УДК 517-518.948

В.М. Мадорский

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ ПОДХОДАХ К ПОСТРОЕНИЮ ПОЛУЛОКАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

В статье рассматриваются одношаговые итерационные процессы для приближенного решения нелинейного операторного уравнения в пространстве R^n. Процессы сходятся к точному решению операторного уравнения с «плохого» начального приближения. Локальная скорость сходимости процессов – квадратичная.

В работах [1; 2] для решения нелинейного уравнения

$$f(x)=0, f(D\subset R^n \to R^n) \tag{1}$$

применяется следующий итерационный процесс:

Шаг 1. Решается СЛАУ для определения поправки Δx_n

$$f'(x_n)\Delta x_n = -\beta_n f(x_n), \beta_0 \in [1e-3, 1e-1],$$

$f'(x_n)$ – производная Фреше оператора $f(x_n)$ на элементе x_n.

Шаг 2. Производится уточнение исходного вектора x_n

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n .$$

Шаг 3. Проводится проверка на качество полученного уточнённого вектора x_{n+1}: если $\|f(x_{n+1})\| \le \varepsilon, \varepsilon << 1, \varepsilon$ – параметр останова, то выходим из просчётов, иначе

Шаг 4. Проводится пересчёт шаговой длины β_{n+1} по тем или иным формулам [2] и переход на шаг 1. Пересчёт шаговой длины связывался с поведением норм невязок на соседних (или близких) шагах. В связи с тем, что информация о поведении итерационного процесса содержится не только в нормах невязок, но и в нормах поправок на соседних (или близлежащих) шагах, возникает вопрос о том, чтобы поведение шаговых длин β_{n+1} учитывало не только изменение норм невязок, но и поведение норм поправок в процессе уточнения приближенного решения.

Пусть, как обычно при рассмотрении квазиньютоновских процес сов, оператор f удовлетворяет следующим условиям:

$$f \in C_D^2, \|f''(x)\| \le K \forall x \in D, \left\|[f'(x)]^{-1}\right\| \le B \forall x \in D. \tag{2}$$

Для решения уравнения (1) применяем итерационный процесс:
до начала цикла по начальному вектору x_0 и начальной шаговой длине β_0 находим Δx_0, решая СЛАУ $f'(x_0)\Delta x_0 = -f(x_0)$, находим $x_1 = x_0 + \beta_0 \Delta x_0$ и входим в цикл.

Шаг 1. Проверяем выполнимость условия $\|f(x_1)\| \le \varepsilon$. Если это условие выполняется, то конец просчётов, иначе

Шаг 2. Решаем СЛАУ $f'(x_1)\Delta x_1 = -f(x_1)$, из которой находим вектор Δx_1.

Шаг 3. Осуществляем пересчёт шаговой длины по формуле:

$$\beta_1 = \min(1, \frac{\beta_0 \|\Delta x_0\| \|f(x_0)\|}{\|\Delta x_1\| \|f(x_1)\|}).$$

Шаг4. Находим $x_2 = x_1 + \beta_1 \Delta x_1$, устанавливаем
$x_0 := x_1, x_1 := x_2, \|\Delta x_0\| := \|\Delta x_1\|, \beta_0 := \beta_1$ и переходим на шаг 1.

Доказательство сходимости итерационного процесса шаг 1 – шаг 4 опирается на теорему о среднем для дважды непрерывно дифференцируемых операторов и на способ определения шаговой длины β_{n+1}. Докажем, при каких условиях можно рассчитывать на релаксационность процесса шаг 1 – шаг 4.

Из теоремы о среднем и способе определения шаговой длины следует оценка:

$$\begin{aligned} &\|f(x_{n+1})\| \le \|f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\| + 0.5K\|x_{n+1} - x_n\|^2 \le \\ &\le \|f(x_n) - \beta_n f(x_n)\| + 0.5K\beta_n\sqrt{\beta_n}B\sqrt{B}\|f(x_n)\|\sqrt{\|f(x_n)\|\cdot\|\Delta x_n\|} = \\ &= (1-\beta_n)\|f(x_n)\| + 0.5KB\sqrt{B}\beta_n\|f(x_n)\|\beta_n\sqrt{\|f(x_n)\|\cdot\|\Delta x_n\|} = \\ &= (1-\beta_n(1-0.5KB\sqrt{B}\sqrt{\beta_n\|f(x_n)\|\cdot\|\Delta x_n\|}))\|f(x_n)\| = \\ &= (1-\beta_n(1-\varepsilon_n))\|f(x_n)\| = q_n\|f(x_n)\|. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon_n = 0.5KB\sqrt{B}\sqrt{\beta_n\|f(x_n)\|\cdot\|\Delta x_n\|}$, $q_n = 1-\beta_n(1-\varepsilon_n)$.

