УДК 539.12:530.145

В.А. Плетюхов, В.И. Стражев, П.П. Андрусевич

СИММЕТРИЙНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛЯ ДИРАКА – КЭЛЕРА

Показано, что наиболее полной группой внутренней симметрии лагранжиана комплексного поля Дирака – Кэлера является группа SO(5,4). Данная группа значительно шире группы SO(4,2), обычно сопоставляемой в литературе данному полю, и содержит последнюю в качестве подгруппы. Установленное расширение группы симметрии поля Дирака – Кэлера не нарушает его соответствия 16-компонентному дираковскому полю с лагранжианом $L = L_1 + L_2 - L_3 - L_4$.

Введение

Уравнение Дирака – Кэлера (ДК) представляет собой максимально общее дифференциальное уравнение первого порядка над полем комплексных чисел для полного набора антисимметричных тензорных полей в пространстве Минковского. Его тензорная формулировка имеет, как известно, вид [1]:

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu \psi_\mu + m\psi_0 = 0,\\
&\partial_\mu \tilde{\psi}_\mu + m\tilde{\psi}_0 = 0,\\
&\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \psi_0 + m\psi_\mu = 0, \qquad (1)\\
&\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu \psi_{[\alpha\beta]} + \partial_\mu \tilde{\psi}_0 + m\tilde{\psi}_\mu = 0,\\
&-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha \tilde{\psi}_\beta + m\psi_{[\mu\nu]} = 0,
\end{aligned}$$

где ψ_0 – скаляр, ψ_μ – вектор, $\psi_{[\mu\nu]}$ – антисимметричный тензор второго ранга, $\tilde{\psi}_\mu = \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\psi_{[\nu\alpha\beta]}$ – аксиальный вектор, $\tilde{\psi}_0 = \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\psi_{[\mu\nu\alpha\beta]}$ – псевдоскаляр, $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ – тензор Леви-Чивита ($\varepsilon_{1234} = -i$).

Система (1) может быть записана в универсальной матричной форме

$$\left(\beta_\mu \partial_\mu + m\right)\psi = 0. \qquad (2)$$

При выборе волновой функции ψ в виде

$$\Psi = (\psi_0, \tilde{\psi}_0, \psi_\mu, \tilde{\psi}_\mu, \psi_{[\mu\nu]}) \text{ – столбец}, \qquad (3)$$

вводя собирательный индекс $A = o, \tilde{o}, \mu, \tilde{\mu}, [\mu\nu]$, пробегающий значения от 1 до 16, матрицы β_μ можно выразить через элементы e^{AB} полной матричной алгебры [2] следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\beta_\mu = \beta_\mu^{(+)} + \beta_\mu^{(-)},\\
&\beta_\mu^{(+)} = e^{\tilde{o}\tilde{\mu}} + e^{\tilde{\mu}\tilde{o}} + e^{\lambda[\lambda\mu]} + e^{[\lambda\mu]\lambda}, \qquad (4)\\
&\beta_\mu^{(-)} = e^{o\mu} + e^{\mu o} + \frac{i}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}(e^{\tilde{\lambda}[\alpha\beta]} + e^{[\alpha\beta]\tilde{\lambda}}).
\end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что матрицы β_μ (3) удовлетворяют перестановочным соотношениям алгебры матриц Дирака.

Обычно сопоставляемая лагранжиану поля ДК внутренняя (диальная) симметрия описывается группой SO(4,2) [3]. Генераторами этой группы могут служить матрицы β'_μ, β'_5, $\beta'_\mu \beta'_5$, $\beta'_{[\mu}\beta'_{\nu]} = \frac{1}{2}(\beta'_\mu \beta'_\nu - \beta'_\nu \beta'_\mu)$, где $\beta'_\mu = \beta_\mu^{(+)} - \beta_\mu^{(-)}$ – второй набор матриц размерности 16x16, удовлетворяющих, как и β_μ, алгебре матриц Дирака и коммутирующих с матрицами β_μ.

