m+n=3} e^{(3)}_{ijklmn}\, \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \ldots,$$

$$p_3 = \tilde{p}_3 + \sum_{i+j+k+l+m+n=2} f^{(2)}_{ijklmn}\, \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \sum_{i+j+k+l+m+n=3} f^{(3)}_{ijklmn}\, \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \ldots,$$

где коэффициенты $a^{(2)}_{ijklmn}, a^{(3)}_{ijklmn}$, $b^{(2)}_{ijklmn}, b^{(3)}_{ijklmn}$, $c^{(2)}_{ijklmn}, c^{(3)}_{ijklmn}$, $d^{(2)}_{ijklmn}, d^{(3)}_{ijklmn}$ $e^{(2)}_{ijklmn}, e^{(3)}_{ijklmn}$, $f^{(2)}_{ijklmn}, f^{(3)}_{ijklmn}$ подлежат определению. Для этого подставляем выражения (11) в (10), приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях в каждом уравнении (10) и получаем систему линейных уравнений, решение которой и даёт искомые коэффициенты $a^{(2)}_{ijklmn}, a^{(3)}_{ijklmn}$, $b^{(2)}_{ijklmn}, b^{(3)}_{ijklmn}$, $c^{(2)}_{ijklmn}, c^{(3)}_{ijklmn}$, $d^{(2)}_{ijklmn}, d^{(3)}_{ijklmn}$ $e^{(2)}_{ijklmn}, e^{(3)}_{ijklmn}$, $f^{(2)}_{ijklmn}, f^{(3)}_{ijklmn}$. Эти коэффициенты, как и система (10), зависит от пока неизвестных $s^{(3)}_{ijklmn}$. Замену переменных (11) с найденными коэффициентами $a^{(2)}_{ijklmn}, a^{(3)}_{ijklmn}$, $b^{(2)}_{ijklmn}, b^{(3)}_{ijklmn}$, $c^{(2)}_{ijklmn}, c^{(3)}_{ijklmn}$, $d^{(2)}_{ijklmn}, d^{(3)}_{ijklmn}$ $e^{(2)}_{ijklmn}, e^{(3)}_{ijklmn}$, $f^{(2)}_{ijklmn}, f^{(3)}_{ijklmn}$ обозначим как *SpatialChangePQ3*. Отметим, что для получения преобразованного выражения H_3 достаточно в разложении (11) ограничиться членами второго порядка по новым переменным, члены более высокого порядка следует учитывать при нормализации члена H_4.

Применяя подстановку *SpatialChangePQ3* в (3) разложим гамильтониан в ряд Тейлора по степеням $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3$. Легко проверить, что квадратичный член H_2 будет иметь вид (7), в то время как H_3 будет суммой 56 слагаемых вида

$$\tilde{H}_3 = \sum_{i+j+k+l+m+n=3} \tilde{h}^{(3)}_{ijkl}\, \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n,$$

где новые коэффициенты $\tilde{h}^{(3)}_{ijklmn}$ выражаются через старые $h^{(3)}_{ijklmn}$ и неизвестные коэффициенты $s^{(3)}_{ijklmn}$ производящей функции (9). Анализ этих коэффициентов показывает, что члены H_3 преобразованием (11) обнуляются при условии

$$\sigma_1 - 2\sigma_2 \neq 0, \quad (12)$$

что означает отсутствие резонанса третьего порядка. Следует отметить, что другие резонансы третьего порядка не влияют на приведение члена H_3 к нормальной форме, то есть к нулю.

Следующим шагом является нормализация членов гамильтониана четвёртого порядка H_4 при выполнении условия (12). Применим к члену H_4 последовательно замены переменных, приводящие члены H_2 и H_3 к нормальной форме. Далее аналогичным образом введём новую каноническую замену переменных и получим коэффициент $\tilde{H}_4$ в виде суммы 126 слагаемых:

$$\tilde{H}_4 = \sum_{i+j+k+l+m+n=4} \tilde{h}^{(4)}_{ijklmn} \, \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n . \qquad (13)$$

В этом случае не удастся приравнять все $\tilde{h}^{(4)}_{ijklmn}$ к нулю, и определённые члены в разложении (13) останутся. Но используя приём, описанный в [6], можно привести коэффициент $\tilde{H}_4$ в разложении (3) к виду

$$\tilde{H}_4 = c_{200}(\tilde{p}_1^2 + \tilde{q}_1^2)^2 + c_{110}(\tilde{p}_1^2 + \tilde{q}_1^2)(\tilde{p}_2^2 + \tilde{q}_2^2) + c_{101}(\tilde{p}_1^2 + \tilde{q}_1^2)(\tilde{p}_3^2 + \tilde{q}_3^2) +$$
$$+ c_{020}(\tilde{p}_2^2 + \tilde{q}_2^2)^2 + c_{011}(\tilde{p}_2^2 + \tilde{q}_2^2)(\tilde{p}_3^2 + \tilde{q}_3^2) + c_{002}(\tilde{p}_3^2 + \tilde{q}_3^2)^2 , \qquad (14)$$

