УДК 517.955.8

П.Ф. Самусенко

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ВЫРОЖДЕНИЕМ

В работе построено асимптотическое решение первой краевой задачи для линейной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа с вырождением.

Введение

Исследованию возможности применения метода Фурье для решения краевых задач математической физики посвящены многочисленные работы как отечественных, так и зарубежных математиков. При этом до середины XX ст. в основном рассматривались указанные задачи с постоянными коэффициентами, что существенным образом упрощало их решение. Первые наиболее общие результаты для систем с переменными коэффициентами были получены О.А. Ладыженской, а именно: были установлены достаточные условия существования и единственности классического и обобщенного решения основных краевых задач в линейном случае. При этом обосновано применение метода Фурье для их решения [1]. Аналогичные результаты о существовании и единственности решений соответствующих задач для сингулярно возмущенных уравнений получены О.А. Олейник.

В данной работе рассматривается первая краевая задача для линейной сингулярно возмущенной гиперболической системы

$$\varepsilon^2 B(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon C(x,t)u\,,\ t\in[0;T],\ x\in[0;L], \tag{1}$$

$$u(0,t,\varepsilon) = u(L,t,\varepsilon) = 0\,, \tag{2}$$

$$u(x,0,\varepsilon) = \varphi(x)\,,\ \frac{\partial u(x,0,\varepsilon)}{\partial t} = \psi(x)\,, \tag{3}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(x,t)$ – квадратные матрицы 2-го порядка, $u(x,t,\varepsilon)$ – искомая 2-мерная вектор-функция, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 << 1$, причем матрица $B(t)$ вырожденна на отрезке $[0;T]$. Такие системы уравнений ранее не рассматривались.

По постановке задача близка к исследованиям Ю.А. Митропольского и Г.П. Хомы регулярно возмущенных квазилинейных и нелинейных уравнений гиперболического типа [2]. С.Ф. Фещенко и Н.И. Шкиль при решении первой краевой задачи для гиперболических уравнений с медленно меняющимися коэффициентами использовали метод Фурье [3]. При этом вопрос о сходимости соответствующих рядов и возможности их почленного дифференцирования оставался открытым.

Классическое решение первой краевой задачи

Допустим, что выполняются условия:

1. $A(t)$, $B(t) \in C^\infty[0;T]$, $C(x,t) \in C^\infty(\overline{D})$, $\overline{D} = \{(x,t) : 0 \le x \le L, 0 \le t \le T\}$.
2. $\varphi(x) \in C^4[0;L]$, $\psi(x) \in C^4[0;L]$.

3. $\varphi^{(2k)}(0)=\varphi^{(2k)}(L)=0$, $\psi^{(2k)}(0)=\psi^{(2k)}(L)=0$, $k=0,1$.

4. Пучок матриц $A(t)-\lambda B(t)$, регулярный для всех $t\in[0;T]$, имеет один конечный и один бесконечный элементарный делитель.

5. $\lambda_0(t)>0$, где $\lambda_0(t)$ – собственное значение матрицы $A(t)$ относительно $B(t)$.

Покажем, что существует единственное решение задачи (1) – (3). Для этого, следуя [3], будем искать решение системы (1) в виде ряда

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{s=1}^{\infty}z_s(t,\varepsilon)v_s(x) \tag{4}$$

(ниже будет доказана сходимость ряда (4) и возможность его двукратного дифференцирования (в работе [3] этот вопрос не рассматривается)), где $z_s(t,\varepsilon)$ – искомая 2-мерная вектор-функция, а $v_s(x)$ – скалярная функция, удовлетворяющая уравнению

$$v_s''(x)+\omega_s^2 v_s(x)=0, \tag{5}$$

$\omega_s=\dfrac{s\pi}{L}$, с краевыми условиями $v_s(0)=v_s(L)=0$. Тогда $v_s(x)=\sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin\omega_s x$, $s\in N$.

Заметим, что при таком выборе постоянной, $\int\limits_0^L v_k(x)v_s(x)dx=\delta_{ks}$,

где δ_{ks} – символ Кронекера.

Подставляя (4) в (1) с учетом (5), умножая полученное равенство на $v_s(x)$ и интегрируя обе части его по x в пределах от 0 до L, приходим к системе:

$$\varepsilon^2 B(t)z_s''(t)+\omega_s^2 A(t)z_s=\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}C_{sk}(t)z_k\,,\ s\in N, \tag{6}$$

где $C_{sk}(t)=\int\limits_0^L C(x,t)v_k(x)v_s(x)dx$.

Из условий 1, 4 следует существование неособенных матриц $P(t)$, $Q(t)$, $t\in[0;T]$, таких, что $P(t)B(t)Q(t)=H\equiv\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, $P(t)A(t)Q(t)=\Omega(t)\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&\lambda_0(t)\end{pmatrix}$ [4].

При этом $P(t)$, $Q(t)\in C^{\infty}[0;T]$.

Полагая $z(t,\varepsilon)=Q(t)r_s(t,\varepsilon)$ и умножая обе части системы (6) слева на $P(t)$, получим

$$\varepsilon^2 Hr_s''(t)+\omega_s^2\Omega(t)r_s=\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}D_{0sk}(t)r_k+\varepsilon^2 D_1(t)r_s+\varepsilon^2 F(t)r_s', \tag{7}$$

где $D_{0sk}(t)=P(t)C_{sk}(t)Q(t)$, $s,k\in N$, $D_1(t)=-P(t)B(t)Q''(t)$,

$$F(t)=-2P(t)B(t)Q'(t).$$

Заметим, что элементы первых строк матриц $D_1(t)$ и $F(t)$ тождественно равны нулю.

6. Пусть $\dfrac{\partial C(0,t)}{\partial x}=\dfrac{\partial C(L,t)}{\partial x}=0$, $t\in[0;T]$.

