УДК 539.12

Е.М. Овсиюк

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ ШВАРЦШИЛЬДА

Общековариантный формализм Римана–Зильберштейна–Майораны–Оппенгеймера применен к решению уравнений электродинамики в метрике Шварцшильда. После разделения переменных задача сводится к дифференциальному уравнению того же вида, которое возникает в теории скалярного поля в пространстве-времени Шварцшильда. Полученное уравнение является вырожденным уравнением Гойна. Электромагнитное поле рассмотрено также на основе 10-мерного матричного формализма Даффина–Кеммера, в котором в дополнение к шести компонентам электромагнитного тензора используются 4 компоненты векторного потенциала. С помощью оператора пространственной честности радиальная система из 10 уравнений расщепляется на подсистемы из 4 и 6 уравнений. В этом подходе задача также сводится к вырожденному уравнению Гойна. Показано, каким образом решения, найденные в комплексной форме, встроены в 10-мерный формализм. Кроме того, определены радиальные функции, ответственные за калибровочные степени свободы электромагнитного поля.

Ведение

Обычно, рассматривая электромагнитное поле в искривленном пространстве-времени [1; 2] (например, в пространстве черной дыры Шварцшильда [3]), используют вещественное тензорное представление электромагнитного поля [4] либо аппарат, развитый в рамках формализма Ньюмана–Пенроуза [5–7], который по существу эквивалентен спинорному подходу.

В работе [8] для этого был применен комплексный трехмерный формализм Майораны–Оппенгеймера. В настоящей работе формализм Майораны–Оппенгеймера применяется при решении уравнений Максвелла в пространстве-времени Шварцшильда. Этот метод дает возможность довольно легко провести процедуру разделения переменных и свести задачу к анализу дифференциального уравнения второго порядка (вырожденного уравнения Гойна) для одной единственной функции.

Дополнительно эта же система анализируется в пространстве Шварцшильда с применением 10-мерного формализма Даффина–Кеммера [9], когда в описание электромагнитного поля кроме тензора входит и четырехмерный электромагнитный тензор. Такое описание электромагнитного поля является более информативным, поскольку включает также и калибровочные степени свободы.

Матричное уравнение Максвелла [8]

$$\alpha^c \, (e^{\rho}_{(c)} \partial_\rho + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{abc}) \, \Psi = 0 \, , \qquad \alpha^0 = -iI \, , \qquad \Psi = \begin{vmatrix} 0 \\ \vec{E} + ic\vec{B} \end{vmatrix} \tag{1}$$

в пространстве-времени Шварцшильда

$$dS^2 = \Phi \, dt^2 - \frac{dr^2}{\Phi} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \, , \qquad \Phi = 1 - M/r$$

$$e^{\alpha}_{(0)} = (\frac{1}{\sqrt{\Phi}}, 0,0,0) \, , \quad e^{\alpha}_{(3)} = (0, \sqrt{\Phi}, 0,0) \, , \quad e^{\alpha}_{(1)} = (0,0,\frac{1}{r},0) \, , \quad e^{\alpha}_{(2)} = (1,0,0,\frac{1}{r\sin\theta}) \tag{2}$$

имеет следующий вид:

$$[-\frac{i\partial_t}{\sqrt{\Phi}} + \sqrt{\Phi} (\alpha^3 \partial_r + \frac{\alpha^1 s_2 - \alpha^2 s_1}{r} + \frac{\Phi'}{2\Phi} s_3) + \frac{1}{r} \Sigma_{\theta,\phi}] \begin{vmatrix} 0 \\ \psi \end{vmatrix} = 0 \, ,$$

$$\Sigma_{\theta,\phi} = \frac{\alpha^1}{r} \partial_\theta + \alpha^2 \, \frac{\partial_\phi + s_3 \cos\theta}{\sin\theta} \, . \tag{3}$$

Предполагаем использование циклического базиса, когда матрица S_3 диагональна.

