УДК 539.12

Е.М. Овсиюк

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 1/2 В МАГНИТНОМ ПОЛЕ В 2-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Построены точные решения уравнения Дирака в 2-мерном римановом пространстве отрицательной кривизны, гиперболической плоскости Лобачевского, в присутствии внешнего магнитного поля, являющегося аналогом однородного магнитного поля в пространстве Минковского. Для описания магнитного поля используются системы цилиндрических и квазидекартовых координат, последняя определяет полуплоскость Пуанкаре. В обеих системах координат уравнение Дирака решено точно, построены волновые функции. Найдена обобщенная формула для уровней энергии, описывающая квантование движения частицы в магнитном поле. При разделении переменных использована диагонализация оператора спиральности для дираковской частицы на плоскости Лобачевского.

Введение

Задача о движении частицы в однородном магнитном поле относится к числу классических в квантовой механике [1–4]. В работах [5–14] рассматривалась более общая задача о движении частицы в искривленном 2-мерном пространстве, гиперболической и сферической плоскостях.

Расширение к 3-мерным пространствам, гиперболическому и сферическому, было выполнено в [15; 16]: были получены точные решения уравнения для скалярной частицы во внешнем магнитном поле на фоне пространств Лобачевского H_3 и Римана S_3. Соответствующая система в рамках классической механики была исследована в работах [17–19].

В работе [20] была исследована нерелятивистская частица со спином ноль в магнитном поле на гиперболической плоскости. В частности, было показано, что на гиперболической плоскости магнитное поле, определенное в работах [5; 6], совпадает с магнитным полем, определенным в работах [15; 16]; отличие состоит лишь в применяемых системах координат и дополнительном калибровочном преобразовании над 4-потенциалом. В настоящей работе анализ, выполненный в [20], обобщается на случай релятивистской частицы со спином $1/2$.

1. Уравнение Дирака в H_2, координаты (r,ϕ)

Обратимся к уравнению Дирака в 2-мерном пространстве H_2. Исходим из обобщенного уравнения Дирака в произвольном искривленном пространстве-времени

$$\left\{\gamma^c[\, i(\, e^{\alpha}_{(c)}\partial_\alpha + \frac{1}{2}\sigma^{ab}\gamma_{abc}\,) + eA_{(c)}\,] - M\right\}\Psi = 0\,, \tag{1.1}$$

где γ_{abc} – коэффициенты вращения Риччи; $A_{(c)} = e^{\alpha}_{(c)}A_\alpha$ – тетрадные компоненты внешнего электромагнитного поля.

В 3-мерном пространстве Лобачевского известна система обобщенных цилиндрических координат

$$dS^2 = dt^2 - \cosh^2 z(dr^2 + \sinh^2 r\, d\phi^2) - dz^2\,.$$

В этих координатах уравнение Дирака (1.1) при ограничении на плоскость

($z=0,\ \ dz=0$) принимает вид (удобно ввести подстановку $\Psi=\psi/\sqrt{\sinh r}$):

$$\left[i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_r + \gamma^2\,\frac{i\partial_\phi + eB(\cosh r-1)}{\sinh r} - M\,)\right]\psi = 0. \qquad (1.2)$$

Решения будем искать в виде:

$$\psi = e^{-i\varepsilon t}e^{im\phi}\begin{vmatrix} f_1(r)\\ f_2(r)\\ f_3(r)\\ f_4(r)\end{vmatrix}, \qquad \left(\varepsilon\gamma^0 + i\gamma^1\partial_r - \gamma^2\mu(r) - M\right)\begin{vmatrix} f_1(r)\\ f_2(r)\\ f_3(r)\\ f_4(r)\end{vmatrix} = 0\,,$$

где

$$\mu(r) = \frac{m - eB(\cosh r-1)}{\sinh r}\,.$$

Выбирая матрицы Дирака в спинорном базисе, получим уравнения для функций $f_a(r)$:

$$(\partial_r+\mu)\ f_4 + i\,(\varepsilon\, f_3 - Mf_1) = 0, \qquad (\partial_r-\mu)\ f_3 + i\,(\varepsilon\, f_4 - Mf_2) = 0,$$
$$(\partial_r+\mu)\ f_2 - i\,(\varepsilon\, f_1 - Mf_3) = 0, \qquad (\partial_r-\mu)\ f_1 - i\,(\varepsilon\, f_2 - Mf_4) = 0. \qquad (1.3)$$