Для оценки элементов $D_{0sk}(t)$ рассмотрим подробнее структуру матрицы $C_{sk}(t)$. Пусть $\{C(x,t)\}_{ij}$ – соответствующий элемент матрицы $C(x,t)$. Тогда

$$\{C_{sk}(t)\}_{ij}=\int\limits_0^L\{C(x,t)\}_{ij}v_k(x)v_s(x)dx=$$

$$= \frac{1}{L}\int_0^L \{C(x,t)\}_{ij} \cos(\omega_k - \omega_s)x dx - \frac{1}{L}\int_0^L \{C(x,t)\}_{ij} \cos(\omega_k + \omega_s)x dx .$$

Зафиксируем t, $t \in [0;T]$. Тогда, интегрируя по частям, получаем

$$| \{C_{sk}(t)\}_{ij} | \le \frac{M}{(\omega_k - \omega_s)^4}, \; i, j = 1,2, \; k \ne s, \; k, s \in N,$$

причем постоянная M не зависит от k, s. В дальнейшем, если существенен только факт ограниченности, а не величина соответствующей постоянной, будем писать одну и ту же букву M.

Запишем систему (7) следующим образом:

$$\varepsilon^2 \widetilde{H} r'' + \widetilde{\Omega}(t) r = \varepsilon(\widetilde{D}_0(t) + \varepsilon \widetilde{D}_1(t)) r + \varepsilon^2 \widetilde{F}(t) r', \tag{8}$$

где $r(t,\varepsilon)$ – бесконечномерный вектор с компонентами $r_s(t,\varepsilon)$, $\widetilde{H} = diag\{H, H, ...\}$, $\widetilde{\Omega}(t) = diag\{\omega_1^2 \Omega(t), \omega_2^2 \Omega(t), ...\}$, $\widetilde{D}_0(t)$ – бесконечная матрица, состоящая из блоков $D_{0sk}(t)$, $s,k \in N$, $\widetilde{D}_1(t) = diag\{D_1(t), D_1(t), ...\}$, $\widetilde{F}(t) = diag\{F(t), F(t), ...\}$.

Решение системы (8) будем искать в виде

$$r(t,\varepsilon) = \Pi_+(t,\varepsilon)\xi_+(t,\varepsilon), \tag{9}$$

где $\Pi_+(t,\varepsilon)$ – бесконечная матрица, а $\xi_+(t,\varepsilon)$ – бесконечномерная вектор-функция, являющаяся решением системы

$$\varepsilon \frac{d\xi_+}{dt} = \Lambda_+(t,\varepsilon)\xi_+, \; \xi_+(0,\varepsilon) = a, \tag{10}$$

a – бесконечномерный вектор, компоненты которого равны 1, $\Lambda_+(t,\varepsilon)$ – бесконечная диагональная матрица, при этом

$$\Pi_+(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i \Pi_+^{(i)}(t), \; \Lambda_+(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i \Lambda_+^{(i)}(t). \tag{11}$$

Для определения матриц $\Pi_+^{(i)}(t)$, $\Lambda_+^{(i)}(t)$, $i = \overline{0,m}$, подставим (9), учитывая (10), в систему (8). Тогда матрица при $\xi_+(t,\varepsilon)$ имеет вид:

$$\widetilde{H}\Pi_+(t,\varepsilon)\Lambda_+^2(t,\varepsilon) + \widetilde{\Omega}(t)\Pi_+(t,\varepsilon) - \varepsilon(\widetilde{D}_0(t) + \varepsilon\widetilde{D}_1(t))\Pi_+(t,\varepsilon) - \varepsilon^2 \widetilde{F}(t)\Pi_+'(t,\varepsilon) -$$
$$- \varepsilon\widetilde{F}(t)\Pi_+(t,\varepsilon)\Lambda_+(t,\varepsilon) + \varepsilon^2 \widetilde{H}\Pi_+''(t,\varepsilon) + 2\varepsilon\widetilde{H}\Pi_+'(t,\varepsilon)\Lambda_+(t,\varepsilon) + \varepsilon\widetilde{H}\Pi_+(t,\varepsilon)\Lambda_+'(t,\varepsilon).$$

Приравнивая в этой матрице коэффициенты при ε^i, $i = \overline{0,m}$, к нулевой матрице, получаем уравнения:

$$\widetilde{H}\Pi_+^{(0)}(t)(\Lambda_+^{(0)}(t))^2 + \widetilde{\Omega}(t)\Pi_+^{(0)}(t) = 0, \tag{12}$$

$$\widetilde{H}\Pi_+^{(i)}(t)(\Lambda_+^{(0)}(t))^2 + \widetilde{\Omega}(t)\Pi_+^{(i)}(t) = \widetilde{D}_0(t)\Pi_+^{(i-1)}(t) + \widetilde{D}_1(t)\Pi_+^{(i-2)}(t) + \widetilde{F}(t)(\Pi_+^{(i-2)}(t))' +$$
$$+ \widetilde{F}(t)\sum_{j=0}^{i-1}\Pi_+^{(j)}(t)\Lambda_+^{(i-j-1)}(t) - \widetilde{H}(\Pi_+^{(i-2)}(t))'' - 2\widetilde{H}\sum_{j=0}^{i-1}(\Pi_+^{(j)}(t))'\Lambda_+^{(i-j-1)}(t) - \widetilde{H}\sum_{j=0}^{i-1}\Pi_+^{(j)}(t)(\Lambda_+^{(i-j-1)}(t))' -$$
$$- \widetilde{H}\Pi_+^{(0)}(t)(\Lambda_+^{(0)}(t)\Lambda_+^{(i)}(t) + \sum_{j=1}^{i-1}\Lambda_+^{(j)}(t)\Lambda_+^{(i-j)}(t)) - \widetilde{H}\sum_{k=1}^{i-1}\sum_{j=0}^{i-k}\Pi_+^{(k)}(t)\Lambda_+^{(j)}(t)\Lambda_+^{(i-k-j)}(t), \tag{13}$$

$i = \overline{1,m}$, $\Pi_+^{(k)}(t) \equiv 0$, $\Lambda_+^{(k)}(t) \equiv 0$, $t \in [0;T]$, $k < 0$.