где выражения c_{200}, c_{020}, c_{002}, c_{110}, c_{011}, c_{101} определены формулами

$$c_{200} = (3h^{(4)}_{000400} + h^{(4)}_{200200} + 3h^{(4)}_{400000})/2,$$
$$c_{011} = h^{(4)}_{000022} + h^{(4)}_{002020} + h^{(4)}_{020002} + h^{(4)}_{022000},$$
$$c_{002} = (3h^{(4)}_{000004} + h^{(4)}_{002002} + 3h^{(4)}_{004000})/2,$$
$$c_{101} = h^{(4)}_{000202} + h^{(4)}_{002200} + h^{(4)}_{200002} + h^{(4)}_{202000},$$
$$c_{020} = (3h^{(4)}_{000040} + h^{(4)}_{020020} + 3h^{(4)}_{040000})/2,$$
$$c_{110} = h^{(4)}_{000220} + h^{(4)}_{020200} + h^{(4)}_{200020} + h^{(4)}_{220000},$$

а формулы $h^{(4)}_{ijklmn}$ суть коэффициенты члена H_4 после преобразования, построенного для H_3. Стоит отметить, что в общем случае приведение члена $\tilde{H}_4$ к виду (14) возможно только при отсутствии резонансов до четвёртого порядка включительно. Вычисления показывают, что в рассматриваемом случае имеет место три резонансных соотношения четвёртого порядка, а именно:

$$\sigma_1 - 3\sigma_2 = 0, \; \sigma_3 - 3\sigma_2 = 0, \; 2\sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_2 = 0 .$$

При этом только в случае первого из указанных резонансов в выражении (14) остаются несколько дополнительных слагаемых, которые нельзя обнулить. Во втором и третьем случаях соответствующие слагаемые обнуляются, и эти два резонанса четвертого порядка не влияют на устойчивость положений равновесия.

Применяя ещё одно стандартное каноническое преобразование

$$\tilde{q}_1 \to \sqrt{2\tau_1}\sin(\varphi_1), \; \tilde{p}_1 \to \sqrt{2\tau_1}\cos(\varphi_1),$$
$$\tilde{q}_2 \to \sqrt{2\tau_2}\sin(\varphi_2), \; \tilde{p}_2 \to \sqrt{2\tau_2}\cos(\varphi_2),$$

окончательно перепишем функцию Гамильтона (3) в виде:

$$\tilde{H} = \sigma_1\tau_1 - \sigma_2\tau_2 + \sigma_3\tau_3 + \qquad (15)$$
$$+ c_{200}\tau_1^2 + c_{110}\tau_1\tau_2 + c_{101}\tau_1\tau_3 + c_{011}\tau_2\tau_3 + c_{020}\tau_2^2 + c_{002}\tau_3^2 ,$$

в котором отброшены члены порядка $O((\tau_1+\tau_2+\tau_3)^{5/2})$.

Основываясь на результатах В.И. Арнольда [15], докажем устойчивость для большинства начальных условий положений равновесия $q_i=0,\ p_i=0$, $(i=1,\ 2,3)$ при отсутствии резонансов до четвёртого порядка включительно. Согласно теореме [15], если при $\tau_1=\tau_2=\tau_3=0$ выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

$$D_3=\begin{vmatrix} 2c_{200} & c_{110} & c_{101} \\ c_{110} & 2c_{020} & c_{011} \\ c_{101} & c_{011} & 2c_{002} \end{vmatrix}\neq 0,$$

$$D_4=\begin{vmatrix} 2c_{200} & c_{110} & c_{101} & \sigma_1 \\ c_{110} & 2c_{020} & c_{011} & -\sigma_2 \\ c_{101} & c_{011} & 2c_{002} & \sigma_3 \\ \sigma_1 & -\sigma_2 & \sigma_3 & 0 \end{vmatrix}\neq 0, - \qquad (16)$$

то положение равновесия устойчиво для большинства начальных условий.

Дело в том, что раскрытие определителей (16) и подстановка входящих в них переменных не приведёт к упрощению определителей (16) в аналитическом виде, так как координаты положения равновесия могут быть вычислены только при фиксированных параметрах μ_1,μ_2. Поэтому единственным способом проверить обращаются ли определители (16) в нуль является построение графиков и численное моделирование.