1. Разделение переменных и функции Вигнера

Будем диагонализировать оператор квадрата и третьей проекции полного момента электромагнитного поля $\mathbf{J}^2$, J^3; для полевой функции используем подстановку

$$\psi = e^{-i\omega t} \begin{vmatrix} 0 \\ \varphi_1(r) D_{-1} \\ \varphi_2(r) D_0 \\ \varphi_3(r) D_{+1} \end{vmatrix}, \qquad (4)$$

где для выделения угловой зависимости используются D-функции Вигнера [11] $D_\sigma = D^j_{-m,\sigma}(\phi,\theta,0)$, $\sigma = -1, 0, +1$. Далее используем рекуррентные формулы [10]

$$\partial_\theta D_{-1} = \frac{1}{2}(a D_{-2} - \nu D_0), \qquad \frac{m - \cos\theta}{\sin\theta} D_{-1} = \frac{1}{2}(a D_{-2} + \nu D_0),$$

$$\partial_\theta D_0 = \frac{1}{2}(\nu D_{-1} - \nu D_{+1}), \qquad \frac{m}{\sin\theta} D_0 = \frac{1}{2}(\nu D_{-1} + \nu D_{+1}),$$

$$\partial_\theta D_{+1} = \frac{1}{2}(\nu D_0 - a D_{+2}), \qquad \frac{m + \cos\theta}{\sin\theta} D_{+1} = \frac{1}{2}(\nu D_0 + a D_{+2}),$$

$$\nu = \sqrt{j(j+1)}, \qquad a = \sqrt{(j-1)(j+2)}. \qquad (5)$$

После разделения переменных получаем три независимых уравнения (обозначаем $\nu/\sqrt{2} = \sqrt{j(j+1)/2} \;\;\Rightarrow\;\; \nu$)

$$-\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}\varphi_2 + \frac{i\nu}{r}(\varphi_1 - \varphi_3) = 0,$$

$$-\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}(\varphi_1 + \varphi_3) - i\,(\sqrt{\Phi}\,\frac{d}{dr} + \frac{\sqrt{\Phi}}{r} + \frac{\Phi'}{2\sqrt{\Phi}})(\varphi_1 - \varphi_3) = 0,$$

$$-\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}(\varphi_1 - \varphi_3) - i\,(\sqrt{\Phi}\,\frac{d}{dr} + \frac{\sqrt{\Phi}}{r} + \frac{\Phi'}{2\sqrt{\Phi}})(\varphi_1 + \varphi_3) - \frac{2i\nu}{r}\varphi_2 = 0. \qquad (6)$$

Введем новые функции:

$$f = \varphi_1 + \varphi_3, \qquad g = \varphi_1 - \varphi_3, \qquad f = \frac{1}{r\sqrt{\Phi}} F(r), \qquad g = \frac{1}{r\sqrt{\Phi}} G(r).$$

Тогда уравнения (6) примут вид

$$\varphi_2 = \frac{i\nu}{\omega}\frac{1}{r^2} G(r), \qquad F = \frac{\Phi}{i\omega}\frac{d}{dr} G(r),$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{M}{r(r-M)}\frac{d}{dr} + \left(\frac{\omega^2 r^2}{(r-M)^2} - \frac{j(j+1)}{r(r-M)}\right)\right] G(r) = 0 \qquad (7)$$

или (после замены переменной $x = r/M$)

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right)\frac{dG}{dx} + \left(M^2\omega^2 + \frac{j(j+1)}{x} + \frac{2M^2\omega^2 - j(j+1)}{x-1} + \frac{M^2\omega^2}{(x-1)^2}\right) G = 0. \qquad (8)$$

Применяя подстановку $G = (x-1)^\alpha\, x^\beta e^{\gamma x} g(x)$, из (8) получаем

$$\frac{d^2 g}{dx^2} + \left[\frac{1+2\alpha}{x-1} - \frac{1-2\beta}{x} + 2\gamma\right]\frac{dg}{dx} + \left[M^2\omega^2 + \gamma^2 + \frac{M^2\omega^2 + \alpha^2}{(x-1)^2} + \frac{\beta(\beta-2)}{x^2} + \right.$$

$$+\frac{j(j+1)+\alpha-\beta-\gamma-2\alpha\beta+2\beta\gamma}{x}+\frac{2M^2\omega^2-j(j+1)-\alpha+\beta+\gamma+2\alpha\beta+2\alpha\gamma}{x-1}\Bigg]g=0\,. \qquad (9)$$