Докажем разрешимость матричных уравнений (12), (13). Пусть $p_{l+}^{(0)}(t)$, $l \in N$, – столбцы матрицы $\Pi_+^{(0)}(t)$, $\Lambda_+^{(0)}(t) = diag\{0, \lambda_{1+}^{(0)}(t), 0, \lambda_{2+}^{(0)}(t), ...\}$. Тогда систему (12) можно записать следующим образом: $(\widetilde{\Omega}(t) + (\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2 \widetilde{H}) p_{2l+}^{(0)}(t) = 0$,

$$\widetilde{\Omega}(t) p_{2l-1,+}^{(0)}(t) = 0, \; l \in N.$$

Положим

$$\lambda_{l+}^{(0)}(t) = i\omega_l \sqrt{\lambda_0(t)}\,,\ l \in N\,,\ i^2 = -1\,,$$

$$p_{2l-1,+}^{(0)}(t) \equiv 0\,,\ \{p_{2l+}^{(0)}(t)\}_{2j-1} \equiv 0\,,\ t \in [0;T]\,,\ j,l \in N\,,$$

$$\{p_{2l+}^{(0)}(t)\}_{2j} \equiv 0\,,\ t \in [0;T]\,,\ j \neq l\,,\ j,l \in N\,,$$

$\{p_{2l+}^{(0)}(t)\}_{2l}$, $l \in N$, определим ниже.

По построению матрицы $\Pi_{+}^{(0)}(t)$ и $\Lambda_{+}^{(0)}(t)$ диагональные. А потому соответствующие произведения бесконечных матриц в (12) существуют и являются диагональными матрицами.

Из системы (13) получаем:

$$(\widetilde{\Omega}(t) + (\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2 \widetilde{H}) p_{2l+}^{(i)}(t) = b_{2l+}^{(i)}(t)\,,$$

$$\widetilde{\Omega}(t) p_{2l-1,+}^{(i)}(t) = b_{2l-1,+}^{(i)}(t)\,,$$

$l \in N$, где

$$b_{2l+}^{(i)}(t) = \widetilde{D}_0(t) p_{2l+}^{(i-1)}(t) + \widetilde{D}_1(t) p_{2l+}^{(i-2)}(t) + \widetilde{F}(t)(p_{2l+}^{(i-2)}(t))' + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_{l+}^{(i-j-1)}(t) \widetilde{F}(t) p_{2l+}^{(j)}(t) -$$

$$- \widetilde{H}(p_{l+}^{(i-2)}(t))'' - 2\widetilde{H} \sum_{j=0}^{i-1} (p_{2l+}^{(j)}(t))' \lambda_{l+}^{(i-j-1)}(t) - \widetilde{H} \sum_{j=0}^{i-1} p_{2l+}^{(j)}(t) (\lambda_{l+}^{(i-j-1)}(t))' -$$

$$- \widetilde{H} p_{2l+}^{(0)}(t) (2\lambda_{l+}^{(0)}(t) \lambda_{l+}^{(i)}(t) + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{l+}^{(j)}(t) \lambda_{l+}^{(i-j)}(t)) - \widetilde{H} \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=0}^{i-k} p_{2l+}^{(k)}(t) \lambda_{l+}^{(j)}(t) \lambda_{l+}^{(i-k-j)}(t),$$

$$b_{2l-1,+}^{(i)}(t) = \widetilde{D}_0(t) p_{2l-1,+}^{(i-1)}(t) + \widetilde{D}_1(t) p_{2l-1,+}^{(i-2)}(t) + \widetilde{F}(t)(p_{2l-1,+}^{(i-2)}(t))' - \widetilde{H}(p_{2l-1,+}^{(i-2)}(t))'',$$

$l \in N$, $i = \overline{1,m}$, где $p_{l+}^{(i)}(t)$, $l \in N$, $i = \overline{1,m}$, – столбцы матрицы $\Pi_{+}^{(i)}(t)$, $\Lambda_{+}^{(i)}(t) = diag\{0, \lambda_{1+}^{(i)}(t), 0, \lambda_{2+}^{(i)}(t), \ldots\}$.

Тогда

$$p_{2l-1,+}^{(i)}(t) \equiv 0, t \in [0;T],$$

$$\{p_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2j-1} = \frac{\{b_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2j-1}}{\omega_j^2},$$

$i = \overline{1,m}$, $j,l \in N$,

$$\{p_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2j} = \frac{\{b_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2j}}{\lambda_0(t)(\omega_j^2 - \omega_l^2)}, i = \overline{1,m}, j \neq l, j,l \in N,$$

$$\{p_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2l} \equiv 0, t \in [0;T], i = \overline{1,m}, l \in N,$$

$$\lambda_{l+}^{(i)}(t) = \frac{1}{2\lambda_{l+}^{(0)}(t)\{p_{2l+}^{(0)}(t)\}_{2l}} \left(\sum_{h=1}^{\infty} (\{\widetilde{D}_0(t)\}_{2l,h} \{p_{2l+}^{(i-1)}(t)\}_h + \right.$$

$$+ \{\widetilde{D}_1(t)\}_{2l,h} \{p_{2l+}^{(i-2)}(t)\}_h + \{\widetilde{F}(t)\}_{2l,h} \{p_{2l+}^{(i-2)}(t)\}'_h + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_{l+}^{(i-j-1)}(t) \{\widetilde{F}(t)\}_{2l,h} \{p_{2l+}^{(j)}(t)\}_h) -$$

$$- \{p_{2l+}^{(i-2)}(t)\}''_{2l} - 2\sum_{j=0}^{i-1} \{p_{2l+}^{(j)}(t)\}'_{2l} \lambda_{l+}^{(i-j-1)}(t) - \sum_{j=0}^{i-1} \{p_{2l+}^{(j)}(t)\}_{2l} (\lambda_{l+}^{(i-j-1)}(t))' -$$

$$\left. - \{p_{2l+}^{(0)}(t)\}_{2l} \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{l+}^{(j)}(t) \lambda_{l+}^{(i-j)}(t) - \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=0}^{i-k} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2l} \lambda_{l+}^{(j)}(t) \lambda_{l+}^{(i-k-j)}(t) \right),$$

$i = \overline{1,m}$, $l \in N$.