Чтобы упростить систему (1.3), необходимо привести к диагональному виду один из дополнительных операторов. В качестве такого оператора можно предположить обобщенный оператор спиральности Σ:

$$\Sigma = \gamma^2\gamma^3\ \partial_r - i\ \gamma^3\gamma^1\,\frac{i\partial_\phi + eB(\cosh r-1)}{\sinh r}. \qquad (1.4)$$

Уравнение на собственные значения $\Sigma\psi = \sigma\psi$ приводит к следующей системе уравнений:

$$(\partial_r+\mu)\ f_4 - i\,\sigma\ f_3 = 0, \qquad (\partial_r-\mu)\ f_3 - i\,\sigma\ f_4 = 0,$$
$$(\partial_r+\mu)\ f_2 - i\,\sigma\ f_1 = 0, \qquad (\partial_r-\mu)\ f_1 - i\,\sigma\ f_2 = 0.$$

Рассматривая ее совместно с (1.3), приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sigma\ f_3 + (\varepsilon\, f_3 - Mf_1) = 0, \qquad \sigma\ f_4 + (\varepsilon\, f_4 - Mf_2) = 0,$$
$$\sigma\ f_1 - (\varepsilon\, f_1 - Mf_3) = 0, \qquad \sigma\ f_2 - (\varepsilon\, f_2 - Mf_4) = 0 \qquad (1.5a)$$

с решениями

$$\sigma = \mp\lambda\,, \qquad \lambda = \sqrt{\varepsilon^2 - M^2}\,, \qquad f_3 = \frac{\varepsilon\pm\lambda}{M}\,f_1\,, \qquad f_4 = \frac{\varepsilon\pm\lambda}{M}\,f_2\,. \qquad (1.5b)$$

Учитывая линейные ограничения (1.5*b*), из (1.3) получаем две более простые системы:

$\sigma = -\lambda$,

$$(\frac{\partial}{\partial r} + \mu)\ f_2 + i\,\lambda\ f_1 = 0, \qquad (\frac{\partial}{\partial r} - \mu)\ f_1 + i\,\lambda\ f_2 = 0; \qquad (1.6a)$$

$\sigma = +\lambda$,

$$(\frac{\partial}{\partial r} + \mu)\ f_2 - i\,\lambda\ f_1 = 0, \qquad (\frac{\partial}{\partial r} - \mu)\ f_1 - i\,\lambda\ f_2 = 0. \qquad (1.6b)$$

Для определенности рассмотрим систему (1.6*a*) (переход к случаю (1.6*b*) осуществляется с помощью замены $\lambda \Rightarrow -\lambda$). Из радиальных уравнений (1.6*a*) следуют уравнения второго порядка для функций f_1 и f_2

$$(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{d\mu}{dr}-\mu^2+\lambda^2)\ f_1=0\,, \qquad (\frac{d^2}{dr^2}+\frac{d\mu}{dr}-\mu^2+\lambda^2)\ f_2=0\,. \tag{1.7a}$$

Учитывая принятое обозначение для $\mu(r)$, получаем уравнения в явном виде (для краткости обозначаем eB как B):

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{m\cosh r+B(\cosh r-1)}{\sinh^2 r}-\frac{[m-B(\cosh r-1)]^2}{\sinh^2 r}+\lambda^2\right) f_1=0,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{m\cosh r+B(\cosh r-1)}{\sinh^2 r}-\frac{[m-B(\cosh r-1)]^2}{\sinh^2 r}+\lambda^2\right) f_2=0. \tag{1.7b}$$

Два уравнения связаны формальной заменой $m\Rightarrow -m$, $B\Rightarrow -B$, $f_1\Rightarrow f_2$. Делая замену переменной $y=(1+\cosh r)/2$ и используя подстановку $f_1=y^A(1-y)^C\,\overline{f}_1(y)$, получаем уравнение для функции $\overline{f}_1$

$$y(1-y)\frac{d^2\overline{f}_1}{dy^2}+\left[2A+\frac{1}{2}-(2A+2C+1)\,y\right]\frac{d\overline{f}_1}{dy}$$
$$+\left[\frac{A^2-A/2-m^2/4-m/4-mB-B^2-B/2}{y}\right.$$
$$\left.+\frac{C^2-C/2-m^2/4+m/4}{1-y}-(A+C)^2-\lambda^2+B^2\right]\overline{f}_1=0.$$

