УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. Матысик, В.Ф. Савчук

ПРАВИЛО ОСТАНОВА В ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕДУРАХ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для решения линейных уравнений с положительным ограниченным и самосопряжённым оператором в гильбертовом пространстве предлагается неявный итерационный метод. Для предложенного метода обосновано применение правила останова по невязке, что делает рассматриваемый итерационный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В работе доказана сходимость итерационного метода, получены оценка погрешности метода и оценка для момента останова.

1. Постановка задачи

В действительном гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение первого рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с ограниченным положительным самосопряженным оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако, предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Для решения уравнения (1) предлагается неявный итерационный метод:

$$\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)x_{n+1} = \left(E - \alpha A^k\right)^2 x_n + 2\alpha A^{k-1} y,\ x_0 = 0,\ \ k \in N. \tag{2}$$

Предполагается существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y, ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближённой правой части $y_\delta, \|y - y_\delta\| \le \delta$. В этом случае метод (2) примет вид:

$$\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha A^k\right)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha A^{k-1} y_\delta,\ x_{0,\delta} = 0, k \in N. \tag{3}$$

Ниже под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ, т. е. $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_n \left\|x - x_{n,\delta}\right\|\right) = 0$.

В работе [1] для метода (3) при условии $\alpha > 0$ доказана сходимость при точной и приближённой правой части уравнения (1), и в предположении, что точное решение уравнения истокообразно представимо, т.е. $x = A^s z, s > 0$, получена априорная оценка погрешности. Эта априорная оценка оптимизирована и найден априорный момент останова. В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, метод (3) становится неэффективным, так как тогда невозможно получить оценку погрешности и найти априорный момент останова. Тем не менее этот метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова, аналогичным [2–4; 6].

2. Правило останова по невязке

Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова условиями

$$\begin{aligned} &\left\| Ax_{n,\delta} - y_\delta \right\| > \varepsilon, \quad (n < m), \\ &\left\| Ax_{m,\delta} - y_\delta \right\| \le \varepsilon, \quad \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Предположим, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т.е. $\left\| Ax_{0,\delta} - y_\delta \right\| > \varepsilon.$ Ниже метод (3) с правилом останова (4) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_{m}\left\| x - x_{m,\delta}\right\|\right) = 0$.

Покажем, что правило останова по невязке (4) применимо к методу (3).

Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \dfrac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}\right] \ge 0.$ Нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ при $\alpha > 0$ выполняются следующие условия:

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \left| g_n(\lambda)\right| \le 2k(n\alpha)^{1/\kappa}, \quad n > 0, \tag{5}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \left| 1 - \lambda g_n(\lambda)\right| \le 1, \quad n > 0, \tag{6}$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \to 0, \quad n \to \infty, \quad \forall \lambda \in (0, M], \tag{7}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \lambda^s \left| 1 - \lambda g_n(\lambda)\right| \le s^{s/k}(2kn\alpha e)^{-s/k}, \quad n > 0, \quad 0 \le s \le s_0, \quad s_0 = \infty. \tag{8}$$

Справедлива

Лемма 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0,\ \left\| A \right\| \le M$. *Тогда для любого* $\omega \in H$ $\left(E - Ag_n(A)\right)\omega \to 0, \quad n \to \infty.$

Доказательство.

Используя интегральное представление самосопряжённого оператора $A = \int\limits_0^M \lambda dE_\lambda$, где $M = \left\| A \right\|$ и E_λ – спектральная функция оператора A, получим

$$\left(E - Ag_n(A)\right)\omega = \int\limits_0^M \left(1 - \lambda g_n(\lambda)\right) dE_\lambda \omega = \int\limits_0^{\varepsilon_0} \left(1 - \lambda g_n(\lambda)\right) dE_\lambda \omega + \int\limits_{\varepsilon_0}^M \left(1 - \lambda g_n(\lambda)\right) dE_\lambda \omega.$$

Так как $1 - \lambda g_n(\lambda) = \dfrac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}$ и $\left|\dfrac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^2}{1+\alpha^2\lambda^{2k}}\right| \le q(\varepsilon_0) < 1$ для всех $\lambda \in (0, M]$ и $\alpha > 0$, то $\left\| \int\limits_{\varepsilon_0}^M \left(1 - \lambda g_n(\lambda)\right) dE_\lambda \omega \right\| \le q^n(\varepsilon_0) \left\| \int\limits_{\varepsilon_0}^M dE_\lambda \omega \right\| \le q^n(\varepsilon_0)\left\| \omega \right\| \to 0, \quad n \to \infty.$ Из (6) имеем

$\left\| \int\limits_0^{\varepsilon_0} \left(1 - \lambda g_n(\lambda)\right) dE_\lambda \omega \right\| \le \left\| \int\limits_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda \omega \right\| \le \left\| E_{\varepsilon_0}\omega \right\| \to 0, \quad \varepsilon_0 \to 0$ в силу свойств спектральной функции. Следовательно, $\left(E - Ag_n(A)\right)\omega \to 0, \quad n \to \infty.$ Лемма 1 доказана.