При ограничениях на параметры $\alpha,\ \beta,\ \gamma$

$$\alpha=\pm iM\omega, \qquad \beta=0,2, \qquad \gamma=\pm iM\omega \qquad (10)$$

уравнение (9) упрощается:

$$\frac{d^2g}{dx^2}+\left[\frac{1+2\alpha}{x-1}-\frac{1-2\beta}{x}+2\gamma\right]\frac{dg}{dx}+\Bigg[\frac{j(j+1)+\alpha-\beta-\gamma-2\alpha\beta+2\beta\gamma}{x}+$$

$$+\frac{2M^2\omega^2-j(j+1)-\alpha+\beta+\gamma+2\alpha\beta+2\alpha\gamma}{x-1}\Bigg]g=0\,, \qquad (11)$$

что является вырожденным уравнением Гойна $G(A,B,C,D,F)$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+\left[A+\frac{1+B}{z}+\frac{1+C}{z-1}\right]\frac{dZ}{dz}+\Bigg[\frac{1}{2}\frac{A-B-C+AB-BC-2F}{z}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{A+B+C+AC+BC+2D+2F}{z-1}\Bigg]f=0$$

с параметрами

$$A=2\gamma\,, \qquad B=2\beta-2\,, \qquad C=2\alpha\,, \qquad D=2M^2\omega^2\,, \qquad F=1-j(j+1)\,. \qquad (12)$$

2. О векторном поле в подходе Даффина–Кеммера

Для уравнения Даффина–Кеммера [11] в пространстве-времени Швацшильда получим представление

$$[\,i\,\beta^0\partial_t+i\,\Phi\,(\beta^3\partial_r+\frac{1}{r}(\beta^1 j^{31}+\beta^2 j^{32})+$$

$$+\frac{\Phi'}{2\Phi}\beta^0 J^{03})+\frac{\sqrt{\Phi}}{r}\Sigma^{\kappa}_{\theta,\phi}-I_6\sqrt{\Phi}\ \,]\,\Phi(x)=0\,,$$

$$\Sigma^{\kappa}_{\theta,\phi}=i\,\beta^1\partial_\theta+\beta^2\,\frac{i\partial+i\,j^{12}\cos\theta}{\sin\theta}\,. \qquad (13)$$

Подстановка для решения в виде сферической волны имеет вид:

$$\Phi_{\omega jm}(x)=e^{-i\omega t}\,[\,f_1(r)\,D_0,\ f_2(r)\,D_{-1},\ f_3(r)\,D_0,\ f_4(r)\,D_{+1},$$

$$f_5(r)\,D_{-1},\ f_6(r)\,D_0,\ \ f_7(r)\,D_{+1},\ f_8(r)\,D_{-1},\ f_9(r)\,D_0,\ f_{10}(r)\,D_{+1}\,]\,. \qquad (14)$$

Диаганализируя оператор пространственной инверсии $\hat{P}^{cycl.}_{sph.}\,\Phi_{jm}=P\,\Phi_{jm}$, получаем два типа собственных значений с соответствующими ограничениями на радиальные функции:

$$P=(-1)^{j+1} \qquad f_1=f_3=f_6=0\,,\ f_4=-f_2\,,\ f_7=-f_5\,,\ f_{10}=+f_8\,; \qquad (15)$$

$$P=(-1)^{j} \qquad f_9=0\,,\ f_4=+f_2\,,\ f_7=+f_5\,,\ f_{10}=-f_8\,. \qquad (16)$$

Пусть $P=(-1)^{j+1}$, принимая во внимание (15), получаем более простые системы

$$i\omega\,f_5+i\Phi(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}+\frac{\Phi'}{2\Phi})\,f_8+i\nu\frac{\sqrt{\Phi}}{r}f_9=0\,, \qquad -i\omega\,f_2-\sqrt{\Phi}\,f_5=0\,,$$

$$-i\Phi\,(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r})\,f_2-\sqrt{\Phi}\,f_8=0\,, \qquad i2\nu\frac{\sqrt{\Phi}}{r}f_2-\sqrt{\Phi}\,f_9=0\,, \qquad (17)$$

откуда следует дифференциальное уравнение второго порядка (пусть $f_2=r^{-1}F_2$):

$$\frac{d^2F_2}{dr^2}+\frac{\Phi'}{\Phi}\frac{dF_2}{dr}+\left(\frac{\omega^2}{\Phi^2}-\frac{j(j+1)}{r^2\Phi}\right)F_2=0\,, \tag{18}$$

что совпадает с уравнением для G.