При следующих ограничениях:

$$A=-\frac{2B+m}{2},\frac{2B+m+1}{2}, \qquad C=\frac{m}{2},\frac{1-m}{2}$$

приходим к уравнению гипергеометрического типа

$$y(1-y)\frac{d^2\overline{f}_1}{dy^2}+[2A+\frac{1}{2}-(2A+2C+1)\,y]\frac{d\overline{f}_1}{dy}-[\,(A+C)^2+\lambda^2-B^2\,]\,\overline{f}_1=0$$

с параметрами

$$f_1=y^A\,(1-y)^C\,F(\alpha,\beta,\gamma;y)\,, \qquad \gamma=2A+\frac{1}{2}\,,$$
$$\alpha=A+C+\sqrt{B^2-\lambda^2}\,, \qquad \beta=A+C-\sqrt{B^2-\lambda^2}\,. \tag{1.8}$$

Для того чтобы иметь конечные решения при $r=0$ $(y\to 1)$ (соответствующие геометрические точки принадлежат оси z: $u_0=\cosh z,\ u_3=\sinh z,\ u_1=0,\ u_2=0$) и на бесконечности $r\to\infty$ $(y\to\infty)$, следует выбирать положительные значения C и отрицательные значения A:

$$C>0\,, \qquad A<0\,, \qquad C+A<0\,, \qquad f_1=y^A\,(1-y)^C\,F(\alpha,\beta,\gamma;y)\,. \tag{1.9}$$

Запишем все четыре возможности для выбора параметров $A,\ C$ (для определенности пусть $B>0$):

1. $C=\dfrac{m}{2}$, $\quad A=-\dfrac{2B+m}{2}$, $\quad C+A=-B$;

2. $C = \dfrac{1-m}{2}, \qquad A = -\dfrac{2B+m}{2}, \qquad C + A = -B - m + \dfrac{1}{2};$

3. $C = \dfrac{m}{2}, \qquad A = \dfrac{2B+m+1}{2}, \qquad C + A = B + m + \dfrac{1}{2};$

4. $C = \dfrac{1-m}{2}, \qquad A = \dfrac{2B+m+1}{2}, \qquad C + A = B + 1. \qquad (1.10)$

Учитывая (1.9), заключаем, что только варианты 1 и 2 являются пригодными для описания связанных состояний (они совпадают при $m = +1/2$). Запишем соответствующие выражения для радиальных функций.

1. $m > 0, \quad m = +1/2, +3/2, ...,$

$$C = m/2, \qquad A = -B - m/2 < 0, \qquad f_1 = y^{-B-m/2}\,(1-y)^{m/2}\,F(a,b,c;y),$$

$$a = -B + \sqrt{B^2 - \lambda^2}, \quad b = -B - \sqrt{B^2 - \lambda^2}, \quad c = -2B - m + \frac{1}{2}; \qquad (1.11a)$$

правило квантования имеет вид:

$$a = -n \;\Rightarrow\; +\sqrt{B^2 - \lambda^2} = B - n > 0; \qquad (1.11b)$$

чтобы иметь конечные радиальные функции на бесконечности $r \to \infty$, должны быть наложены следующие ограничения:

$$A + C + n < 0 \qquad \Rightarrow \qquad n < B, \qquad (1.11c)$$

которые обеспечивают положительный корень квадратный $+\sqrt{B^2 - \lambda^2}$ в $(1.11b)$.

2 . $-B + 1/2 < m < 1, \qquad (m = m_{min}, ..., -1/2, +1/2\ ),$

$$C = 1/2 - m/2, \qquad A = -B - m/2 < 0,$$

$$f_1 = y^{-B-m/2}\,(1-y)^{1/2-m/2}\,F(a',b',c';y),$$

$$a' = -B - m + 1/2 + \sqrt{B^2 - \lambda^2},$$

$$b' = -B - m + 1/2 - \sqrt{B^2 - \lambda^2}, \qquad c' = -2B - m + \frac{1}{2}; \qquad (1.12a)$$

правило квантования имеет вид:

$$a' = -n \qquad \Rightarrow \qquad +\sqrt{B^2 - \lambda^2} = B + m - 1/2 - n > 0; \qquad (1.12b)$$

при этом должно выполняться неравенство

$$A + C + n < 0 \qquad \Rightarrow \qquad B + m - 1/2 - n > 0, \qquad (1.12c)$$

которое обеспечивает положительный квадратный корень $+\sqrt{B^2 - \lambda^2}$ в $(1.12b)$. Обращаем внимание, что при $m = +1/2$ формула $(1.12b)$ совпадает с $(1.11b)$.