Заключение

Выполнив необходимые вычисления и используя возможности графические возможности системы *Mathematica,* мы показали, что на плоскости $O\mu_1\mu_2$ определители D_3 и D_4 не обращаются в ноль одновременно для точек S_1, S_4, S_7 при любых значениях параметров μ_1,μ_2 из области их устойчивости в первом приближении. Тем самым доказана устойчивость для большинства начальных условий положений равновесия S_1, S_4, S_7 для всех значений $\mu_1,\ \mu_2$, кроме, тех, которые удовлетворяют резонансам частот вида $\sigma_1-2\sigma_2=0$, $\sigma_1-3\sigma_2=0$. Перечисленные резонансные случаи подробно изучены в [6]. Остальные резонансные соотношения не влияют на устойчивость равновесных решений $S_1,\ S_4,\ S_7$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / В.К. Абалакин [и др.]; под общ. ред. Г.Н. Дубошина. – М. : Наука, 1976. – 864 с.
2. Пуанкаре, А. Новые методы небесной механики / А. Пуанкаре // Избр. тр. : в 3-х т. – М. : Наука, 1971. – Т. 1. – 771 с.; Т. 2. – С. 3–452.
3. Маркеев, А.П. Точки либрации небесной механике и космодинамике / А.П. Маркеев. – М. : Наука, 1978. – 312 с.

4. Gadomski, L. Studying the stability of equilibrium solutions in the planar circular restricted four-body problem / L. Gadomski, E.A. Grebenikov, A.N. Prokopenya // Nonlinear oscillations. – 2007. – Vol. 10, № 1. – P. 66–82.

5. Маркеев, А.П. Устойчивость гамильтоновых систем / А.П. Маркеев // Нелинейная механика : сб. ст. / под ред. В.М. Матросова. – М. : Физматлит, 2001. – С. 114–130.

6. Budzko, D.A. On the stability of equilibrium positions in the circular restricted four-body problem / D.A. Budzko, A.N. Prokopenya // Lecture Notes in Computer Science. – Berlin, Heidelberg, 2011. – Vol. 6885 : Computer Algebra in Scientific Computing 2011. – P. 88–100.

7. Wolfram, S. The Mathematica book / S. Wolfram. – Wolfram Media / Cambridge University Press, 1999. – 1470 p.

8. Себехей, В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел / В. Себехей – М. : Наука, 1982. – 656 с.

9. Будько, Д.А. Символьно-численный анализ равновесных решений в ограниченной задаче четырёх тел / Д.А. Будько, А.Н. Прокопеня // Программирование. – 2010. – № 2 (36). – С. 68–75.

10. Биркгоф, Дж.Д. Динамические системы / Дж.Д. Биркгоф. – Ижевск : Издат. дом «Удмуртский университет», 1999. – 408 с.

11. Арнольд, В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике / В.И. Арнольд // Успехи математических наук. – 1963. – Т. 18, № 6. – С. 91–192.

12. Мозер, Ю. КАМ-теория и проблемы устойчивости / Ю. Мозер. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 448 с.

13. Будько, Д.А. Квадратичная нормализация гамильтониана в ограниченной задаче четырёх тел / Д.А. Будько, Ж.А. Вейль, А.Н. Прокопеня // Вестник БрГТУ : Физика, математика, информатика. – 2009. – Т. 59, № 5. – С. 82–85.

14. Ляпунов, А.М. Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов; под ред. Г. Мюнтц. – Череповец : Меркурий-Пресс, 2000. – 386 с.

15. Арнольд, В.И. О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы / В.И. Арнольд // Доклады АН СССР. – 1964. – Т. 156, № 1. – С. 9–12.

***D.A. Budzko, A.N. Prokopenya.* Relative Equilibrium Positions and Analysis of their Stability in Spatial Circular Restricted Four-Body Problem**

In the present paper we consider the stability problem of equilibrium solutions of spatial Newtonian circular restricted four-body problem, formulated on the basis of famous triangular Lagrange's solutions. Using the computer algebra system Mathematica, we have constructed Bifkhoff's type canonical transformation, which reduce the Hamiltonian function to normal form up to the fourth order in perturbations. Applying Arrnold's and Markeev's theorems, we have proved that three equilibrium positions are stable for the majority of initial conditions if mass parameters of the system belong to the domain of the solutions linear stability in the parameter space. It was shown that resonance conditions of the form $\sigma_1 - 2\sigma_2 = 0$ and $\sigma_1 - 3\sigma_2 = 0$ cause instability of equilibrium positions while other resonances of third and fourth orders do not influence on their stability.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 01.10.2012