С точки зрения стандартного подхода теории релятивистских волновых уравнений система ДК (1) описывает частицу с набором спинов 0,1 и двукратным вырождением состояний по пространственной четности. В то же время диальная симметрия позволяет сопоставить полю ДК набор из четырех дираковских полей с лагранжианом

$$L = L_1 + L_2 - L_3 - L_4, \tag{5}$$

то есть описывать на его основе (причем как на классическом, так и на квантовом уровне) частицу со спином $1/2$ и дополнительными (помимо спина) внутренними степенями свободы (см., напр., [1] и цитированную здесь литературу).

В работе [4] был развит подход, основанный на использовании вещественной формы описания дираковских полей, суть которого будет изложена ниже. При этом было установлено наличие более широкой группы внутренней симметрии указанных полей, чем считалось ранее. Так, для системы четырех уравнений Дирака с лагранжианом (5) в работе [5] установлена группа симметрии SO(5,4), которая существенно шире группы диальной симметрии SO(4,2) и содержит последнюю в качестве подгруппы.

Возникает вопрос: сохраняется ли соответствие между комплексным полем ДК и 16-компонентным дираковским полем с лагранжианом (5) с учетом наличия у последнего более широкой группы симметрии, чем SO(4,2). Для ответа на него необходимо, очевидно, исследовать внутреннюю симметрию уравнения ДК на основе развитого в [4] подхода, чему и посвящена настоящая работа.

Вещественная форма уравнения Дирака – Кэлера

Запишем уравнение (2) в вещественной форме. Для этого возьмем от (2) комплексное сопряжение. Складывая и вычитая исходное уравнение с комплексно сопряженным и вводя функции

$$\psi^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi + \psi^*),\ \psi^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi - \psi^*), \tag{6}$$

получим эквивалентное уравнению (2) 32-компонентное уравнение

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi = 0. \tag{7}$$

Здесь

$$\Psi = (\psi^r, \psi^i) \text{ – столбец}, \tag{8}$$

Γ_μ – квадратные матрицы размерности 32×32, имеющие вид

$$\begin{gathered} \Gamma_1 = -I_2 \otimes (\gamma_5 \otimes \gamma_1),\ \ \Gamma_2 = I_8 \otimes \gamma_2, \\ \Gamma_3 = -I_2 \otimes (\gamma_5 \otimes \gamma_3),\ \ \Gamma_4 = -I_2 \otimes (\gamma_5 \otimes \gamma_4) \end{gathered} \tag{9}$$

(γ_μ – матрицы Дирака).

Релятивистское волновое уравнение (РВУ) (7) – (9) является вещественной формой уравнения (2) и, следовательно, тензорной системы Дирака – Кэлера (1). Данная терминология объясняется тем, что если записать РВУ (7) – (9) в явном виде и перейти к трехмерным обозначениям, получится вещественная система уравнений.

В дальнейшем, помимо представления (8) волновой функции, придется использовать так называемый фермионный базис, в котором удовлетворяющие дираковской алгебре матрицы Γ_μ (9), по определению, принимают вид:

$$\Gamma_\mu = I_8 \otimes \gamma_\mu . \tag{10}$$

Переход из базиса (8) в фермионный базис осуществляется с помощью унитарного преобразования

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}[I_8 \otimes (I_4 - i\gamma_2) - (\gamma_5 \otimes I_2) \otimes (I_4 + i\gamma_2)], \\ A^{-1} = A^{+} &= \frac{1}{2}[I_8 \otimes (I_4 + i\gamma_2) - (\gamma_5 \otimes I_2) \otimes (I_4 - i\gamma_2)]. \end{aligned} \tag{11}$$

Внутренняя симметрия лагранжиана уравнения Дирака – Кэлера

Под преобразованиями внутренней симметрии РВУ (7) понимаются линейные преобразования волновой функции

$$\Psi'(x_\mu) = Q\Psi(x_\mu), \tag{12}$$

не затрачивающие пространственно-временных координат и коммутирующие с матрицами Γ_μ:

$$[\Gamma_\mu,\ Q]_- = 0. \tag{13}$$

При этом условие сохранения вещественного характера РВУ (7) (назовем его условием вещественности) означает, что преобразование Q должно оставлять вещественные (мнимые) компоненты волновой функции Ψ вещественными (мнимыми) в том смысле, что если Ψ_A – вещественная (мнимая) компонента, то и Ψ'_A должна оставаться вещественной (мнимой).