Таким образом, энергетический спектр для частицы со спином $1/2$ в магнитном поле на плоскости Лобачевского задается двумя формулами:

$$\lambda^2 = B^2 - (B-n)^2, \qquad \underline{m = +1/2, +3/2, ...,} \qquad n < B;$$

$$\lambda^2 = B^2 - (B + m - \frac{1}{2} - n)^2, \qquad \underline{-B + 1/2 < m_{min}, ..., +1/2,} \qquad n < B + m - 1/2.$$

Обе формулы описывают конечное число дискретных энергетических уровней при заданной величине магнитного поля B.

Сделаем замечание относительно квантового числа m. Использованное выше соотношение $-i\partial_\phi \Psi = m\,\Psi$ представляет собой преобразованное от декартовых координат к цилиндрическим уравнение на собственные значения для третьей проекции полного углового момента дираковской частицы

$$\hat{J}_3 \Psi_{Cart} = (-i\frac{\partial}{\partial \phi} + \Sigma_3)\,\Psi_{Cart} = m\,\Psi_{Cart}\ ;$$

т. е. для квантового числа m допускаются только полуцелые значения $m = \pm 1/2,\ \pm 3/2,\ ...$

2. Уравнение Дирака в H_2, координаты (x, y)

Запишем уравнение Дирака в координатах (x, y) на плоскости H_2 в магнитном поле [20]

$$dS^2 = dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} - dz^2, \qquad dz = 0, \qquad A_x = +\frac{B}{y},$$

$$e^{\beta}_{(b)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad e_{(b)\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \tag{2.1}$$

$$\left[\gamma^0 i\,\partial_t + \gamma^1(-iy\partial_x - eB) + i\gamma^2(-y\,\partial_y + 1/2) - M\right]\Psi = 0. \tag{2.2}$$

Переменные разделяются с использованием подстановки

$$\Psi = e^{-i\varepsilon t} e^{ipx} \begin{vmatrix} f_1(y) \\ f_2(y) \\ f_3(y) \\ f_4(y) \end{vmatrix}, \qquad \left[\gamma^0 \varepsilon + \gamma^1(py - eB) + i\gamma^2(-y\,\partial_y + 1/2\ - M\right]) \begin{vmatrix} f_1(y) \\ f_2(y) \\ f_3(y) \\ f_4(y) \end{vmatrix} = 0,$$

откуда получаем систему уравнений для f_a

$$\varepsilon\ f_3 - (p\,y - eB)\ f_4 - (-y\,\partial_y + 1/2)\ f_4 - M\ f_1 = 0,$$
$$\varepsilon\ f_4 - (p\,y - eB)\ f_3 + (-y\,\partial_y + 1/2)\ f_3 - M\ f_2 = 0,$$
$$\varepsilon\ f_1 + (p\,y - eB)\ f_2 + (-y\,\partial_y + 1/2)\ f_2 - M\ f_3 = 0,$$
$$\varepsilon\ f_2 + (p\,y - eB)\ f_1 - (-y\,\partial_y + 1/2)\ f_1 - M\ f_4 = 0.$$

При наложении линейных ограничений $f_3 = Kf_1,\quad f_4 = Kf_2$ (они, очевидно, связаны с диагонализацией обобщенного оператора спиральности) уравнения принимают вид:

$$(y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} - p\,y + eB)\ f_2 + (\varepsilon - \frac{M}{K})\ f_1 = 0,$$
$$(y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} - p\,y + eB)\ f_2 + (-\varepsilon + M\ K)\ f_1 = 0,$$
$$(y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} + p\,y - eB)\ f_1 + (-\varepsilon + \frac{M}{K})\ f_2 = 0,$$
$$(y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} + p\,y - eB)\ f_1 + (\varepsilon - M\ K)\ f_2 = 0. \tag{2.3}$$

Полученная система уравнений будет совместна, если выполняется условие

$$\varepsilon - \frac{M}{K} = -\varepsilon + MK \qquad \Rightarrow \qquad K = K_{1,2} = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - M^2}}{M}. \tag{2.4}$$