Формулы для определения $p_{l+}^{(i)}(t)$, $\lambda_{l+}^{(i)}(t)$, $l \in N$, $i=\overline{1,m}$ получены при условии, что соответствующие бесконечные матрицы в системе (13) существуют. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Допустим, что $p_{l+}^{(0)}(t) \equiv const$, $t \in [0;T]$, $l \in N$. Будем считать, что пара натуральных чисел (j,l) принадлежит множеству A $((j,l) \in A)$, если $j = 2q-1, 2q$; $l = 2r-1, 2r$; $q \neq r$, $q, r \in N$.

По построению

$$| \{\widetilde{D}_0(t) p_{2l+}^{(0)}\}_k | \leq \begin{cases} \dfrac{M \, |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{(\omega_j - \omega_l)^4}, (k,2l) \in A, \\ M \, |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|, (k,2l) \notin A, k = 2j-1, 2j; \; j,l \in N, \end{cases} \tag{14}$$

причем постоянная M не зависит от j, l.

Тогда $p_{l+}^{(1)}(t)$, $\lambda_{l+}^{(1)}(t)$, $l \in N$, для всех $t \in [0;T]$ существуют и

$$| \{p_{2l+}^{(1)}(t)\}_{2j-1} | \leq \begin{cases} \dfrac{M \, |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{\omega_j^2 (\omega_j - \omega_l)^4}, (2j-1,2l) \in A, \\ \dfrac{M \, |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{\omega_j^2}, (2j-1,2l) \notin A, \; j,l \in N; \end{cases}$$

$$| \{p_{2l+}^{(1)}(t)\}_{2j} | \leq \frac{M \, |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{|\omega_j^2 - \omega_l^2| (\omega_j - \omega_l)^4}, (2j,2l) \in A, \; j,l \in N;$$

$$| \lambda_{l+}^{(1)}(t) | \leq M, l \in N,$$

постоянная M не зависит от j, l.

Используя метод математической индукции, доказываем существование $p_{l+}^{(i)}(t)$, $\lambda_{l+}^{(i)}(t)$, $l \in N$, $i = \overline{2,m}$. При этом

$$| \{p_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2j-1} | \leq \begin{cases} \dfrac{M \, |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{\omega_j^2 (\omega_j - \omega_l)^4}, (2j-1,2l) \in A, \\ \dfrac{M \, |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{\omega_j^2 \omega_l}, (2j-1,2l) \notin A, \; j,l \in N; \end{cases} \tag{15}$$

$$| \{p_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2j} | \leq \frac{M \, |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{|\omega_j^2 - \omega_l^2| (\omega_j - \omega_l)^4}, (2j,2l) \in A, \; j,l \in N; \tag{16}$$

$$| \lambda_{l+}^{(i)}(t) | \leq M, l \in N, \tag{17}$$

$i = \overline{2,m}$; постоянная M не зависит от j, l.

Действительно, допустим, что оценки (15) – (17) верны при $i = \overline{2,k}$, $k \geq 2$. Тогда

$$\{\widetilde{D}_0(t) p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2j-1} = \sum_{h=1}^{\infty} \{\widetilde{D}_0(t)\}_{2j-1,h} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h =$$

$$= \sum_{\substack{h=1 \\ (2j-1,h) \in A}}^{\infty} \{\widetilde{D}_0(t)\}_{2j-1,h} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h + \sum_{\substack{h=1 \\ (2j-1,h) \notin A}}^{\infty} \{\widetilde{D}_0(t)\}_{2j-1,h} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h =$$

$$= \sum_{\substack{h=1 \\ (2j-1,h) \in A \\ h=2p-1, p \in N}}^{\infty} \{\widetilde{D}_0(t)\}_{2j-1,h} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h + \sum_{\substack{h=1 \\ (2j-1,h) \in A \\ h=2p, p \in N}}^{\infty} \{\widetilde{D}_0(t)\}_{2j-1,h} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h +$$

$$+\{\widetilde{D}_0(t)\}_{2j-1,2j-1}\{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2j-1}+\{\widetilde{D}_0(t)\}_{2j-1,2j}\{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2j}=$$

$$=\sum_{\substack{h=1\\(2j-1,h)\in A\\h=2p-1,\,p\in N\\(2p-1,2l)\in A}}^{\infty}\{\widetilde{D}_0(t)\}_{2j-1,h}\{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h+\sum_{\substack{h=1\\(2j-1,h)\in A\\h=2p-1,\,p\in N\\(2p-1,2l)\notin A}}^{\infty}\{\widetilde{D}_0(t)\}_{2j-1,h}\{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h+$$

$$+\sum_{\substack{h=1\\(2j-1,h)\in A\\h=2p,\,p\in N}}^{\infty}\{\widetilde{D}_0(t)\}_{2j-1,h}\{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h+\{\widetilde{D}_0(t)\}_{2j-1,2j-1}\{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2j-1}+\{\widetilde{D}_0(t)\}_{2j-1,2j}\{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2j}.$$

Таким образом,

$$|\{\widetilde{D}_0(t)p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2j-1}|\le K_1|\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|\left(\sum_{\substack{p=1\\p\ne j,p\ne l}}^{\infty}\frac{1}{(\omega_j-\omega_p)^4\omega_p^2(\omega_p-\omega_l)^4}+\right.$$

$$+\frac{1}{\omega_l^2(\omega_j-\omega_l)^4}+\sum_{\substack{p=1\\p\ne j,p\ne l}}^{\infty}\frac{1}{(\omega_j-\omega_p)^4|\omega_p^2-\omega_l^2|(\omega_p-\omega_l)^4}+\frac{1}{\omega_j^2(\omega_j-\omega_l)^4}+$$

$$\left.+\frac{1}{|\omega_j^2-\omega_l^2|(\omega_j-\omega_l)^4}\right)\le\frac{K_2|\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{(\omega_j-\omega_l)^4}$$

для всех $(2j-1,2l)\in A$, $j,l\in N$ (постоянные K_1, K_2 не зависят от $j,l\in N$). Если же $(2j-1,2l)\notin A$, $j,l\in N$, то аналогично получаем

$$|\{\widetilde{D}_0(t)p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2j-1}|\le\frac{M_2|\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{\omega_l}.$$

Откуда и следует (15) при $i=k+1$. Аналогично показываем правильность оценок (16), (17).