Применение условия (13) удобнее всего осуществлять в фермионом базисе. Наиболее общий вид матрицы Q, коммутирующей со всеми матрицами Γ_μ (10), таков:

$$Q = q \otimes I_4, \tag{14}$$

где q – произвольная комплексная матрица размерности 8×8.

Преобразование Q (14) может быть параметризовано посредством 64-х базисных матричных операторов J_A:

$$\begin{aligned} &J_0 = I_{32},\ \ J_i = I_4 \otimes \sigma_i \otimes I_4,\ \ J_{\mu i} = \gamma_\mu \otimes \sigma_i \otimes I_4, \\ &J_{\mu 4} = \gamma_\mu \otimes I_2 \otimes I_4,\ \ J_{5i} = \gamma_5 \otimes \sigma_i \otimes I_4,\ J_{54} = \gamma_5 \otimes I_2 \otimes I_4, \\ &J_{[\mu\nu]i} = i\gamma_\mu\gamma_\nu \otimes \sigma_i \otimes I_4,\ \ J_{[\mu\nu]4} = i\gamma_\mu\gamma_\nu \otimes I_2 \otimes I_4, \\ &J_{\mu 5i} = i\gamma_\mu\gamma_5 \otimes \sigma_i \otimes I_4,\ \ J_{\mu 54} = i\gamma_\mu\gamma_5 \otimes I_2 \otimes I_4. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь σ_i – матрицы Паули.

В представлении (6), в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены, для матричных операторов J_A с помощью обратного преобразования (11) получаем выражения:

$$\begin{aligned}
&J_0 = I_{32},\ J_i = I_4 \otimes \sigma_i \otimes I_4,\ J_{\mu i} = -i\gamma_\mu\gamma_5 \otimes \sigma_i \otimes \gamma_2,\\
&J_{\mu 4} = -i\gamma_\mu\gamma_5 \otimes I_2 \otimes \gamma_2,\ J_{5i} = \gamma_5 \otimes \sigma_i \otimes I_4,\ J_{54} = \gamma_5 \otimes I_2 \otimes I_4,\\
&J_{[\mu\nu]i} = i\gamma_\mu\gamma_\nu \otimes \sigma_i \otimes I_4,\ J_{[\mu\nu]4} = i\gamma_\mu\gamma_\nu \otimes I_2 \otimes I_4,\\
&J_{\mu 5i} = \gamma_\mu \otimes \sigma_i \otimes \gamma_2,\ J_{\mu 54} = \gamma_\mu \otimes I_2 \otimes \gamma_2.
\end{aligned} \tag{16}$$

Используя для волновой функции Ψ и операторов J_A представление (6), (16) и накладывая на уравнение (7) выше сформулированное условие вещественности, можно найти ограничения на соответствующие операторам J_A параметры ω_A, которые будут заключаться в вещественном либо чисто мнимом характере последних. В результате придем к 32-м вещественным и 32-м мнимым параметрам. При наложении условия унимодулярности на преобразование Q получим 63-параметрическую группу SU(4,4), определяемую генераторами J_A (за исключением единичного $J_0 = I_{32}$) с 32-мя вещественными и 31-м мнимым параметрами.

Требование инвариантности лагранжиана уравнения (7)

$$L = -\bar{\Psi}(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi \quad (\bar{\Psi} = \Psi^+ \eta) \tag{17}$$

относительно бесконечно малых однопараметрических преобразований $1 + \delta\omega_A J_A$ данной группы приводит к условиям:

$$(\delta\omega_A J_A)^+ \eta = -\delta\omega_A \eta J_A. \tag{18}$$

В формулах (17), (18) η – матрица билинейной лоренц-инвариантной формы $\bar{\Psi}\Psi = \Psi^+\eta\Psi$, знак “+” означает эрмитовское сопряжение. В фермионном базисе матрица η, соответствующая 32-компонентной вещественной формулировке (7) уравнения ДК, принимает вид:

$$\eta = I_2 \otimes \gamma_4 \otimes \gamma_4. \tag{19}$$

Непосредственная проверка условий (18) с использованием выражений (15), (19) для матриц J_A и η показывает, что этим условиям удовлетворяют 36 генераторов