Существует два независимых случая (введем обозначение $+\sqrt{\varepsilon^2 - M^2} = \lambda$):

$MK = \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - M^2}$,

$$(y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} - p\,y + eB)\, f_2 + \lambda\, f_1 = 0,$$

$$(y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} + p\,y - eB)\, f_1 - \lambda\, f_2 = 0; \tag{2.5a}$$

$MK = \varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - M^2}$,

$$(y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} - p\,y + eB)\, f_2 - \lambda\, f_1 = 0,$$

$$(y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} + p\,y - eB)\, f_1 + \lambda\, f_2 = 0. \tag{2.5b}$$

Для определенности рассмотрим случай $(2.5a)$; для f_1 получим уравнение второго порядка

$$y\frac{d^2 f_1}{dy^2} + \left(p - p^2 y + 2\,p\,e\,B + \frac{1/4 - e^2B^2 + \lambda^2}{y} \right) f_1 = 0. \tag{2.6}$$

Введем новую переменную $z = 2\,p\,y$. Следует отметить существенную зависимость решений от знака p; сначала рассмотрим случай положительного значения p (для краткости обозначим eB как B; для определенности предполагаем $B > 0$). С использованием подстановки $f_1(z) = z^A\, e^{Cz}\, F_1(z)$ при A, C, выбранных согласно

$$A = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{B^2 - \lambda^2} \right) > 0, \qquad C = -\frac{1}{2}.$$

Из уравнения (2.6) находим

$$z\frac{d^2 F_1}{dz^2} + (2\,A - z)\frac{dF_1}{dz} - (A - B - \frac{1}{2})\,F_1 = 0\ .$$

Это вырожденное гипергеометрическое уравнение с параметрами

$$\alpha = A - B - \frac{1}{2}, \qquad \gamma = 2A. \tag{2.7}$$

Правило квантования имеет вид:

$$\alpha = -n \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{1}{2} + \sqrt{B^2 - \lambda^2} \right) - B - \frac{1}{2} = -n\,;$$

таким образом, получаем конечное число связанных состояний, описываемых соотношением

$$+\sqrt{B^2 - \lambda^2} = -n + B\,. \tag{2.8}$$

Рассмотрим случай отрицательных значений p. В переменной $z = -2py$, $z > 0$ и с использованием подстановки $f_1(z) = z^A\, e^{Cz}\, F_1(z)$ уравнение для $F_1(z)$ при A, C, выбранных согласно

$$A = \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{B^2 - \lambda^2} \right) > 0, \qquad C = -\frac{1}{2},$$

принимает вид:

$$z\frac{d^2F_1}{dz^2}+(2A-z)\frac{dF_1}{dz}-(A+B+\frac{1}{2})F_1=0$$

и является уравнением для вырожденной гипергеометрической функции с параметрами

$$\alpha=A+B+\frac{1}{2},\qquad \gamma=2A.$$

Правило квантования выглядит следующим образом:

$$\alpha=-n,\qquad \pm\sqrt{B^2-\lambda^2}=-n-B-1. \tag{2.9}$$

Выбор верхнего знака недопустим. В случае выбора нижнего знака имеем

$$0<\sqrt{B^2-\lambda^2}=B+n+1<\frac{1}{2},$$

$$A>0\qquad\Rightarrow\qquad \sqrt{B^2-\lambda^2}>\frac{1}{2},$$

что также невозможно. Таким образом, при $p<0$ связанных состояний не существует.