Имеет место

Лемма 2. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\quad \|A\| \leq M$. *Тогда для* $\forall \upsilon \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^{s/k}\left\|A^s\left(E - Ag_n(A)\right)\upsilon\right\| \to 0,\quad n \to \infty,\quad 0 \leq s < \infty.$

Доказательство.

Так как верно (8), то

$$n^{s/k}\left\|A^s\left(E - Ag_n(A)\right)\right\| \leq n^{s/k} \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s \left|1 - \lambda g_n(\lambda)\right| \leq n^{s/k}\gamma_s n^{-s/k} = \gamma_s,$$

где $\gamma_s = \left(\dfrac{s}{2k\alpha e}\right)^{s/k}$.

Воспользуемся теоремой Банаха–Штейнгауза [5, с. 151], по которой сходимость $B_n u \to Bu$ при $n \to \infty$ для всех $u \in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|, n = 1,2,...,$ ограничены не зависящей от n постоянной.

Возьмём в качестве плотного подмножества в $\overline{R(A)} = H$ множество $R(A)$. Положим $s_1 = s + 1$. Тогда для каждого $\upsilon = A\omega \in R(A)$ имеем:

$$n^{s/k}\left\|A^s\left(E - Ag_n(A)\right)\upsilon\right\| = n^{s/k}\left\|A^{s+1}\left(E - Ag_n(A)\right)\omega\right\| \leq$$

$$\leq n^{s/k}\left(\frac{s+1}{2k\alpha e}\right)^{(s+1)/k} n^{-(s+1)/k}\|\omega\| = \gamma_{s_1} n^{-1/k}\|\omega\| \to 0, n \to \infty,$$

так как $s_1 < \infty$. Лемма 2 доказана.

Справедлива

Лемма 3. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\quad \|A\| \leq M$. *Если для некоторой последовательности* $n_p < \bar{n} = const$ *и* $\upsilon_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $p \to \infty$ *имеем* $\omega_p = A\left(E - Ag_{n_p}(A)\right)\upsilon_0 \to 0,$ *то* $\upsilon_p = \left(E - Ag_{n_p}(A)\right)\upsilon_0 \to 0.$

Доказательство.

В силу (6) последовательность υ_p ограничена $\left\|\upsilon_p\right\| \leq \gamma_0\|\upsilon_0\|, \gamma_0 = 1, p \in N$. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность. Пусть $\upsilon_p - \to \upsilon, (p \in N' \subseteq N),$ тогда $A\upsilon_p - \to A\upsilon, (p \in N').$ Но по условию $\omega_p = A\upsilon_p \to 0, p \to \infty,$ следовательно, $A\upsilon = 0.$ Поскольку, нуль не является собственным значением оператора A, то $\upsilon = 0.$ Тогда

$$\left\|\upsilon_p\right\|^2 = \left(\upsilon_p, \left(E - Ag_{n_p}(A)\right)\upsilon_0\right) = \left(\upsilon_p, \upsilon_0\right) - \left(\upsilon_p, Ag_{n_p}(A)\upsilon_0\right) = \left(\upsilon_p, \upsilon_0\right) - \left(A\upsilon_p, g_{n_p}(A)\upsilon_0\right) =$$

$= \left(\upsilon_p, \upsilon_0\right) - \left(\omega_p, g_{n_p}(A)\upsilon_0\right) \to \left(\upsilon, \upsilon_0\right) = 0,$ так как $\omega_p \to 0, p \to \infty, \upsilon = 0$ и по условию (5) $\left\|g_{n_p}(A)\right\| \leq 2kn_p^{1/k}\alpha^{1/k} \leq 2k\bar{n}^{1/k}\alpha^{1/k}$. Следовательно, $\left\|\upsilon_p\right\| \to 0.$ Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности

υ_p стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность $\upsilon_p \to 0, \quad p \to \infty.$ Лемма 3 доказана.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $A = A^* \geq 0, \quad \|A\| \leq M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (3) *выбирается по правилу* (4). *Тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0.$

Доказательство.

По индукции легко показать, что $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E + \alpha^2 A^{2k})^{-n}(E - \alpha A^k)^{2n}\right] y_\delta.$

Следовательно,

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x. \tag{9}$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A[E - Ag_n(A)]x - [E - Ag_n(A)](y_\delta - y). \tag{10}$$

В силу лемм 1 и 2 имеем:

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{11}$$

$$\sigma_n = n^{1/k}\|A(E - Ag_n(A))x\| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{12}$$

Кроме того, из (5) и (6) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \leq 2kn^{1/k}\alpha^{1/k}\delta, \tag{13}$$

$$\|(E - Ag_n(A))\| \leq 1. \tag{14}$$

Применим правило останова (4). Тогда $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq b\delta, \quad b > 1$ и из (10) и (14) получим

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \leq \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \leq (b+1)\delta. \tag{15}$$

Для любого $n < m \quad \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon,$ поэтому

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \|(E - Ag_n(A))(y - y_\delta)\| \geq (b-1)\delta.$$