$$\begin{aligned}
&J_2,\ J_{12},\ J_{21},\ J_{23},\ J_{24},\ J_{31},\ J_{33},\ J_{34},\ J_{41},\ J_{43},\ J_{44},\\
&J_{51},\ J_{53},\ J_{54},\ J_{152},\ J_{251},\ J_{253},\ J_{254},\ J_{351},\ J_{353},\ J_{354},\\
&J_{451},\ J_{453},\ J_{454},\ J_{[12]2},\ J_{[23]1},\ J_{[23]3},\ J_{[23]4},\ J_{[31]2},\\
&J_{[14]2},\ J_{[24]1},\ J_{[24]3},\ J_{[24]4},\ J_{[31]1},\ J_{[34]3},\ J_{[34]4},
\end{aligned} \tag{20}$$

которым соответствуют 20 вещественных $(\omega_{31},\ \omega_{33},\ \omega_{34},\ \omega_{41},\ \omega_{43},\ \omega_{44},$ $\omega_{351},\ \omega_{353},\ \omega_{354},\ \omega_{451},\ \omega_{453},\ \omega_{454},\ \omega_{[23]1},\ \omega_{[23]3},\ \omega_{[23]4},\ \omega_{[31]2},\ \omega_{[14]2},\ \omega_{[24]1},$ $\omega_{[24]3},\ \omega_{[24]4},)$ и 16 мнимых $(\omega_2,\ \omega_{12},\ \omega_{21},\ \omega_{23},\ \omega_{24},\ \omega_{51},\ \omega_{53},\ \omega_{54},\ \omega_{152},$ $\omega_{251},\ \omega_{253},\ \omega_{254},\ \omega_{[12]2},\ \omega_{[31]1},\ \omega_{[34]3},\ \omega_{[34]4})$ параметров. Генераторы (15) (или (16)) с данным набором параметров образуют 36-параметрическую унитарную группу, изоморфную группе SO(5,4).

Заключение

Полученная в настоящей работе 36-параметрическая группа внутренней симметрии SO(5,4) лагранжевой формулировки уравнения Дирака – Кэлера значительно шире 15-параметрической группы SO(4,2), обычно сопоставляемой в литературе данному уравнению. Она совпадает с установленной в работе [5] наиболее полной группой внутренней симметрии системы четырех уравнений Дирака с лагранжианом (5). Таким образом, обнаруженное в настоящей работе расширение группы внутренней симметрии комплексного поля Дирака – Кэлера не нарушает его соответствия 16-компонентному дираковскому полю с лагранжианом (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стражев, В.И. Уравнение Дирака – Кэлера. Классическое поле / В.И. Стражев, И.А. Сатиков, Д.А. Ционенко. – Минск : БГУ, 2007. – 196 с.
2. Богуш, А.А. Введение в теорию классических полей / А.А. Богуш, Л.Г. Мороз. – Минск : Наука и техника, 1968. – 388 с.
3. Kähler, E. Der innere differentialkalkül / E. Kähler // Rendiconti di Mat. (Roma), – 1962. – V. 21. – № 3, 4. – P. 425 – 523.
4. Плетюхов, В.А. Внутренняя симметрия восьмикомпонентного дираковского поля / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев, П.П. Андрусевич // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 89–94.
5. Плетюхов, В.А. Внутренняя симметрия 16-компонентного дираковского поля и поля Дирака – Кэлера / В.А. Плетюхов, П.П. Андрусевич // Соврем. науч. проблемы и вопросы преподавания теоретической и математической физики, физики конденсированных сред и астрономии : сб. материалов IV респ. науч.-метод. конф., Брест, 20 – 21 сент. 2012 г. / Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2012. – С. 76 – 79.

V.A. Pletyukhov, V.I. Strazhev, P.P. Andrusevich. **Symmetry's Properties of the Dirac – Kähler Field**

It is shown that the most complete group of internal symmetry of the Lagrangian of a complex field Dirac - Kähler group is SO(5,4). This group is significantly wider than the group SO(4,2), usually mapped in the literature that field, and contains the latest in a subgroup. Set extension of the symmetry of the Dirac field - Kahler does not break his match 16-component Dirac- Kähler field with Lagrangian $L = L_1 + L_2 - L_3 - L_4$.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 19.09.2012