Таким образом, по принципу математической индукции, для всех $i=\overline{2,m}$, $j,l\in N$ имеют место оценки (15)–(17).

Пусть $w_+(t,\varepsilon)=\Pi_+(t,\varepsilon)\xi_+(t,\varepsilon)$. Положив $\lambda_{l-}^{(0)}(t)=-i\omega_l\sqrt{\lambda_0(t)},\ l\in N,\ i^2=-1,$ аналогично определяем $\Pi_-(t,\varepsilon)$, $\Lambda_-(t,\varepsilon)$, $\xi_-(t,\varepsilon)$ и $w_-(t,\varepsilon)$.

Построим вектор-функцию

$$u^{(m)}(x,t,\varepsilon)=Q(t)\sum_{s=1}^{\infty}(w_{s+}(t,\varepsilon)+w_{s-}(t,\varepsilon))v_s(x),\tag{18}$$

где

$$w_{s+}(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\{w_+(t,\varepsilon)\}_{2s-1}\\\{w_+(t,\varepsilon)\}_{2s}\end{pmatrix},\ s\in N,$$

$$\{w_+(t,\varepsilon)\}_j=\sum_{l=1}^{\infty}\{\Pi_+(t,\varepsilon)\}_{jl}\{\xi_+(t,\varepsilon)\}_l,\ j=2s-1,2s,\ s\in N.$$

Такую же структуру имеет $w_{s-}(t,\varepsilon)$.

Величины $\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}$ и $\{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}$, $l\in N$, находим из системы

$$\{w_+(0,\varepsilon)\}_{2l}+\{w_-(0,\varepsilon)\}_{2l}=\sum_{j=1}^{2}\{Q^{-1}(0)\}_{2j}\{a_l\}_j,$$

$$(\{w_+(t,\varepsilon)\}_{2l}+\{w_-(t,\varepsilon)\}_{2l})'\big|_{t=0}=\sum_{j=1}^{2}\{Q^{-1}(0)\}_{2j}\{b_l\}_j-\tag{19}$$

$$-\sum_{j=1}^{2}\{Q^{-1}(0)Q'(0)\}_{2j}(\{w_+(0,\varepsilon)\}_{2(l-1)+j}+\{w_-(0,\varepsilon)\}_{2(l-1)+j}),$$

$l \in N$, где $\{a_l\}_j$ и $\{b_l\}_j$ – компоненты векторов $a_l = \int\limits_0^L \varphi(x) v_l(x) dx$ и $b_l = \int\limits_0^L \psi(x) v_l(x) dx$ соответственно, $l \in N$.

По формулам Крамера получаем

$$\begin{aligned} \{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l} &= f_1\left(\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}, \{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}\right), \\ \{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l} &= f_2\left(\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}, \{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}\right), \end{aligned} \qquad (20)$$

$l \in N$.

По построению

$$\left\| f_i\left(\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}, \{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}\right)\right\| \le \frac{M_1}{\omega_l^4} + \varepsilon M_2 \left(|\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}| + |\{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}| + \frac{1}{\omega_l^4} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{h=1 \\ h \ne l}}^{\infty} \left(\frac{|\{p_{2h+}^{(0)}\}_{2h}| + |\{p_{2h-}^{(0)}\}_{2h}|}{|\omega_l^2 - \omega_h^2| (\omega_l - \omega_h)^4} + \frac{\omega_h}{\omega_l} \left(\frac{|\{p_{2h+}^{(0)}\}_{2h}| + |\{p_{2h-}^{(0)}\}_{2h}|}{|\omega_l^2 - \omega_h^2| (\omega_l - \omega_h)^4} + \frac{|\{p_{2h+}^{(0)}\}_{2h}| + |\{p_{2h-}^{(0)}\}_{2h}|}{\omega_l^2 (\omega_l - \omega_h)^4} \right)\right)\right),$$

$i = 1,2,$ постоянные M_1, M_2 не зависят от l.

На множествах

$$S_{l4} = \left\{ (\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}, \{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}) \in R^2 : \max\{|\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|, |\{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}|\} \le \frac{M}{\omega_l^4} \right\}, l \in N,$$

$M < M_1$, функции $f_1(\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}, \{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l})$ и $f_2(\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}, \{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l})$ удовлетворяют условиям теоремы Банаха [5]. А потому для определения $\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}$ и $\{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}$ воспользуемся методом последовательных приближений. При этом

$$\| p_{2l+}^{(0)} \| \le \frac{M}{\omega_l^4}, \| p_{2l-}^{(0)} \| \le \frac{M}{\omega_l^4}, l \in N$$

(постоянная M не зависит от l).

Допустим, что имеют место следующие условия:

7. Компоненты $\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}$, $\{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}$, $l \in N$, решения системы (20) отличны от нуля.