В случае $P=(-1)^j$ соответственно получаем:

$$\Phi\,(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r})\,F_6+\frac{2\nu}{r}\,F_5=0\,,$$

$$i\omega\,F_5+i\Phi\,(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r})\,F_8=0\,,\qquad i\omega\,F_6-i\frac{2\nu}{r}\,F_8=0\,,$$

$$-i\omega\,F_2+\frac{\nu}{r}\,F_1-F_5=0\,,$$

$$i\omega\,F_3+\Phi\,\frac{d}{dr}F_1+\Phi\,F_6=0\,,$$

$$i\Phi\,(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r})\,F_2+i\frac{\nu}{r}\,F_3+F_8=0\,, \tag{19}$$

где

$$F_1=\sqrt{\Phi}\,f_1\,,\quad F_2=f_2\,,\quad F_3=\sqrt{\Phi}\,f_3\,,\quad F_5=\sqrt{\Phi}\,f_5\,,\quad F_6=f_6\,,\quad F_8=\sqrt{\Phi}\,f_8\,. \tag{20}$$

3. Связь между формализмами

Рассмотрим систему (17), воспользовавшись известными результатами, полученными в разделе 1. Учитывая известные структуры 3-вектора и 6-мерного тензора

$$\Psi=e^{-i\omega t}\begin{vmatrix}0\\ \varphi_1 D_{-1}\\ \varphi_2 D_0\\ \varphi_3 D_{+1}\end{vmatrix},\qquad \Phi=e^{-i\omega t}\,[\ldots,\ldots,\ldots,\ldots,$$

$$f_5\,D_{-1},\ f_6\,D_0,\ f_7\,D_{+1},\ f_8\,D_{-1},\ f_9\,D_0,\ f_{10}\,D_{+1}]\,, \tag{21}$$

приходим к трем уравнениям

$$\varphi_2=f_6+i\,f_9\,,\qquad \varphi_1=f_5-i\,f_8\,,\qquad \varphi_3=f_7-i\,f_{10}\,. \tag{22}$$

Принимая во внимание ограничения, связанные с четностью (15), (16), из (22) получаем

$$\underline{P=(-1)^{j+1}}\,,\qquad f_9=-i\varphi_2\,,\qquad f_8=\frac{i}{2}(\varphi_1+\varphi_3),\qquad f_5=\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_3)\,; \tag{23}$$

$$\underline{P=(-1)^{j}}\,,\qquad F_6=\varphi_2\,,\qquad F_5=\frac{\sqrt{\Phi}}{2}(\varphi_1+\varphi_3)\,,\qquad F_8=i\frac{\sqrt{\Phi}}{2}(\varphi_1-\varphi_3)\,. \tag{24}$$

4. Анализ радиальной системы для состояний $P = (-1)^j$

В шести уравнениях (19) учтем (24). Три первых уравнения (они содержат только функции $F_5,\ F_6,\ F_8$) после введения новых переменных запишутся так:

$$-i\omega\,\varphi_2+i\frac{\nu}{r}\,i\sqrt{\Phi}\,(\varphi_1-\varphi_3)=0\,,$$

$$\Phi\,(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r})\varphi_2+\frac{\nu}{r}\,\sqrt{\Phi}\,(\varphi_1+\varphi_3)=0\,,$$

$$-\omega\,\sqrt{\Phi}\,(\varphi_1+\varphi_3)-\Phi\,(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r})\,i\sqrt{\Phi}\,(\varphi_1-\varphi_3)=0\,. \tag{25}$$

Уравнения (25) можно сравнить с уравнениями, полученными в комплексном подходе:

$$-\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}\varphi_2 + \frac{i\nu}{r}(\varphi_1 - \varphi_3) = 0\,,$$

$$\sqrt{\Phi}(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r})\varphi_2 + \frac{\nu}{r}(\varphi_1 + \varphi_3) = 0\,,$$

$$-\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}(\varphi_1 + \varphi_3) - i(\sqrt{\Phi}\frac{d}{dr} + \frac{\sqrt{\Phi}}{r} + \frac{\Phi'}{2\sqrt{\Phi}})(\varphi_1 - \varphi_3) = 0\,. \qquad (26)$$