Из способа определения шаговой длины следует справедливость соотношения $\beta_{n+1}\|f(x_{n+1})\|\cdot\|\Delta x_{n+1}\| = \beta_n\|f(x_n)\|\cdot\|\Delta x_n\|$, пока

$$\beta_i \le 1, i \ge n+1. \tag{4}$$

Если $\varepsilon_0 = 0.5KB\sqrt{B}\sqrt{\beta_0\|f(x_0)\|\cdot\|\Delta x_0\|} < 1$, то из (4) следует, что все $\varepsilon_i = \varepsilon_0 < 1, q_i < 1$.

Из оценки (3) индуктивно имеем

$$\|f(x_{n+1})\| \le \prod_{i=0}^{n} q_i\|f(x_0)\|, q_i < 1. \tag{5}$$

Покажем, что все $\beta_i \not\to 0$, откуда будет следовать, что все $q_i \not\to 1$. Из (4), (5) имеем:

$$\begin{aligned} \beta_i &= \frac{\beta_{i-1}\|f(x_{i-1})\|\cdot\|\Delta x_{i-1}\|}{\|f(x_i)\|\cdot\|\Delta x_i\|} \ge \frac{\beta_0\|f(x_0)\|\cdot\|\Delta x_0\|}{B\|f(x_i)\|^2} \ge \\ &\ge \frac{\beta_0\|\Delta x_0\|}{(\prod_{n=0}^{i-1} q_n)B\|f(x_0)\|}. \end{aligned} \tag{6}$$

Из (6) следует, что $q_i < 1$ и $q_i \not\to 1$.

В связи с вышеизложенным имеем, что

$$\lim_{n\to\infty}\|f(x_{n+1})\| = \lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{n} q_i\|f(x_0)\| = 0. \tag{7}$$

Из (7) следует, что последовательность элементов $\{x_n\}$, генерируемая итерационным процессом шаг 1 – шаг 4, сходится к решению x^* уравнения (1), если это решение существует в D. Перейдя к пределу в (6) при $i \to \infty$, в силу (7) получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_i = +\infty$, откуда в силу определения шаговой длины (6) и (7) следует, что существует номер k, что для всех $i > k$ $\beta_i := 1$.

Таким образом, после того, как шаговая длина становится равной единице, итерационный процесс шаг 1 – шаг 4 с квадратичной скоростью сходится к x^*. Таким образом, справедлива

Теорема 1. Пусть в интересующей нас области D существует x^* – решение уравнения (1). Если оператор f удовлетворяет условию (2) и $\varepsilon_0 < 1$. Тогда итерационный процесс шаг 1 – шаг 4 со сверхлинейной скоростью сходится к x^*.

Если в качестве шаговой длины использовать формулу

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\gamma_n \|\Delta x_n\| \|f(x_n)\|}{\beta_n \|\Delta x_{n+1}\| \|f(x_{n+1})\|}), \tag{8}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \|\Delta x_n\| \|f(x_n)\|}{\|\Delta x_{n+1}\| \|f(x_{n+1})\|} \cdot \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}, \gamma_0 = \beta_0^2,$$

то будет выполняться характеристическое равенство (4) и справедлива

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда итерационный процесс шаг 1 – шаг 4 с шаговой длиной β_{n+1}, определяемой формулой (8) со сверхлинейной скоростью сходится к x^* – решению уравнения (1).

Если уточнение очередного приближенного вектора проводится по формуле

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n} \Delta x_n, \tag{9}$$

а пошаговая длина находится из соотношения

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\beta_n \|\Delta x_n\|^2 \|f(x_n)\|^2}{\|\Delta x_{n+1}\|^2 \|f(x_{n+1})\|^2}), \tag{10}$$

то справедлива

Теорема 3. Пусть в области D существует x^* – решение уравнения (1). Если оператор f удовлетворяет условию (2) и $\varepsilon_0 = 0.5KB\sqrt{B}\sqrt{\beta_0 \|f(x_0)\| \cdot \|\Delta x_0\|} < 1$, тогда итерационный процесс шаг 1 – шаг 4 с учетом (9), (10) со сверхлинейной скоростью сходится к x^*.

Пусть в качестве шаговой длины используется формула:

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\gamma_n \|\Delta x_n\|^2 \|f(x_n)\|^2}{\beta_n \|\Delta x_{n+1}\|^2 \|f(x_{n+1})\|^2}), \tag{11}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \|\Delta x_n\| \|f(x_n)\|}{\|\Delta x_{n+1}\| \|f(x_{n+1})\|} \cdot \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}, \gamma_0 = \beta_0^2,$$

тогда справедлива

Теорема 4. Пусть выполняется условие теоремы 3. Тогда итерационный процесс шаг 1 – шаг 4 с учётом (9) и шаговой длиной (11) со сверхлинейной скоростью сходится к x^*.