8.

$$\{w_+(0,\varepsilon)\}_{2l-1} + \{w_-(0,\varepsilon)\}_{2l-1} = \sum_{j=1}^{2} \{Q^{-1}(0)\}_{1j} \{a_l\}_j,$$

$$(\{w_+(t,\varepsilon)\}_{2l-1} + \{w_-(t,\varepsilon)\}_{2l-1})'_{|t=0} = \sum_{j=1}^{2} \{Q^{-1}(0)\}_{1j} \{b_l\}_j -$$

$$- \sum_{j=1}^{2} \{Q^{-1}(0) Q'(0)\}_{1j} (\{w_+(0,\varepsilon)\}_{2(l-1)+j} + \{w_-(0,\varepsilon)\}_{2(l-1)+j}),$$

$l \in N$.

Замечание. Условие 8 выполняется если, например,

$$\frac{d^k \{\widetilde{D}_0^{(0)}(0)\}_{2l-1,2j}}{dt^k} = 0, k = 0,1; \; j,l \in N,$$

$$\sum_{j=1}^{2} \{Q^{-1}(0)\}_{1j} \{a_l\}_j = \sum_{j=1}^{2} \{Q^{-1}(0)\}_{1j} \{b_l\}_j = 0, l \in N, \{Q^{-1}(0) Q'(0)\}_{12} = 0.$$

При таком выборе $\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}$ и $\{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}$ ряд (18) сходится абсолютно и равномерно в прямоугольнике $\overline{D}$. При этом возможно почленное дифференцирование ряда (18) до двух раз включительно; полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно для всех $(x,t)\in\overline{D}$.

По построению $u^{(m)}(x,0,\varepsilon)=\varphi(x), \dfrac{\partial u^{(m)}(x,0,\varepsilon)}{\partial t}=\psi(x).$

Вектор-функция $w_{s+}(t,\varepsilon)+w_{s-}(t,\varepsilon)$ удовлетворяет системе (7) с точностью $O\left(\dfrac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s^3}\right)$, $s\in N$. Заметим, что постоянная k_0 в $O\left(\dfrac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s^3}\right)$ не зависит от ε, s.

Пусть

$$r_s(t,\varepsilon)=w_{s+}(t,\varepsilon)+w_{s-}(t,\varepsilon)+y_s(t,\varepsilon). \tag{21}$$

Тогда

$$\varepsilon^2 Hy_s''+\omega_s^2\Omega(t)y_s=\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}D_{0sk}(t)y_k+\varepsilon^2 D_1(t)y_s+\varepsilon^2 F(t)y_s'+O\left(\frac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s^3}\right), s\in N. \tag{22}$$

Положим

$$y_s(0,\varepsilon)=0,\ y_s'(0,\varepsilon)=0,\ s\in N. \tag{23}$$

Запишем систему (22) в координатной форме:

$$y_{s1}(t,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{\omega_s^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\{D_{0sk}(t)\}_{1j}\,y_{kj}+O\left(\frac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s^3}\right)\right), \tag{24}$$

$$\varepsilon^2 y_{s2}''+\omega_s^2\lambda_0(t)y_{s2}=\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\{D_{0sk}(t)\}_{2j}\,y_{kj}+\varepsilon^2\sum_{j=1}^{2}\left(\{D_1(t)\}_{2j}\,y_{sj}+\{F(t)\}_{2j}\,y_{sj}'\right)+O\left(\frac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s^3}\right). \tag{25}$$

$s\in N$. Учитывая (23), получаем

$$y_{s2}(t,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{\omega_s}\int_0^t\Bigg(Y_s(t,\tau,\varepsilon)\Bigg(\eta(\tau)y_{s2}+\Bigg(\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\{D_{0sk}(\tau)\}_{2j}\,y_{kj}+ \tag{26}$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\left(\{D_1(\tau)\}_{2j}-\{F'(\tau)\}_{2j}\right)y_{sj}+O\left(\frac{\varepsilon^{m-1}}{\omega_s^3}\right)\Bigg)\Bigg)-\left(Y_s(t,\tau,\varepsilon)\right)'_{\tau}\sum_{j=1}^{2}\{F(\tau)\}_{2j}\,y_{sj}\Bigg)d\tau,$$

$s\in N$, где

$$Y_s(t,\tau,\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt[4]{\lambda_0(t)\lambda_0(\tau)}}\sin\frac{\omega_s\psi(t,\tau)}{\varepsilon},\ \psi(t,\tau)=\int_\tau^t\sqrt{\lambda_0(\tau)}\,d\tau,$$

$\eta(t)=\dfrac{\lambda_0''(t)}{4\lambda_0(t)}-\dfrac{5}{16}\left(\dfrac{\lambda_0'(t)}{\lambda_0(t)}\right)^2$ – дифференциальный инвариант [6].

Допустим выполнение таких условий:

9. $\dfrac{d^k\{\widetilde{D}_0(0)\}_{2l-1,j}}{dt^k}=0$, $k=0,1;\ j,l\in N$.

10. $\dfrac{Lk_1T}{\pi\sqrt[4]{\lambda_0(t)\lambda_0(\tau)}}\left(1+16\left(\dfrac{L}{\pi}\right)^4\right)\le\dfrac{d}{4}$, $d<1$, $0\le\tau\le t\le T$, где

$$\|D_{0ss}(t,\varepsilon)\|\le k_1,\ \|D_{0sk}(t)\|\le\frac{k_1}{(\omega_s-\omega_k)^4},\ s\ne k, s,k\in N.$$

11. $T\sqrt[4]{\frac{\lambda_0(\tau)}{\lambda_0(t)}}\,|\{F(\tau)\}_{2j}|\le\frac{d}{4},\ j=1,2,\ \ 0\le\tau\le t\le T$.

Тогда для достаточно больших k_2,

$$k_2>\frac{k_0LT}{\pi(1-d)\min\limits_{0\le\tau\le t\le T}\sqrt[4]{\lambda_0(\tau)\lambda_0(t)}},$$

оператор, определяемый с помощью (24), (26), отображает выпуклое компактное множество D_{s4},

$$D_{s4}=\left\{y_s(t,\varepsilon)\in C[0;T]:\|\,y_s(t,\varepsilon)\,\|\le\frac{k_2\varepsilon^m}{\omega_s^4}\right\},s\in N,\ \varepsilon\in[0;\varepsilon_1],$$

в себя и есть неперервным на нем. А потому он имеет неподвижные точки на множестве D_{s4} [5]. Таким образом, система (24), (26) совместна. При этом имеют место равенства (23).