Итак, для $\forall n < m$

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq (b-1)\delta. \tag{16}$$

Из (12) и (16) при $n = m-1$ получим $\dfrac{\sigma_{m-1}}{(m-1)^{1/k}} = \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| \geq (b-1)\delta$ или $(m-1)^{1/k}\delta \leq \dfrac{\sigma_{m-1}}{b-1} \to 0, \quad \delta \to 0$ (так как из (12) $\sigma_m \to 0, \quad m \to \infty$). Если при этом $m \to \infty$ при $\delta \to 0$, то, используя (9), получим:

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| + 2km^{1/k}\alpha^{1/k}\delta \to 0$$

при $m \to \infty, \quad \delta \to 0,$ так как из (11) $\|(E - Ag_m(A))x\| \to 0, \quad m \to \infty.$

Если же для некоторых $\delta_n \to 0$ последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \to x, \quad \delta_n \to 0.$ Действительно, из (15) имеем $\|A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| \leq (b+1)\delta_n \to 0, \quad \delta_n \to 0.$ Отсюда по лемме 3 получаем, что $(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \to 0, \quad \delta_n \to 0.$ Поэтому

$$\left\|x_{m(\delta_n),\delta_n}-x\right\|\le\left\|\left(E-Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x\right\|+2km^{1/k}(\delta_n)\alpha^{1/k}\delta_n\to 0,\quad \delta_n\to 0.$$

Теорема 1 доказана.

3. Оценка погрешности

Имеет место

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и пусть* $x=A^s z,\quad s>0$. *Тогда справедливы оценки*

$$m\le 1+\frac{s+1}{2k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{k/(s+1)},$$

$$\left\|x_{m,\delta}-x\right\|\le\left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}+2k\alpha^{1/k}\left\{1+\frac{s+1}{2k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{k/(s+1)}\right\}^{1/k}\delta. \qquad (17)$$

Доказательство.

Так как $x=A^s z,\quad s>0$, то $\left\|A\left(E-Ag_{m-1}(A)\right)x\right\|=\left\|A^{s+1}\left(E-Ag_{m-1}(A)\right)z\right\|=$

$$=\left\|\int_0^M\lambda^{s+1}\frac{(1-\alpha\lambda^k)^{2(m-1)}}{(1+\alpha^2\lambda^{2k})^{m-1}}dE_\lambda z\right\|\le(s+1)^{(s+1)/k}\left[2k(m-1)\alpha e\right]^{-(s+1)/k}\|z\|.$$

Воспользовавшись (16), получим $(b-1)\delta\le(s+1)^{(s+1)/k}\left[2k(m-1)\alpha e\right]^{-(s+1)/k}\|z\|$, откуда

$$m\le 1+\frac{s+1}{2k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{k/(s+1)}.$$

При помощи неравенства моментов оценим

$$\left\|\left(E-Ag_m(A)\right)x\right\|\le\left\|A^s\left(E-Ag_m(A)\right)z\right\|\le\left\|A^{s+1}\left(E-Ag_m(A)\right)z\right\|^{s/(s+1)}\left\|\left(E-Ag_m(A)\right)z\right\|^{1/(s+1)}\le$$

$$\le\left\|A\left(E-Ag_m(A)\right)x\right\|^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}\le\left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}\ \text{(см. (15))}.$$

Так как соотношение (9) справедливо для любых n, то

$$\left\|x_{m,\delta}-x\right\|\le\left\|\left(E-Ag_m(A)\right)x\right\|+\left\|g_m(A)(y_\delta-y)\right\|\le\left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}+2km^{1/k}\alpha^{1/k}\delta\le$$

$$\le\left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}+2k\alpha^{1/k}\left\{1+\frac{s+1}{2k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{k}{s+1}}\right\}^{\frac{1}{k}}\delta.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. *Порядок оценки* (17) *есть* $O(\delta^{s/(s+1)})$ *и, как следует из* [3], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.*

Замечание 2. *Используемое в формулировке теоремы 2 предположение порядка* $s>0$ *истокопредставимости точного решения не потребуется на практике, так как оно не содержится в правиле останова (4). И тем не менее в теореме 2 утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций* m, *обеспечивающих оп-*

тимальный порядок погрешности. Но даже, если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке (4), как показывает теорема 1, обеспечивает, сходимость метода, т. е. его регуляризующие свойства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О.В. О приближенном решении операторных уравнений I рода / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Вестнік Брэсцкага ўн-та. Сер.4. Фізіка. Матэматыка. – 2011. – № 1. – С. 93–101.
2. Емелин, И.В. К теории некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
3. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
4. Матысик, О.В. О регуляризации операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 3. – С. 38–43.
5. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.
6. Вайникко, Г.М. Оценки погрешности метода последовательных приближений для некорректных задач / Г.М. Вайникко // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 3. – С. 84–92.

***O.V. Matysik, V.F. Savchuk.* The a Rule Stop in Iteration Procedures for Solving Operator Equations**

In the Hilbert space for solving linear equations with affirmative limited and self–conjugate operator the implicite iteration method is proposed. The application of a rule residual stop for the offered method has been proved, which makes viewed iteration method quite effective even then when there are no data about source representability of exact solution. In work the convergence of the iteration method is proved, the estimation of an error of the method and estimation the moment of stop are received.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 07.03.2012