Автор благодарна В.М. Редькову за интерес к работе и полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rabi, I.I. Das freie Electron in Homogenen Magnetfeld nach der Diraschen Theorie / I.I. Rabi // Z. Phys. – 1928. – Vol. 49. – P. 507–511.
2. Landau, L. Diamagnetismus der Metalle / L. Landau // Ztshr. Phys. – 1930. – Vol. 69. – P. 629–637.
3. Plesset, M.S. Relativistic wave mechanics of the electron deflected by magnetic field / M.S. Plesset // Phys.Rev. – 1931. – Vol. 12. – P. 1728–1731.
4. Landau, L.D. Quantum mechanics / L.D. Landau, E.M. Lifshitz. – Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1958. – 484 p.
5. Comtet, A. Effective action on the hyperbolic plane in a constant external field / A. Comtet, P.J. Houston // J. Math. Phys. – 1985. – Vol. 26, no 1. P. – 185–191.
6. Comtet, A. On the Landau levels on the hyperbolic plane / A. Comtet // Annals of Physics. – 1987. – Vol. 173. – P. 185–209.
7. Groshe, C. Path integral on the Poincaré upper half plane with a magnetic field and for the Morse potential / C. Groshe // Ann. Phys. (N.Y.). – 1988. – Vol. 187. – P. 110–134.
8. Klauder, J.R. Landau Levels and Geometric Quantization / J.R. Klauder, E. Onofri // Int. J. Mod. Phys. – 1989. – Vol. A4. – P. 3939–3949.
9. Dunne, G.V. Hilbert Space for Charged Particles in Perpendicular Magnetic Fields / G.V. Dunne // Ann. Phys. (N.Y.). – 1992. – Vol. 215. – P. 233–263.
10. Alimohammadi, M. Quantum group symmetry of the quantum Hall effect on the non-flat surfaces / M. Alimohammadi, A. Shafei Deh Abad // J. Phys. – 1996. – Vol. A29. – P. 559.
11. Onofri, E. Landau Levels on a torus / E. Onofri // Int. J. Theoret. Phys. – 2001. – Vol. 40, № 2. – P. 537–549.
12. Gamboa, J. The Landau problem and noncommutative quantum mechanics / J. Gamboa [et all.] // Mod. Phys. Lett. A. – 2001. – Vol. 16. – P. 2075–2078.
13. Plyushchay, M.S. Relativistic particle with torsion and charged particle in a constant electromagnetic field: Identity of evolution / M.S. Plyushchay // Mod. Phys. Lett. – 1995. – Vol. A10. – P. 1463–1469.
14. Correa, F. Aharonov-Bohm effect on AdS(2) and nonlinear supersymmetry of reflectionless Poschl-Teller system / F. Correa, V. Jakubsky, M.S. Plyushchay // Annals

Phys. – 2009. – Vol. 324. – P. 1078–1094.

15. Bogush, A.A. Schrödinger particle in magnetic and electric fields in Lobachevsky and Riemann spaces / A.A. Bogush, V.M. Red'kov, G.G. Krylov // NPCS. – 2008. – Vol. 11, № 4. – P. 403–416.

16. Богуш, А.А. Квантовомеханическая частица в однородном магнитном поле в сферическом пространстве S_3 / А.А. Богуш, В.М. Редьков, Г.Г. Крылов // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 2. – С. 57–63.

17. Motion Caused by Magnetic Field in Lobachevsky Space / V.V. Kudriashov [et all.] // The sun, the stars, the Uiverse and General relativity : International Conference in honor of Ya.B. Zeldovich's 95th anniversary, Minsk, 20–23 April, 2009 / Ed. R. Ruffini, G. Vereschagin. – AIP Conference Proceedings, 2010. – Vol. 1205. – P. 108–111.

18. Кудряшов, В.В. Классическая частица в магнитном поле на фоне пространства Лобачевского / В.В. Кудряшов [и др.] // Доклады НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 6. – С. 50–53.

19. Kudryashov, V.V. Classical particle in presence of magnetic field, hyperbolic Lobachevsky and spherical Riemann models / V.V. Kudryashov [et all.] // SIGMA. – 2010. – Vol. 6, 004. – 34 p.

20. Овсиюк, Е.М. Нерелятивистская частица в магнитном поле в 2-мерном пространстве Лобачевского, цилиндрические координаты и полуплоскость Пуанкаре / Е.М. Овсиюк // Доклады НАН Беларуси. – 2012.

***E.M. Ovsiyuk.* A Particle with Spin 1/2 in a Magnetic Field in Two-Dimensional Lobachevsky Space**

Exact solutions of the Dirac equation in two-dimensional Riemannian space of negative curvature, the hyperbolic Lobachevsky plane, in presence of an external magnetic field, which is an analogous of the uniform magnetic field in Minkowski space, are constructed. In describing the generalized magnetic field, cylindrical and quasi-Cartesian coordinates are used, the latter determines the Poincaré half-plane. In both coordinate systems, the Dirac equation is solved exactly, the wave functions are constructed. A generalized formula for the energy levels is produced, which describes the quantized motion of a particle in the magnetic field in the Lobachevsky plane. When separating the variables, diagonalization of an extended helicity operator for a Dirac particle is used.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 20.09.2012