Используя метод доказательства от противного, показываем единственность найденого решения системы (24), (26) [7]. Из полученных оценок для функций $y_{si}(t,\varepsilon)$ следует абсолютная и равномерная сходимость ряда

$$\sum_{s=1}^{\infty}y_s(t,\varepsilon)v_s(x) \tag{27}$$

в прямоугольнике $\overline{D}$. При этом возможно почленное дифференцирование ряда (27) по t и x до двух раз включительно; полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно в $\overline{D}$.

По построению

$$\varepsilon^2B(t)\sum_{k=1}^{\infty}z_k''(t,\varepsilon)\int_0^L v_k(x)v_s(x)dx+A(t)\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^2z_k(t,\varepsilon)\int_0^L v_k(x)v_s(x)dx\equiv$$
$$\equiv\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^L C(x,t)v_k(x)v_s(x)dx\right)z_k(t,\varepsilon),\ s\in N,$$

или

$$\int_0^L\Big(\varepsilon^2B(t)\frac{\partial^2u(x,t,\varepsilon)}{\partial t^2}-A(t)\frac{\partial^2u(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2}-\varepsilon C(x,t)u(x,t,\varepsilon)\Big)v_s(x)dx\equiv 0,\ s\in N,$$

где вектор-функция $u(x,t,\varepsilon)$ определяется по формуле (4).

Положим $q(x,t,\varepsilon)=\varepsilon^2B(t)\dfrac{\partial^2u(x,t,\varepsilon)}{\partial t^2}-A(t)\dfrac{\partial^2u(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2}-\varepsilon C(x,t)u(x,t,\varepsilon).$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{s=1}^{\infty}q_s(t,\varepsilon)v_s(x),$ где $q_s(t,\varepsilon)=\int\limits_0^L q(x,t,\varepsilon)v_s(x)dx,\ s\in N.$

По построению $q_s(t,\varepsilon)\equiv 0$, $t\in[0;T]$, $s\in N$.

Так как вектор-функция $q(x,t,\varepsilon)$ непрерывна по переменной x, $x\in[0;L]$, (t, ε считаем параметрами) и $q(0,t,\varepsilon)=q(L,t,\varepsilon)=0,\ t\in[0;T],$ то, продолжая нечетным способом компоненты $q(x,t,\varepsilon)$ на отрезок $[-L;0]$, приходим к выводу, что $q(x,t,\varepsilon)\equiv 0$, $(x,t)\in\overline{D}$ [8].

Таким образом, вектор-функция (4) в прямоугольнике $\overline{D}$ – решение первой краевой задачи (1) – (3), причем

$$\|\,u(x,t,\varepsilon)-u^{(m)}(x,t,\varepsilon)\,\|=O(\varepsilon^m). \tag{28}$$

Теорема 1. *Пусть* $A(t)$, $B(t) \in C^{m+3}[0;T]$, $C(x,t) \in C^{m+3}(\overline{D})$ *и имеют место условия 2–11. Тогда существует число* ε_1, $0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$, *такое, что для всех* $\varepsilon \in (0;\varepsilon_1]$ *задача (1)–(3) в прямоугольнике* $\overline{D}$ *имеет единственное решение (4) для которого правильна оценка (28).*

Обобщенное решение первой краевой задачи

В части 2 мы построили классическое решение задачи (1)–(3). При этом условия 1–3, 6 позволяли дважды почленно дифференцировать соответствующие ряды.

Допустим теперь, что имеют место следующие условия:

12. $\varphi(x) \in C^2[0;L]$, $\psi(x) \in C^2[0;L]$;

13. $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$, $\psi(0) = \psi(L) = 0$.

Тогда аналогично показываем, что на множествах

$$S_{l2} = \left\{ (\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}, \{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}) \in R^2 : \max\{|\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|, |\{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}|\} \le \frac{M}{\omega_l^2} \right\}, l \in N,$$

система (20) имеет единственное решение $\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}$, $\{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}$.

При этом $\| p_{2l+}^{(0)} \| \le \dfrac{M}{\omega_l^2}$, $\| p_{2l-}^{(0)} \| \le \dfrac{M}{\omega_l^2}$, $l \in N$

(постоянная M не зависит от l).

В данном случае вектор-функция $w_{s+}(t,\varepsilon) + w_{s-}(t,\varepsilon)$ удовлетворяет системе (7) с точностью $O\left(\dfrac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s}\right)$, $s \in N$.

14. Пусть $\dfrac{Lk_1T}{\pi\sqrt[4]{\lambda_0(t)\lambda_0(\tau)}}\left(1 + 4\left(\dfrac{L}{\pi}\right)^2\right) \le \dfrac{d}{4}, d < 1, 0 \le \tau \le t \le T.$

Тогда для решения $y_{si} = y_{si}(t,\varepsilon)$, $i = 1,2$, системы (24), (26) имеет место оценка $y_{si}(t,\varepsilon) = O\left(\dfrac{\varepsilon^m}{\omega_s^2}\right)$, $s \in N$.