Рассмотренные выше итерационные процессы являлись нерегуляризованными, то есть apriori предполагалось, что линейная система, решаемая на каждом шаге вычислительного процесса, являлась корректной задачей. Для того, чтобы избавиться от этого обременительного условия, на шаге 2 рассматривается регуляризованная задача относительно поправки:

$$(\alpha\beta_n\|f(x_n)\|^2 E+(\overline{f'(x_n)}+\alpha\beta_n\|f(x_n)\|E)f'(x_n))\Delta x_n = \\ =-(\overline{f'(x_n)}+\alpha\beta_n\|f(x_n)\|E)f(x_n),\alpha<<1. \tag{12}$$

Задачу (12) приведем к виду:

$$f'(x_n)\Delta x_n=-\alpha\beta_n\|f(x_n)\|^2(\overline{f'(x_n)}+\alpha\beta_n\|f(x_n)\|E)^{-1}\Delta x_n-f(x_n). \tag{13}$$

Здесь $\overline{f'(x_n)}$ – оператор, сопряженный оператору $f'(x_n)$.

Используя теорему о среднем и подставляя в неё вместо $f'(x_n)\Delta x_n$ соотношение (13), имеем:

$$\|f(x_{n+1})\|\le\|f(x_n)+f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)\|+0.5K\|x_{n+1}-x_n\|^2\le \\ \le(1-\beta_n)\|f(x_n)\|+\alpha\beta^2\|f(x_n)\|^2B\|\Delta x_n\|+0.5AC\|f(x_n)\|\beta_n\sqrt{AC}\cdot \\ \cdot\sqrt{\beta_n\|f(x_n)\|\cdot\|\Delta x_n\|}=(1-\beta_n(1-\beta_n\|f(x_n)\|\cdot\|\Delta x_n\|\alpha B- \\ -0.5KAC\sqrt{AC}\sqrt{\beta_n\|f(x_n)\|\cdot\|\Delta x_n\|}))\|f(x_n)\|=(1-\beta_n(1-\varepsilon_n))\|f(x_n)\|= \\ =q_n\|f(x_n)\|. \tag{14}$$

Здесь использованы оценки

$$\left\|\left[\alpha\beta_n\|f(x_n)\|^2E+(\overline{f'(x_n)}+\alpha\beta_n\|f(x_n)\|E)f'(x_n)\right]^{-1}\right\|\le A, \tag{15}$$

$$\left\|(\overline{f'(x_n)}+\alpha\beta_n\|f(x_n)\|E)^{-1}\right\|\le B, \tag{16}$$

$$\left\|\overline{f'(x_n)}+\alpha\beta_n\|f(x_n)\|E\right\|\le C. \tag{17}$$

$\varepsilon_n=\alpha B\beta_n\|f(x_n)\|\cdot\|\Delta x_n\|+0.5KAC\sqrt{AC}\sqrt{\beta_n\|f(x_n)\|\cdot\|\Delta x_n\|}.$

$q_n=1-\beta_n(1-\varepsilon_n).$

Из оценки (14) индуктивно имеем $\|f(x_{n+1})\|\le\prod_{i=0}^{n}q_i\|f(x_0)\|, q_i<1.$

Если $\beta_0,\|f(x_0)\|$ и $\|\Delta x_0\|$ таковы, что $\varepsilon_0<1,$ то из способа определения следует, что все $\varepsilon_i=\varepsilon_0<1, i\le n+1$.

Рассуждения, аналогичные тем, которые проводились в теореме 1, позволяют утверждать, что $\beta_i\not\to 0$, $q_i\not\to 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\|f(x_{n+1})\|=0,$ а так же существует номер $k\in N,$ что, начиная с номера $i\ge k,$ все $\beta_i:=1.$

Таким образом справедлива

Теорема 5. Пусть в области D имеют место оценки (15)–(17) и $\varepsilon_0<1.$ Тогда итерационный процесс шаг 1 – шаг 4 с поправкой Δx_n, определённой по формуле (12), со сверхлинейной скоростью сходится к x^*.

Доказательство теоремы 5 вполне аналогичны доказательству теоремы 1 и опирается на теорему о среднем для операторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жанлав, Т. О сходимости на основе непрерывного метода ньютона / Т. Жанлав, И.В. Пузынин // Вычислительная математика и вычислительная физика. – 1992. – Т. 32, № 6. – С. 846–856.

2. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест, 2005. – 186 с.

V.M. Madorski. **About some New Applications to Construction Halflocal Iterative Processes**

The paper is concerned with one step iterative methods of approximate solution of the nonlinear operator equation in the space of R^n. The processes converge to exact solution of the operator equation from the "bad" initial approximation. The local speed of convergence of the processes is square.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 09.03.2012