Они совпадают. Три уравнения из (20) связывают радиальные функции электромагнитного 4-вектора F_1, F_2, F_3 с радиальными функциями электромагнитного тензора F_5, F_6, F_8:

$$i\omega F_3 + \Phi\frac{d}{dr}F_1 + \Phi F_6 = 0\,,$$

$$-i\omega F_2 + \frac{\nu}{r}F_1 - F_5 = 0\,,$$

$$i\Phi(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})F_2 + i\frac{\nu}{r}F_3 + F_8 = 0\,. \qquad (27)$$

Эта система эквивалентна следующей:

$$F_3 = \frac{i\Phi}{\omega}\frac{dF_1}{dr} - \frac{\Phi\nu}{\omega^2 r^2}G(r), \qquad F_2 = -\frac{i\nu}{\omega r}F_1 + \frac{\Phi}{\sqrt{2}\,\omega^2 r}\frac{dG(r)}{dr},$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{M}{r(r-M)}\frac{d}{dr} + \left(\frac{\omega^2 r^2}{(r-M)^2} - \frac{j(j+1)}{r(r-M)}\right)\right]G(r) = 0. \qquad (28)$$

Обращаем внимание, что все члены с F_1 компенсируют друг друга. Это означает, что функция F_1 может быть произвольной. Этот факт является проявлением калибровочной свободы в электромагнитных 4-потенциалах по фиксированном электромагнитном тензоре.

5. Анализ радиальной системы для состояний $\mathbf{P = (-1)^{j+1}}$

Рассмотрим теперь случай $P = (-1)^{j+1}$

$$f_2 = -\frac{r}{2\nu}\varphi_2\,, \qquad +\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}\varphi_2 + \frac{i\nu}{r}(\varphi_1 - \varphi_3) = 0\,, \qquad -\sqrt{\Phi}(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r})\varphi_2 + \frac{\nu}{r}(\varphi_1 + \varphi_3) = 0,$$

$$-\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}(\varphi_1 - \varphi_3) - i\sqrt{\Phi}(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{\Phi'}{2\Phi})(\varphi_1 + \varphi_3) + \frac{2i\nu}{r}\varphi_2 = 0\,. \qquad (29)$$

Обращаем внимание, что функция f_2 определяемого электромагнитного 4-вектора однозначно определяется компонентами тензора. Это означает, что в этом классе решений не существует калибровочной свободы.

Сравним уравнения (29) с первыми тремя уравнениями в (26). Системы (29), (26) отличаются только знаком функции φ_2.

Введем новые переменные $f = \varphi_1 + \varphi_3$, $g = \varphi_1 - \varphi_3$, тогда

$$\varphi_2 = -\frac{i\nu}{\omega}\frac{\sqrt{\Phi}}{r}g\,, \qquad i\sqrt{\Phi}(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r})\frac{\sqrt{\Phi}}{r}g + \frac{\omega}{r}f = 0\,,$$

$$-\frac{\omega^2}{\Phi} g - i\omega\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{\Phi'}{2\Phi}\right) f + \frac{2\nu^2}{r^2}\ g = 0 . \qquad (30)$$

Система (30) упрощается с помощью подстановки

$$g = \frac{1}{r\sqrt{\Phi}} G(r) , \qquad f = \frac{1}{r\sqrt{\Phi}} F(r) ,$$

в результате чего приходим к уравнениям:

$$P = (-1)^{j+1} \qquad \varphi_2 = -\frac{i\nu}{\omega r^2} G , \qquad \omega F = -i\Phi \frac{d}{dr} G ,$$

$$\frac{d^2G}{dr^2} + \frac{M}{r(r-M)} \frac{dG}{dr} + \left(\frac{\omega^2 r^2}{(r-M)^2} - \frac{j(j+1)}{r(r-M)} \right) G = 0 . \qquad (31)$$

Заключение

Общековариантный тетрадный формализм Римана–Зильберштейна–Майораны–Оппенгеймера применен к решению уравнений электродинамики в метрике Шварцшильда. После разделения переменных задача сведена к дифференциальному уравнению того же вида, которое возникает в теории скалярного поля в пространстве-времени Шварцшильда. Полученное уравнение является вырожденным уравнением Гойна.