По построению

$$\varepsilon^2 B(t)\sum_{k=1}^{m} z_k''(t,\varepsilon)\int_0^L v_k(x)v_s(x)dx + A(t)\sum_{k=1}^{m}\omega_k^2 z_k(t,\varepsilon)\int_0^L v_k(x)v_s(x)dx \equiv$$

$$\equiv \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^L C(x,t)v_k(x)v_s(x)dx\right)z_k(t,\varepsilon), s = \overline{1,m},$$

т.е. $\displaystyle\int_0^L (\varepsilon^2 B(t)\frac{\partial^2 u_m(x,t,\varepsilon)}{\partial t^2} - A(t)\frac{\partial^2 u_m(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2} - \varepsilon C(x,t)u(x,t,\varepsilon))v_s(x)dx \equiv 0, s = \overline{1,m},$

$$u_m(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{m} z_k(t,\varepsilon)v_k(x).$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} q_{ms}(t,\varepsilon)v_s(x), \tag{29}$$

где

$$q_{ms}(t,\varepsilon) = \int_0^L q_m(x,t,\varepsilon)v_s(x)dx, s \in N,$$

$$q_m(x,t,\varepsilon) = \varepsilon^2 B(t)\frac{\partial^2 u_m(x,t,\varepsilon)}{\partial t^2} - A(t)\frac{\partial^2 u_m(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2} - \varepsilon C(x,t)u(x,t,\varepsilon).$$

По построению $q_{ms}(t,\varepsilon) \equiv 0$, $t \in [0;T]$, $s = \overline{1,m}$. Оценим остальные коэффициенты $q_{ms}(t,\varepsilon)$, $s \ge m+1$. Для этого заметим, что

$$q_{m+1}(x,t,\varepsilon) = q_m(x,t,\varepsilon) + \varepsilon^2 B(t) z''_{m+1}(t,\varepsilon) v_{m+1}(x) - A(t) z_{m+1}(t,\varepsilon) v''_{m+1}(x)$$

Так как $q_{m+1,s}(t,\varepsilon) \equiv 0$, $t \in [0;T]$, $s = \overline{1,m+1}$, то

$$q_{m,m+1}(t,\varepsilon) = -(\varepsilon^2 B(t) z''_{m+1}(t,\varepsilon) + \omega_{m+1}^2 A(t) z_{m+1}(t,\varepsilon)).$$

Таким образом, $\| q_{m,m+1}(t,\varepsilon) \| \le \dfrac{M}{\omega_{m+1}^2}$ с постоянной M, не зависящей от m, и, вообще, учитывая, что $q_{m+i}(x,t,\varepsilon) = q_m(x,t,\varepsilon) + \sum\limits_{j=1}^{i}(\varepsilon^2 B(t) z''_{m+j}(t,\varepsilon) v_{m+j}(x) - A(t) z_{m+j}(t,\varepsilon) v''_{m+j}(x))$,

откуда $q_{m,m+i}(x,t,\varepsilon) = -(\varepsilon^2 B(t) z''_{m+i}(t,\varepsilon) + \omega_{m+i}^2 A(t) z_{m+i}(t,\varepsilon)), i \in N$,

получаем $\| q_{ms}(t,\varepsilon) \| \le \dfrac{M}{\omega_s^2}$, $s \ge m+1$, где постоянная M не зависит от m, s.

Таким образом, ряд (29) в прямоугольнике $\overline{D}$ сходится абсолютно и равномерно к функции $q_m(x,t,\varepsilon)$ [9].

Поскольку $u_m(x,t,\varepsilon)$ есть решение задачи

$$\varepsilon^2 B(t)\frac{\partial^2 u_m(x,t,\varepsilon)}{\partial t^2} = A(t)\frac{\partial^2 u_m(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2} + \varepsilon C(x,t)u(x,t,\varepsilon) + \sum_{s=m+1}^{\infty} q_{ms}(t,\varepsilon)v_s(x),$$

$$u_m(0,t,\varepsilon) = u_m(L,t,\varepsilon) = 0,$$

$u_m(x,0,\varepsilon) = \varphi_m(x), \dfrac{\partial u_m(x,0,\varepsilon)}{\partial t} = \psi_m(x)$, где $\varphi_m(x) = \sum\limits_{s=1}^{m} a_s v_s(x), \psi_m(x) = \sum\limits_{s=1}^{m} b_s v_s(x)$, то вектор-функция (4) в прямоугольнике $\overline{D}$ будет обобщенным решением задачи (1)–(3) [10].

Теорема 2. *Пусть* $A(t)$, $B(t) \in C^{m+2}[0;T]$, $C(x,t) \in C^{m+2}(\overline{D})$ *и имеют место условия 4, 5, 7 – 9, 11 – 14. Тогда существует число* ε_1, $0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$, *такое, что для всех* $\varepsilon \in (0;\varepsilon_1]$ *задача (1)–(3) в прямоугольнике* $\overline{D}$ *имеет единственное обобщенное решение (4), для которого правильна оценка (28).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская, О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения / О.А. Ладыженская. – М. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1953. – 279 с.

2. Митропольский, Ю.А. Асимптотические методы исследований квазиволновых уравнений гиперболического типа / Ю.А. Митропольский, Г.П. Хома, М.И. Громяк. – Киев : Наук. думка, 1991. – 232 с.

3. Фещенко, С.Ф. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений / С.Ф. Фещенко, Н.И. Шкиль, Л.Д. Николенко. – Киев : Наук. думка, 1968. – 248 с.

4. Шкиль, Н.И. Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями / Н.И. Шкиль, И.И. Старун, В.П. Яковец. – Киев : Высшая школа, 1991. – 207 с.

5. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 744 с.

6. Павлюк, И.А. Асимптотические свойства решений неавтономных систем дифференциальных уравнений второго порядка / И.А. Павлюк. – Киев : Изд-во Киев. ун-та, 1970. – 208 с.

7. Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М. : ГИФМЛ, 1959. – 468 с.

8. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том III / Г.М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1969. – 656 с.

9. Бари, Н.К. Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. – М. : ГИФМЛ, 1961. – 936 с.

10. Соболев, С.Л. Уравнения математической физики / С.Л. Соболев. – М. : Наука, 1966. – 444 с.

P.F. Samusenko. **Asymptotic Representation of the Solutions Singularly Perturbed System of Hyperbolic Partial Differential Equations with Degeneration**

The asymptotic solution first boundary value problem for the linear singularly perturbed system of hyperbolic partial differential equations with degeneration is constructed in paper.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 30.01.2012