Электромагнитное поле рассмотрено также на основе 10-мерного матричного формализма Даффина–Кеммера, в котором в дополнение к шести компонентам электромагнитного тензора используются 4 компоненты векторного потенциала. С помощью оператора пространственной четности радиальная система из 10 уравнений расщепляется на подсистемы из 4 и 6 уравнений соответственно. В этом подходе задача также сводится к вырожденному уравнению Гойна.

В частности показано, каким образом решения, найденные в комплексной форме, встроены в 10-мерный формализм. Кроме того, определены радиальные функции, ответственные за калибровочные степени свободы электромагнитного поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Misner, C. Gravitation / C. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler. – San Francisco : Freeman, 1973.

2. Landau, L.D. Classical Theory of Fields / L.D. Landau, E.M. Lifshitz. – Oxford : Pergamon Press, 1975.

3. Schwarzschild, K. Uber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie / K. Schwarzschild // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissen. Phys. Math. K1. – 1916. – P. 189–196.

4. Bachelot, A. Gravitational scattering of electromagnetic field by Schwarzschild black-hole / A. Bachelot // Annales de l'institut Henri Poincarre̅e (A) Physique theorique. – 1991. – Vol. 54, № 3 – P. 261–320.

5. Newman, E.T. New Approach to Einstein and Maxwell-Einstein field equations / E.T. Newman // J.Math. Phys. – 1961. –Vol. 2. –P. 674–676.

6. Чандрасекхар, С. Математическая теория черных дыр : в 2 ч. / С. Чандрасекхар. – Москва : Мир, 1986. – 2 ч.

7. Пенроуз, Р. Спиноры и пространство-время : в 2 т. / Р. Пенроуз, В. Риндлер. – Москва : Мир, 1987. – Т. 1: Два-спинорное исчисление и релятивистские поля. – 528 с.

8. Bogush, A.A. Maxwell equations in complex form of Majorana–Oppenheimer, solutions with cylindric symmetry in Riemann S_3 and Lobachevsky H_3 spaces / A.A. Bogush,

G.G. Krylov, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // Ricerche di matematica. – 2010. – Vol. 59, № 1. – P. 59–96.

9. Duffin–Kemmer–Petiau formalism reexamined: non-relativistic approximation for spin 0 and spin 1 particles in a Riemannian space–time / A.A. Bogush [et all] // Annales de la Fondation Louis de Broglie. – 2007. – Vol. 32, № 2–3. – P. 355–381.

10. Варшалович, Д.А. Квантовая теория углового момента / Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. – Ленинград : Наука, 1975. – 441 с.

11. Богуш, А.А. Общековариантный формализм Даффина-Кеммера и сферические волны для векторного поля в пространстве де Ситтера / А.А. Богуш, В.С. Отчик, В.М. Редьков. – Минск, 1986. – 45 с. – (Препринт / Акад. наук БССР, Ин-т физики; № 426).

12. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск : Белорус. наука, 2009. – 496 с.

***E.M. Ovsiyuk.* On Maxwell Equations in General Covariant Majorana – Oppenheimer Form in the Space of Schwarzschild Black Hole**

In is shown that the generally covariant method of Riemann – Silberstein – Majorana – Oppenheime in electrodynamics, specified in Schwarzschild metrics, after separating the variables reduces the problem of electromagnetic solutions to a differential equation similar to that arising in the case of a scalar filed in the Schwarzschild space-time. This differential equation is recognized as a confluent Hein equation. Also, the electromagnetic field is treated on the base of 10-dimensional Duffin–Kemmer approach, when in addition to six components of the strength tensor one uses a 4-component electromagnetic potential. The corresponding system of 10 radial equations is simplified by the use of additional constraints steaming from value equation for the spatial parity operator; the radial system is divided into two subsystems of 4 and 6 equations. In this second approach the problem of electromagnetic field reduces to the confluent Hein differential equation as well. In particular, we show explicitly how solutions found in the complex form are embedded into the 10-dimensional formalism. Besides we determine radial functions that are responsible for gauge degrees of freedom of the electromagnetic field.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 25.04.2011 г.